

01; 09; 05

© 1991 г.

## НЕЛИНЕЙНЫЙ ТЕНЗОР МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ДЛЯ ДИПОЛЬНО-ОБМЕННЫХ СПИНОВЫХ ВОЛН В ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЕНКЕ

А. А. Сташкевич

Методом возмущений получены выражения для компонент тензора магнитной проницаемости, учитывающие нелинейные и обменные эффекты. Приводится бескоординатная ковариантная форма записи этих соотношений. Дана наглядная диаграммная интерпретация полученных выражений. В качестве примера проведен анализ структуры и количественная оценка дополнительных магнитных полей на нулевой частоте, наводимых спиновой волной за счет нелинейной магнитной проницаемости.

Нелинейные спин-волновые явления в ферромагнитных пленках привлекают все большее внимание исследователей [1-3]. При построении теоретических моделей подобных явлений в нелинейной оптике плодотворным является понятие нелинейного материального тензора — тензора диэлектрической проницаемости [4, 5]. В данной работе получены выражения для нелинейного тензора магнитной проницаемости ферромагнетика в таком виде, в каком он может быть использован в теории дипольно-обменных нелинейных спиновых волн (СВ) в тонких пленках. В частности, с его помощью проведен анализ структуры и дана количественная оценка дополнительных магнитных полей на нулевой частоте, наводимых спиновой волной за счет нелинейности среды.

Анализ строится на основе применения метода возмущений к уравнению Ландау—Лифшица

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma [\mathbf{M}, \mathbf{H}_{\text{эфф}}] \quad (1)$$

в отличие от работы [6], где намечены пути построения тензора магнитной проницаемости исходя из общего вида гамильтониана ферромагнетика. Эффективное поле  $\mathbf{H}_{\text{эфф}}$  включает также эффекты обменного взаимодействия

$$\mathbf{H}_{\text{эфф}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h} + \alpha \nabla^2 \mathbf{m}.$$

В записи эффективного магнитного поля отсутствует член, соответствующий магнитной анизотропии, а обменный член имеет изотропный вид. Такая запись оправдана для малоизотропных кубических ферромагнитных материалов, в частности такого распространенного, как иттрий-железный гранат (ИЖГ). Учет магнитной анизотропии не связан с принципиальными трудностями, в то же время он делает окончательные выражения чрезмерно громоздкими.

Считается, что ферромагнетик помещен в гармоническое пространственно-временное поле

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(x_1) \exp(i(\omega t - (\mathbf{K}, \mathbf{R}))) + \text{к. с.} \quad (2)$$

Соответственно намагниченность как отклик системы ищется в виде суммы кратных пространственно-временных гармоник, т. е.

$$\mathbf{m} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mathbf{m}_p(x_1) \exp[i(\omega_p t - (\mathbf{K}_p, \mathbf{R}))], \quad \omega_p = p\Omega, \quad \mathbf{K}_p = p\mathbf{K}. \quad (3)$$

Запись выражений (2), (3) учитывает специфику волн намагничённости в плёнке. Координата  $x_1$  является выделенной, она соответствует направлению нормали к плёнке. Две другие координаты определяют радиус-вектор в плоскости плёнки  $\mathbf{R} = x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ .

После подстановки (2), (3) в (1) получим систему связанных уравнений для пространственно-временных гармоник

$$\hat{\kappa}^{-1} \mathbf{m}_p - \omega_M \hat{\epsilon} \times \mathbf{h}_p (\delta_{1p} + \delta_{-1p}) = \gamma \sum_{r=\pm 1} [\mathbf{m}_{p-r}, \mathbf{h}_r] + \alpha \gamma \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\mathbf{m}_{p-q}, \nabla^2 \mathbf{m}_q]. \quad (4)$$

Здесь и далее  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  — векторное произведение двух векторов; первая  $\mathbf{h}_1$  и минус первая гармоника  $\mathbf{h}_{-1}$  соответствуют  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{h}^*$  в (2). Кроме того, введён вспомогательный тензорный оператор

$$\hat{\kappa}^{-1} = (\omega_H \hat{\epsilon} \times - \alpha \omega_M \hat{\epsilon} \times \nabla^2 - i \omega_p \hat{1}). \quad (5)$$

В (5)  $\hat{\epsilon} \times$  — антисимметричный тензор второго ранга, дуальный [7] единичному вектору, направленному вдоль постоянного магнитного поля  $\mathbf{e}$ ;  $\nabla^2$  — оператор Лапласа.

Решение (4) строим по методу возмущений, т. е. представляем каждую гармонику, характеризующую индексом  $p$ , в виде ряда возмущений с суммированием по индексу  $s$

$$\mathbf{m}_p = \sum_{s=1}^{\infty} \mathbf{m}_p^{(s)}. \quad (6)$$

Подставим (6) в (4), при этом считаем, что члены в правой части (4) малы. Тогда в первом приближении теории возмущений получим

$$\hat{\kappa}^{-1} \mathbf{m}_1^{(1)} = \omega_M \hat{\epsilon} \times \mathbf{h}. \quad (7)$$

Решение (7) сводится к обращению оператора  $\hat{\kappa}^{-1}$ . В безобменном приближении

$$\hat{\kappa} = \frac{i}{\omega_H^2 - \omega^2} \left( \frac{\omega_H^2}{\omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + i \omega_H \hat{\epsilon} \times - \omega \hat{1} \right), \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}$  — внешнее произведение вектора  $\mathbf{e}$  на самого себя (диада),  $\hat{1}$  — единичный тензор. Опираясь на известные теории дипольно-обменных СВ [8], можно свести действие обменного дифференциального оператора к ряду тривиальных операций. Для этого достаточно перейти от функций  $\mathbf{m}(x_1)$ ,  $\mathbf{h}(x_1)$  ( $x_1$  — координата вдоль толщины плёнки) к их Фурье-представлению по  $x_1$ , разложив  $\mathbf{m}(x_1)$ ,  $\mathbf{h}(x_1)$  по модам спин-волнового резонанса (СВР). В этом Фурье-представлении останутся справедливыми все приведенные выражения, а учёт обмена сведётся к замене в них  $\omega_H$  на величину  $\Omega_{\mathbf{x}_n, p} = \omega_H + \alpha \omega_M (\mathbf{x}_n^2 + K_p^2)$ , где  $\mathbf{x}_n$  — поперечное волновое число (моды СВР). Для перехода обратно к функциям от координаты  $x_1$  необходимо произвести суммирование по модам СВР, т. е. выполнить обратное Фурье-преобразование.

В ряде случаев распределение поля по  $x_1$  хорошо описывается одной гармоникой СВР (так называемое диагональное приближение [8]). Тогда необходимость в суммировании вообще отпадает.

Связь последующего приближения и предыдущего имеет вид

$$\hat{\kappa}^{-1}(\omega_p, \Omega_{\mathbf{x}_n, p}) \mathbf{m}_p^{(s)} = \gamma \sum_r [\mathbf{m}_{p-r}^{(s-1)}, \mathbf{h}_r] + \alpha \gamma \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \sum_{s'=0}^s [\mathbf{m}_{p-p'}^{(s-s')}, \nabla^2 \mathbf{m}_{p'}^{(s')}]. \quad (9)$$

Выражение (9) написано в диагональном приближении для одной моды СВР. В общем случае дипольно-обменной СВ функции, фигурирующие в (9), необходимо разложить в ряд Фурье по модам СВР, что приведет к дополнительному суммированию в правой части (9).

Решение по методу возмущений можно проиллюстрировать диаграммами типа диаграмм многократных рассеяний в теории дифракции света на ультразвуке [9, 10] (рис. 1). Вдоль оси абсцисс на этих диаграммах отложен порядковый номер приближения теории возмущений  $s$ . Образованная по вертикали система уровней соответствует порядковым номерам пространственно-временных гармоник. Тогда весь процесс формирования нелинейного отклика системы можно рассматривать как совокупность переходов между уровнями. Например, в первом (линейном) приближении есть отклик только на плюс и минус первой гармоники, который символически определяется переходами  $\hat{0}\hat{1}$ ,  $\hat{0}-\hat{1}$ . В следующем порядке теории возмущений появляются вклады в гармоники  $p = 0$ ,

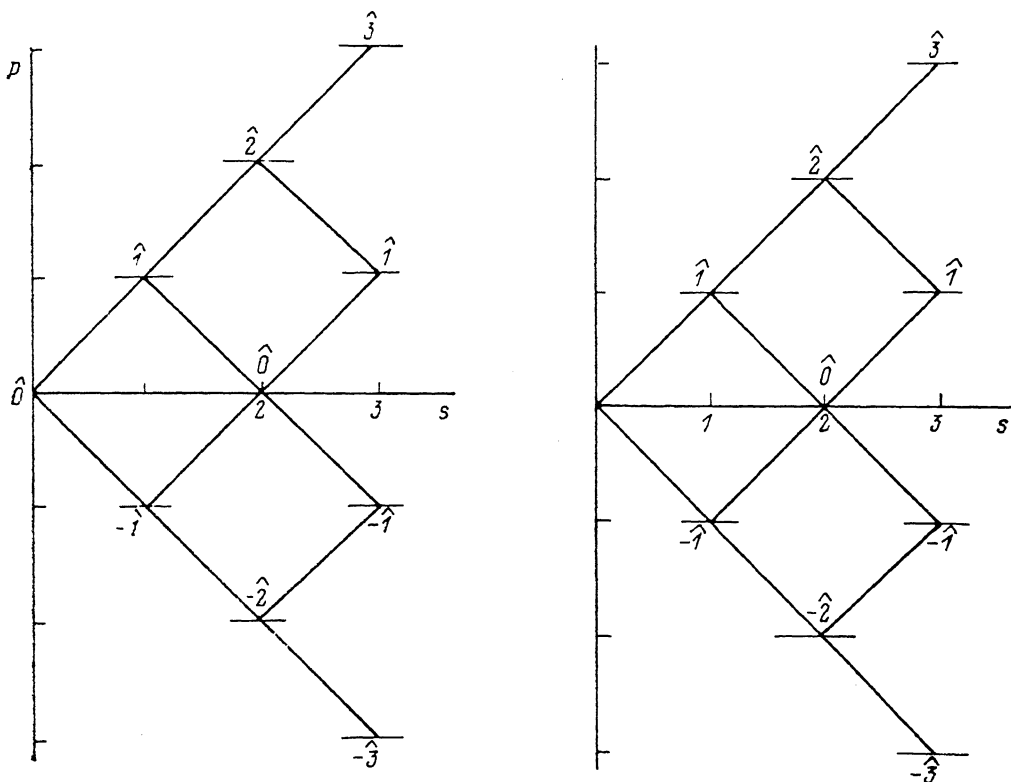


Рис. 1. Диаграмма переходов, иллюстрирующая структуру ряда возмущений.

$p = \pm 2$ . Они определяются для  $p = 0$  переходом  $\hat{0}\hat{1}\hat{0} + \hat{0}-\hat{1}\hat{0}$ , для  $p = 2 - \hat{0}\hat{1}\hat{2}$ , для  $p = -2 - \hat{0}-\hat{1}-\hat{2}$ .

Продвигаясь далее «вверх по ряду возмущений», получаем отклики на гармониках  $p = 3$ ,  $\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{3}$ ;  $p = 1$ ,  $\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1} + \hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1} + \hat{0}-\hat{1}\hat{0}\hat{1}$ ;  $p = -1$ ,  $\hat{0}-\hat{1}-\hat{2}-\hat{1} + \hat{0}-\hat{1}\hat{0}-\hat{1} + \hat{0}\hat{1}\hat{0}-\hat{1}$ ;  $p = -3$ ,  $\hat{0}-\hat{1}-\hat{2}-\hat{3}$ .

Из рекуррентной формулы (9) видно, что в правой ее части стоит два слагаемых, т. е. существуют два механизма связи между последующим и предыдущим приближениями. Первый механизм обусловлен полями диполь-дипольного взаимодействия, а второй — полями обменного происхождения. Соответственно порождаются два типа переходов: диполь-дипольные и обменные. За счет переходов первого типа осуществляется непосредственная связь между уровнем  $p$  и его ближайшими соседями  $p \pm 1$ , что хорошо видно из рис. 1. Система переходов обменного происхождения, вообще говоря, значительно сложнее, что видно из более сложного характера суммирования во втором слагаемом. Однако для первых трех приближений структуры переходов в обоих случаях совпадают.

Ясно, что диполь-дипольный механизм является основным. Поэтому ему будет уделено основное внимание в дальнейшем изложении. Обменные пере-

ходы могут дать существенный вклад при больших значениях волновых чисел спиновых волн (СВ): продольного волнового числа  $K_p$  (коротковолновые СВ) либо поперечного  $x_n$  волнового числа, т. е. в тонких пленках.

Часть выкладок в данной работе производится в символической ковариантной форме, развитой в работах Ф. И. Федорова [7]. При необходимости перехода к координатной форме записи отдельных векторных и тензорных величин мы будем пользоваться аксиальной системой координат с выделенным направлением вдоль постоянного магнитного поля  $e$ . Два других орта в этой системе координат будут обозначены  $e_+$  и  $e_-$ .

Вспомогательный тензор  $\hat{\kappa}$  в аксиальном представлении диагонализуется

$$\hat{\kappa} = i \begin{vmatrix} x_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & x_+ & 0 \\ 0 & 0 & x_- \end{vmatrix}, \quad x_{\parallel} = \frac{1}{\omega}, \quad x_{\pm} = \frac{1}{\omega \mp \omega_H}. \quad (10)$$

В силу того что  $m$  есть вектор, каждый уровень трехкратно вырожден (по числу компонент вектора  $m$ ). Поэтому система переходов будет еще иметь

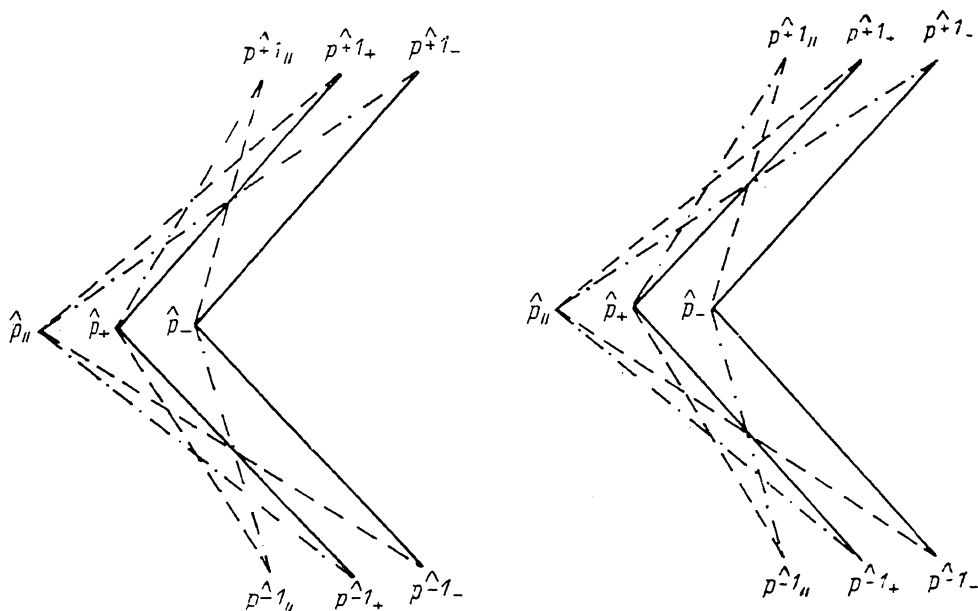


Рис. 2. Тонкая структура переходов «вверх» и «вниз».

тонкую структуру. При определении этой тонкой структуры необходимо помнить, что а) переходы с повышением частоты происходят за счет векторного умножения на

$$h_1 = h = h_{\parallel} e + h_+ e_+ + h_- e_-,$$

б) переходы с понижением частоты происходят за счет векторного умножения на

$$h_{-1} = h^* = h_{\parallel}^* e + h_+^* e_+ + h_-^* e_+,$$

в) таблица векторного умножения в аксиальной системе координат имеет вид

$$[e_+, e_-] = ie; [e, e_+] = ie_+; [e, e_-] = -ie_-.$$

Тонкая структура перехода вверх и вниз с уровня  $p$  представлена на рис. 2. На нем сплошной линией даны переходы за счет компоненты  $h_{\parallel}$  (либо  $h_{\parallel}^*$ ), штриховой линией — за счет компоненты  $h_+$  (либо  $h_+^*$ ), штрихпунктирной — за счет  $h_-$  (либо  $h_-^*$ ).

Таким образом, используя сформулированные выше правила переходов, можно получить следующие формулы для отклика системы в первом и втором порядках теории возмущений. В первом приближении на частоте  $\pm\omega$

$$\mathbf{m}_1^{(1)}(\omega) = \omega_M \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{h_+}{\omega_H - \omega} \\ \frac{h_-}{\omega_H + \omega} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{m}_{-1}^{(1)}(-\omega) = \mathbf{m}_1^{(1)*}(\omega). \quad (11a)$$

Во втором приближении на частоте  $\pm 2\omega$

$$\mathbf{m}_2^{(2)}(2\omega) = -\gamma\omega_M \begin{vmatrix} \frac{h_- h_+}{\omega_H^2 - \omega^2} \\ \frac{h_{\parallel} h_+}{(\omega_H - \omega)(\omega_H - 2\omega)} \\ \frac{h_{\parallel} h_-}{(\omega_H + \omega)(\omega_H + 2\omega)} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{m}_{-2}^{(2)}(-2\omega) = \mathbf{m}_2^{(2)*}(2\omega). \quad (11b)$$

Во втором приближении на частоте  $\omega = 0$

$$\mathbf{m}_0^{(2)}(0) = -\gamma\omega_M \begin{vmatrix} \frac{h_+ h_+^*}{(\omega_H - \omega)^2} + \frac{h_- h_-^*}{(\omega_H + \omega)^2} \\ \frac{h_{\parallel}^* h_+}{\omega_H(\omega_H - \omega)} + \frac{h_{\parallel} h_-^*}{\omega_H(\omega_H + \omega)} \\ \frac{h_{\parallel}^* h_-}{\omega_H(\omega_H + \omega)} + \frac{h_{\parallel} h_+^*}{\omega_H(\omega_H - \omega)} \end{vmatrix}. \quad (11b)$$

Учет обмена характерным образом видоизменяет формулы (11). Так, (11b) для дипольно-обменной СВ переписывается в виде

$$\mathbf{m}_2^{(2)}(2\omega) = \mathbf{m}_2^{(2)}(2\omega, 2x) + \mathbf{m}_2^{(2)}(2\omega, 0) = -\gamma\omega_M \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{h_-(x) h_+(x)}{\Omega_{1,1}^2 - \omega^2} \\ \frac{h_{\parallel}(x) h_+(x)}{(\Omega_{1,1} - \omega)(\Omega_{2,2} - \omega)} \\ \frac{h_{\parallel}(x) h_-(x)}{(\Omega_{1,1} + \omega)(\Omega_{2,2} + \omega)} \end{vmatrix} - \gamma\omega_M \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{h_-(x) h_+(x)}{\Omega_{1,1}^2 - \omega^2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (11g)$$

В (11b) при определении компоненты  $m_{0\parallel}^{(2)}$  возникает сложность из-за того, что в выражение для  $m_{0\parallel}^{(2)}$  должна входить величина  $x_{\parallel}(0)$ , которая в точке  $\omega=0$  не определена. В этом случае необходимо пользоваться предельным переходом  $\lim_{\delta\omega \rightarrow 0} m_{0\parallel}^{(2)}(\delta\omega)$ .

Как видно из (11b), в общем случае в ферромагнетике на нулевой частоте имеет место не только отклик вдоль направления постоянного магнитного поля, но и в поперечных направлениях, т. е. направление постоянного магнитного поля меняется. Оценим величину этого эффекта для прямой объемной СВ в нормально намагниченной пленке. Тогда направление  $e$  совпадает с нормалью к поверхности пленки  $e_1$ , компоненты  $m_{0\pm}^{(2)}$  и  $m_{0\parallel}^{(2)}$  соответствуют касательным направлениям в пленке. Из (11b) видно, что касательные компоненты имеют заведомо несимметричное распределение по толщине пленки, так как продольная и поперечная компоненты поля  $h$  в СВ имеют разный тип симметрии. Ясно, что при больших и малых  $K$   $m_{0+}^{(2)} \rightarrow 0$ ,  $m_{0-}^{(2)} \rightarrow 0$ , так как в первом случае  $h_{\parallel} \rightarrow 0$ , а во втором случае  $h_{\pm} \rightarrow 0$ . При умеренных значениях  $K$  величина  $m_{0+}^{(2)}$  или  $m_{0-}^{(2)}$  может составлять до одной трети от  $m_{0\parallel}^{(2)}$ .

Наличие наклона вектора постоянной намагниченности можно в принципе зарегистрировать при помощи такого чувствительного способа зондирования спин-волновых полей, как волноводная оптическая дифракция. Действительно, в [11] при больших уровнях СВЧ мощностей помимо рассеяния непосредственно

на спиновой волне наблюдалось сильное дополнительное рассеяние. Антисимметричный характер распределения  $m_{0\pm}^{(2)}$  в СВ по толщине пленки сводит на нет возможность преобразования на этой намагниченности оптических мод. В то же время сильные реактивные поля  $\mathbf{h}$  под антенной могут дать симметричное распределение  $m_{0\pm}^{(2)}$  по толщине пленки и послужить источником дополнительного рассеяния света.

Формулы для отклика на частоте  $\omega$  в третьем приближении теории возмущений имеют следующую структуру:

$$m_1^{(3)}(\omega) = m(\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1}) + m(\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1}) + m(\hat{0} - \hat{1}\hat{0}\hat{1}),$$

$$m(\hat{0}\hat{1}\hat{2}\hat{1}) = -\gamma^2 \omega_M \left[ \begin{array}{l} \frac{h_- h_-^* h_{\parallel}}{\omega(\omega + \omega_H)(\omega_H + 2\omega)} - \frac{h_+ h_+^* h_{\parallel}}{\omega(\omega - \omega_H)(2\omega - \omega_H)} \\ \frac{h_- h_-^* h_+}{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega - \omega_H)} + \frac{h_+ h_+^* h_-}{(\omega - \omega_H)^2(2\omega - \omega_H)} \\ \frac{h_+ h_+^* h_-}{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega + \omega_H)} - \frac{h_- h_-^* h_+}{(\omega + \omega_H)^2(2\omega + \omega_H)} \end{array} \right]. \quad (12a)$$

Ввиду громоздкости приводим остальные формулы покомпонентно

$$m_{1\parallel}^{(3)}(\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1} + \hat{0} - \hat{1}\hat{0}\hat{1}) = -\gamma^2 \omega_M \left( \frac{2}{\omega_H} \frac{h_- h_+ h_{\parallel}^*}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{h_- h_-^* h_{\parallel}}{\omega \omega_H (\omega + \omega_H)} - \frac{h_+ h_+^* h_{\parallel}}{\omega \omega_H (\omega - \omega_H)} \right), \quad (12б)$$

$$m_{1+}^{(3)}(\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1} + \hat{0} - \hat{1}\hat{0}\hat{1}) = \frac{-\gamma^2 \omega_M}{\omega - \omega_H} \left( -\frac{h_+ h_+ h_+^*}{(\omega_H - \omega)^2} - \frac{h_- h_-^* h_+}{(\omega_H + \omega)^2} + \frac{h_{\parallel} h_{\parallel}^* h_+}{\omega_H (\omega_H - \omega)} + \frac{h_{\parallel} h_{\parallel} h_-^*}{\omega_H (\omega_H + \omega)} \right), \quad (12в)$$

$$m_{1-}^{(3)}(\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{1} + \hat{0} - \hat{1}\hat{0}\hat{1}) = \frac{-\gamma^2 \omega_M}{\omega + \omega_H} \left( \frac{h_+ h_+^* h_-}{(\omega_H - \omega)^2} + \frac{h_- h_- h_-^*}{(\omega_H + \omega)^2} - \frac{h_{\parallel} h_{\parallel}^* h_-}{\omega_H (\omega_H + \omega)} - \frac{h_{\parallel} h_{\parallel} h_+^*}{\omega_H (\omega_H - \omega)} \right). \quad (12г)$$

Нетрудно видеть, что полученные выражения удовлетворяют общим соотношениям, вытекающим из условия сохранения длины вектора  $\mathbf{M}$  в процессе его временной эволюции  $|\mathbf{M}|^2 = M_0^2$

$$a) (\mathbf{M}_0, \mathbf{m}_0^{(2)}) = -(\mathbf{m}_1^{(1)}, \mathbf{m}_1^{(1)*}),$$

$$б) (\mathbf{M}_0, \mathbf{m}_1^{(3)}) = -(\mathbf{m}_1^{(1)*}, \mathbf{m}_2^{(2)}) - (\mathbf{m}_1^{(1)}, \mathbf{m}_0^{(2)}).$$

Кроме того, из (12) видно, что вклад различных переходов в конечные выражения существенно различен. Удельный вес таких вкладов, с одной стороны, определяется резонансным характером соответствующих сомножителей в знаменателе, с другой — структурой возбуждающего поля  $\mathbf{h}$ . Если поперечные компоненты  $h_+$  и  $h_-$  представлены в возбуждающем поле достаточно весомо (например, как в случае СВ при  $\omega$  порядка  $\omega_{\perp}$ ), то за счет резонансного характера выделяются переходы типа  $\hat{1}_+ \hat{0}_{\parallel} \hat{1}_+$ ,  $-\hat{1}_- \hat{0}_{\parallel} \hat{1}_+$ ,  $\hat{1}_+ \hat{0}_{\parallel} - \hat{1}_-$ ,  $-\hat{1}_- \hat{0}_{\parallel} - \hat{1}_-$ . Тогда ряд возмущений для компоненты  $m_+$  на частоте  $\omega$  представляет собой по существу бесконечную геометрическую прогрессию вида

$$m_{1+}(\omega) = m_{1+}^{(1)} + m_{1+}^{(3)} + \dots = \frac{\omega_M h_+}{\omega_H - \omega} + \frac{\omega_M \gamma^2 h_+ h_+ h_+^*}{(\omega_H - \omega)^3} + \dots \quad (13)$$

со знаменателем  $a = (\gamma^2 h_+ h_+^*) / (\omega - \omega_H)^2$ . Такой ряд может быть просуммирован, и для  $m_{1+}$  получено точное выражение

$$m_{1+}(\omega) = m_{-1+}^*(-\omega) = \frac{\omega_M h_+ (\omega_H - \omega)}{(\omega_H - \omega)^2 - \gamma^2 h_+ h_+^*}. \quad (14)$$

В тонких пленках (толщины в единицы микрон) поперечное волновое число спин-волновой моды  $\kappa$  может достигать  $10^4$ — $10^5$  см $^{-1}$ , нелинейные члены обменного происхождения могут давать вклад, которым нельзя пренебрегать. Общая структура формул первых трех приближений теории возмущений при этом не изменится, однако запись конкретных членов характерным образом модифицируется. Например, вклад эффективного резонансного перехода принимает вид (см. (13)).

$$m_{1+}^{(3)}(\omega) = m_{1+}^{(3)}(\omega, \kappa) + m_{1+}^{(3)}(\omega, 3\kappa) = -\frac{\gamma^2 \omega_M (\omega_H - \omega) h_+ h_+ h_+^*}{(\Omega_{1,1} - \omega)^3} \times \left( \frac{3}{4} \frac{1}{\Omega_{1,1} - \omega} + \frac{1}{4} \frac{1}{\Omega_{3,1} - \omega} \right). \quad (15)$$

Выше нами были получены выражения компонент для намагниченности ферромагнетика  $\mathbf{m}$  как нелинейной реакции на возбуждающее поле  $\mathbf{h}$ . Эти два вектора связываются через тензор магнитной восприимчивости  $\hat{\chi}$ , который в общем нелинейном случае сам зависит от  $\mathbf{h}$ . Переход к тензору магнитной проницаемости, столь полезному в волновых задачах электродинамики, тривиален  $\hat{\mu} = \hat{1} + \hat{\chi}$ . Наиболее наглядной формой представления тензорных величин является бескоординатная ковариантная форма записи, развитая в работах Ф. И. Федорова [7]. Ниже приводится ковариантная форма записи соотношения между  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{h}$ , из которой хорошо видна структура и симметрия тензоров  $\hat{\chi}$  и  $\hat{\mu}$ . В линейном приближении

$$\mathbf{m}_{\pm 1}^{(1)} = \omega_M \hat{\chi}(\omega_{\pm 1}) \hat{e} \times \mathbf{h}_{\pm 1}.$$

Для квадратичной нелинейности

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_p^{(2)} = & \gamma \omega_M \sum_{q, r = \pm 1} [\mathbf{h}_r, (\hat{\chi}(\omega_{p-q}) - Sp(\hat{\chi}(\omega_{p-q})) \hat{1}) \mathbf{h}_q] \hat{\chi}(\omega_p) \mathbf{e} + \\ & + (\mathbf{h}_r, \mathbf{h}_q) \hat{\chi}^{**}(\omega_{p-q}) \hat{\chi}(\omega_p) \mathbf{e} - [\mathbf{h}_q, (\hat{\chi}^{**}(\omega_{p-q}) - Sp(\hat{\chi}(\omega_{p-q})) \hat{1}) \mathbf{e}] \hat{\chi}(\omega_{p-q}) \mathbf{h}_r - \\ & - (\mathbf{e}, \mathbf{h}_q) \hat{\chi}^{**}(\omega_{p-q}) \hat{\chi}(\omega_p) \mathbf{h}_r. \end{aligned}$$

При этом должно выполняться

$$r + q = p. \quad (16)$$

Знак частичной суммы  $\Sigma$  следует понимать в смысле равенства (16), т. е. следующим образом. Он соответствует суммированию по всем диаграммам на рис. 1. Например, для  $\mathbf{m}_p^{(2)}$   $r = +1$  (переход  $\hat{0}\hat{1}\hat{0}$ ) и  $r = -1$  (переход  $\hat{0}-\hat{1}\hat{0}$ ). При этом в первом случае  $\mathbf{h}_r = \mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h}_q = \mathbf{h}^*$  (вначале переход вверх за счет  $\mathbf{h}$ , затем вниз за счет  $\mathbf{h}^*$ ), во втором случае  $\mathbf{h}_r = \mathbf{h}^*$ ,  $\mathbf{h}_q = \mathbf{h}$  (вначале переход вниз, потом вверх).

Для кубической нелинейности

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_p^{(3)} = & \gamma^2 \omega_M \sum_{q, r, s = \pm 1} (\mathbf{h}_r, (\hat{\chi}(\omega_{p-q}) - Sp(\hat{\chi}(\omega_{p-q})) \hat{1}) \mathbf{h}_q) \hat{\chi}(\omega_p) \hat{\chi}(\omega_{p-q-r}) \hat{e} \times \mathbf{h}_s + \\ & + (\mathbf{h}_r, \mathbf{h}_q) \hat{\chi}(\omega_p) \hat{\chi}^{**}(\omega_{p-q}) \hat{\chi}(\omega_{p-q-r}) \hat{e} \times \mathbf{h}_s - (\mathbf{h}_q (\hat{\chi}^{**}(\omega_{p-q}) - Sp(\hat{\chi}(\omega_{p-q})) \hat{1})) \times \\ & \times \hat{\chi}(\omega_{p-q-r}) \hat{e} \times \mathbf{h}_s) \hat{\chi}(\omega_p) \mathbf{h}_r - (\mathbf{h}_q, \hat{\chi}(\omega_{p-q-r}) \hat{e} \times \mathbf{h}_s) \hat{\chi}^{**}(\omega_{p-q}) \hat{\chi}(\omega_p) \mathbf{h}_r. \end{aligned}$$

Кроме того, должно выполняться  $s+r+q=p$ . Частичное суммирование здесь также имеет смысл сложения вкладов от всех возможных переходов на диаграммах рис. 1. В приведенных формулах (а, б) — скалярное произведение двух векторов;  $Sp(\hat{\chi})$  — шпур матрицы, описывающей тензор  $\hat{\chi}$ ;  $\hat{\chi}^{**}$  — тензор, описываемый матрицей, транспонированной по отношению к  $\hat{\chi}$ .

В заключение необходимо отметить следующее. Приведенные выше рекуррентные формулы позволяют получить выражение для всех компонент нелинейных тензоров магнитной проницаемости сколь угодно высокого ранга. В то же время эти формулы, структура которых поддается диаграммному описанию, в принципе дают возможность рассчитывать на ЭВМ нелинейный отклик ферромагнитной пленки на внешнее воздействие в высоких порядках теории возму-

щений, не прибегая к помощи громоздких окончательных выражений. Таким образом, в данной работе, в частности, проведен анализ структуры и дана количественная оценка дополнительных магнитных полей на нулевой частоте, наводимых спиновой волной за счет нелинейности магнитной проницаемости. В некоторых случаях, как показано выше, вообще удается просуммировать ряд возмущений полностью.

С другой стороны, введение в полном объеме понятия материального тензора, учитывающего временную и пространственную дисперсию, а также нелинейные свойства среды, по существу означает, что спиновые и магнитостатические волны рассматриваются как один из видов электромагнитных волн (в терминологии [12] кулоновских экситонов) с использованием традиционного в этом случае математического аппарата. Это делает возможным непосредственное перенесение идей и методов, развитых в нелинейной электродинамике и оптике [4, 13], в область физики нелинейных волновых процессов в ферромагнитных пленках.

#### Список литературы

- [1] Калинин Б. А., Ковшиков Н. Г., Славин А. Н. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 2. С. 159—170.
- [2] Преображенский В. Л., Фетисов Ю. К. // Изв. вузов. Физика. 1988. Т. 31. № 11. С. 54—66.
- [3] Моносов А. Я. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971. 376 с.
- [4] Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. Итоги науки. М., 1962, 1963.
- [5] Бломберген Н. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966. 410 с.
- [6] Shi L. // JAP. 1988. Vol. 63. N 8. P. 3244—3243.
- [7] Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск: Наука и техника, 1978. 350 с.
- [8] Калинин Б. А. // Изв. вузов. Физика. 1981. Т. 24. № 8. С. 42—51.
- [9] Berry M. V. The Diffraction of Light by Ultrasound. AP. 1966.
- [10] Сташкевич А. А. // Опт. и спектр. 1978. Т. 45. Вып. 5. С. 967—973.
- [11] Сташкевич А. А., Калинин Б. А., Ковшиков Н. Г. и др. // Письма в ЖТФ. 1987. Т. 13. Вып. 1. С. 49—53.
- [12] Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., 1976. 520 с.
- [13] Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В. Прикладная нелинейная оптика. М., 1982. 352 с.

Ленинградский электротехнический институт  
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступило в Редакцию  
8 января 1990 г.