01

ПРОСТАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЕМКОСТИ КОЛЬЦЕВОГО КОНДЕНСАТОРА, УЧИТЫВАЮЩАЯ КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ

В. А. Шелюто

С помощью метода средних потенциалов получено приближенное выражение для емкости плоского кольцевого конденсатора, пригодное в широкой области изменения геометрических размеров. Найдена функциональная зависимость емкости конденсатора от его геометрических параметров. Предложена простая формула для практического вычисления емкости.

Асимптотическое значение емкости C плоского конденсатора при стремлении к нулю отношения расстояния h между пластинами к характерному размеру пластин $\sqrt{S}$ общеизвестно $C \simeq S/4\pi h \equiv C_0$. При малых значениях параметра $\varepsilon = h/\sqrt{S}$ истинная емкость C отличается от асимптотики C_0 на величину относительного порядка ε. Указанная поправка усилена большим значением логарифма $\ln(1/\varepsilon)$ [1], так что в первом порядке по ε имеем равенство

$$C \simeq C_0 \cdot \left[1 + k \cdot \varepsilon \cdot \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} + \chi\right)\right], \tag{1}$$

в котором коэффициенты k и χ не зависят от h.

Решив соответствующую краевую задачу, можно было бы в принципе получить значения потенциалов на пластинах (при заданных зарядах $\pm Q$), и, следовательно, найти коэффициенты k и χ. Точное аналитическое решение данной краевой задачи возможно, однако, лишь для ряда простейших систем, в большинстве же случаев приходится прибегать к численным методам, не позволяющим проследить функциональную зависимость емкости от геометрических параметров.

Приближенное аналитическое выражение для емкости можно получить с помощью метода средних потенциалов (метода Хоу). Данный метод основан на том, что электрическая емкость, будучи интегральной величиной, слабо зависит от закона распределения заряда на пластинах конденсатора. Это позволяет заменить равновесную плотность заряда $\sigma(r)$ равномерной плотностью $\sigma_0 = \mathrm{const}$, сведя тем самым исходную задачу к вычислению ряда поверхностных интегралов (подробно метод Хоу изложен, например, в [2]).

Ниже с помощью метода средних потенциалов вычисляется емкость плоского конденсатора, имеющего электроды в виде двух одинаковых коаксиальных колец. Достаточно точные численные значения емкости такого конденсатора в широком диапазоне изменения параметров были получены в работе [3]. Предложенный в [3] метод обладает хорошей сходимостью, однако не в полной мере раскрывает параметрическую зависимость емкости конденсатора от его геометрических размеров.

Нахождение емкости конденсатора C по методу Хоу удобно начинать с вычисления собственных емкостей пластин C_{11} и C_{22} и взаимной емкости $C_{12} = C_{21}$.

Емкость C затем выражается через емкостные коэффициенты с помощью известного соотношения

$$\frac{1}{C}=C_{11}^{-1}-2\cdot C_{12}^{-1}+C_{22}^{-1}. \qquad (2)$$

Коэффициент взаимной емкости C_{12} двух одинаковых концентрических колец (с наружным радиусом a и внутренним радиусом $0\leqslant b\leqslant a$) в приближении Хоу равен

$$C_{12}^{-1}(h)=\frac{1}{S_0^2}\cdot[I_{aa}(h)-2I_{ab}(h)+I_{bb}(h)], \qquad (3)$$

где интеграл $I_{ab}(h)$ определен следующим образом:

$$I_{ab}(h)=2\pi\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}dr r\int\limits_0^{b}d\rho\rho\cdot(h^2+r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi)^{-1/2}. \qquad (4)$$

Квадрат площади $S_0=\pi(a^2-b^2)$ в знаменателе выражения (3) соответствует равномерному распределению заряда на пластинах с плотностью $\pm Q/S_0$.

Вспомогательный интеграл $I_{ab}(h)$ пропорционален энергии взаимодействия двух коаксиальных равномерно заряженных дисков радиусов a и b, разнесенных на расстояние h. Интегралы подобного типа вычислялись в работах [4, 5], поэтому приведем лишь окончательный ответ

$$\frac{I_{ab}(h)}{2\pi}=-\frac{\pi}{2}\cdot h(a^2+b^2)+h(a-b)^2\sqrt{1-n}\cdot\Pi(n,\ q)+F_{ab}(h). \qquad (5)$$

Здесь

$$F_{ab}(h)=\frac{1}{3}\sqrt{h^2+(a+b)^2}\cdot\{[2(a^2+b^2)-h^2]\cdot E(q)+[h^2+2(a-b)^2]\cdot K(q)\}, \qquad (6)$$

а $K(q)$, $E(q)$ и $\Pi(n, q)$ — полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего родов соответственно [6], зависящие от параметров

$$q^2=\frac{4ab}{h^2+(a+b)^2},\qquad n=\frac{(a+b)^2}{h^2+(a+b)^2}. \qquad (7)$$

Положив в равенствах (3) и (5) расстояние $h=0$, найдем коэффициенты собственной емкости колец

$$C_{11}^{-1}=C_{22}^{-1}=C_{12}^{-1}(0)=\frac{2\pi}{S_0^2}\cdot[F_{aa}(0)-2F_{ab}(0)+F_{bb}(0)]. \qquad (8)$$

Выражение (8) (с учетом определения (6)) после преобразования Ландена [6] совпадает с аналогичным выражением, полученным в работе [7].

С учетом соотношений (2), (3) и (5)—(8) имеем следующую формулу для определения емкости кольцевого конденсатора:

$$\frac{1}{C}=\frac{4\pi}{S_0^2}\cdot\{2h\cdot(a-b)^2\cdot\sqrt{1-n}\cdot\Pi(n,\ q)+2\cdot[F_{ab}(h)-F_{ab}(0)]-$$

$$-[F_{aa}(h)-F_{aa}(0)]-[F_{bb}(h)-F_{bb}(0)]\}. \qquad (9)$$

В частном случае $b=0$ выражение (9) воспроизводит известную формулу [8, 9]

$$\frac{1}{C_a}=\frac{4h}{a^2}+\frac{32}{3\pi a}\cdot\left[1-\frac{1-q_a^2}{q_a^3}\cdot K(q_a)+\frac{1-2q_a^2}{q_a^3}\cdot E(q_a)\right] \qquad (10)$$

для емкости кругового плоского конденсатора, в которой $q_a^2=4a^2/(h^2+4a^2)$. В пределе $h/a\to 0$ получаем

$$C_a\simeq\frac{\pi a^2}{4\pi h}\cdot\left[1-\frac{h}{\pi a}\cdot\left(\ln\frac{8a}{h}-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}. \qquad (11)$$

Заметим, что выражение (11) содержит неаналитическую зависимость от малого параметра h/a, поэтому оно не может быть получено разложением в ряд подынтегральной функции $(h^2+r^2+\rho^2-2r\rho\cos\varphi)^{-1/2}$ в интеграле (4).

Сопоставляя равенства (1) и (11), находим, что для кругового конденсатора $k=1/\pi$ и $\chi(0)=\ln 8-1/2$. Точное (в пределе $h/a\to 0$) выражение для емкости такого конденсатора [1], полученное Кирхгофом, отличается лишь значением константы χ. Так как в методе средних потенциалов распределение заряда на поверхностях пластин предполагается равномерным, то ведущий логарифмический вклад $(h/\pi a)\cdot\ln(a/h)$ имеет чисто геометрическое происхождение и не связан с законом распределения заряда (ср. с решением задачи II [1, § 3]). Неоднородность плотности заряда $\sigma(r)$ отражается лишь на значении коэффициента χ.

Получим теперь формулу для емкости кольцевого конденсатора в случае, когда расстояние между пластинами мало́. Для этого перейдем в выражении (9) к пределу $h/(a+b)\simeq\sqrt{1-n}\to 0$. Используя разложение эллиптического интеграла третьего рода $\Pi(n, q)$ по малому параметру $1-n$, найденное в Приложении (формула (П. 5)), для первого слагаемого в фигурных скобках (9), имеем

$$2h(a-b)^2\cdot\sqrt{1-n}\cdot\Pi(n, q)\simeq\pi h\cdot|a^2-b^2|+ \\ +\frac{2h^2}{a+b}\cdot[(a-b)^2\cdot K(q)-(a+b)^2\cdot E(q)]. \tag{12}$$

Отметим, что именно это слагаемое дает асимптотику емкости при $h\to 0$: $1/C\simeq(4\pi/S_0^2)\cdot\pi h(a^2-b^2)=4\pi h/S_0$. Если, кроме того, ширина кольцевых электродов много больше расстояния между пластинами ($(a-b)^2\gg h^2$), то остальные слагаемые в выражении (9) тоже упрощаются. В первом порядке по $h/(a-b)$ емкость равна

$$C\simeq\frac{S_0}{4\pi h}\cdot\left\{1-\frac{h}{\pi(a-b)}\cdot\left[2E(q_0)-2\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\cdot K(q_0)+\frac{a}{a+b}\ln\frac{8a}{h}+\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{b}{a+b}\ln\frac{8b}{h}-\frac{1}{2}\right]\right\}^{-1}, \tag{13}$$

где $q_0^2=4ab/(a+b)^2$.

Дальнейшее упрощение формулы (13) возможно при условии выполнения неравенства $(a+b)^2\gg(a-b)^2\gg h^2$ (конденсатор с пластинами в виде узких колец, причем расстояние между ними много меньше их ширины)

$$C\simeq\frac{S_0}{4\pi h}\cdot\left\{1-\frac{h}{\pi(a-b)}\cdot\left[\ln\frac{a-b}{h}+\frac{3}{2}\right]\right\}^{-1}. \tag{14}$$

Из (14) можно получить аналогичную формулу для емкости на единицу длины (в приближении Хоу) плоского волновода с пластинами одинаковой ширины d. Для этого достаточно разделить выражение (14) на $2\pi a$ и устремить отношение $d/a=(a-b)/a$ к нулю.

Формула (13) отличается от (14) лишь заменой

$$\frac{3}{2}\to\chi(b/a)\equiv 2\cdot E(q_0)-2\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\cdot K(q_0)+\frac{a}{a+b}\ln\frac{8a}{a-b}+\frac{b}{a+b}\ln\frac{8b}{a-b}-\frac{1}{2}. \tag{15}$$

Функция $\chi(b/a)$ близка к постоянной $\chi(0)=\ln 8-1/2\simeq 3/2+0.079$, $\chi(1)=3/2$. На всем интервале изменения аргумента $0\leqslant b/a\leqslant 1$ отклонение значений $\chi(b/a)$ от $3/2$ не превышает ± 5 %. Последнее позволяет продолжить формулу (14) за пределы исходной области применимости $(a+b)^2\gg(a-b)^2$ вплоть до $b=0$. Роль малого параметра играет величина $h/(a-b)$, поэтому формула (14) правильно описывает функциональную зависимость емкости конденсатора от его геометрии при расстояниях h, меньших (или даже порядка) характерного расстояния $a-b$. Сравнивая значения емкости C, полученные по формуле (14), с численными значениями C_N из работы [3], видим, что их разность $\Delta C=C_N-C$ при $h<(a-b)$ не превышает 10 %. Так как метод средних потенциалов дает заниженное значение емкости [2], то разность ΔC всегда положительна.

Погрешность определения емкости по формуле (14) при $h \sim (a-b)$ можно несколько снизить, заменив в ней константу $3/2$ на соответствующим образом подобранную константу $\bar{\chi}$ (из неравенства $\Delta C > 0$ следует $\bar{\chi} > 3/2$). Поправка к емкости, связанная с такой заменой, имеет относительный порядок $(\bar{\chi} - 3/2) \times \times [h/(a-b)]$, поэтому она наиболее существенна при $h \sim (a-b)$. Желая сохранить знак разности ΔC и одновременно максимально упростить выражение для C, можно, например, положить $\bar{\chi} = 3/2 + (\ln \pi - 1)$. В результате получим простую формулу для емкости

$$C \simeq \frac{C_0}{1 - \gamma \cdot \ln(1/\gamma) - \gamma/2}, \tag{16}$$

в которой $\gamma \equiv h/\pi(a-b)$, а $C_0 = (a+b)/4\pi\gamma$ (в СИ $(a+b)/\gamma$) — емкость плоского конденсатора без учета краевых эффектов. Формула (16) вполне пригодна для инженерных расчетов, ее погрешность при $\gamma \leqslant 0.1$ менее 3 %, а при $\gamma \leqslant 1/\pi$ — менее 9.5 %. Во всем интервале $0 \leqslant \gamma \leqslant 1/\pi$ значения емкости, найденные по формуле (16), не превышают истинных значений.

Приложение

Получим разложение эллиптического интеграла третьего рода $\Pi(n, q)$ [6] в ряд по малому параметру $1-n$. Вводя дополнительное интегрирование по z, представим $\Pi(n, q)$ в виде

$$\Pi(n, q) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - n \cdot \sin^2\theta} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1 - q^2 \cdot \sin^2\theta} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dz}{nz^2 + n - q^2} \cdot \left\{ \frac{n}{\sqrt{1-n}} - \frac{q^2}{\sqrt{z^2+1} \cdot \sqrt{z^2+1-q^2}} \right\}. \tag{П. 1}$$

Сингулярным при $n \to 1$ является лишь первое слагаемое в фигурных скобках (П. 1). После интегрирования по z оно дает ведущий вклад

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{n-q^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-n}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-n}}$$

в $\Pi(n, q)$.

При условии

$$\frac{1-n}{1-q^2} < 1 \tag{П. 2}$$

знаменатель $n \cdot z^2 + n - q^2)$ в (П. 1) можно разложить в ряд

$$\frac{1}{n(z^2 + 1 - q^2) - q^2(1-n)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^{2l} \cdot (1-n)^l}{n^{l+1}(z^2+1-q^2)^{l+1}}. \tag{П. 3}$$

Для n и q^2, определенных согласно (7), условие (П. 2) заведомо выполняется, так как указанное отношение равно $h^2/[h^2 + (a-b)^2]$.

Подставив (П. 2) в (П. 1) и выполнив интегрирование по z, найдем искомое представление

$$\Pi(n, q) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{n-q^2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{1-n}} - \sum_{l=0}^{\infty} (1-n)^l \cdot \frac{(2q^2/n)^{l+1}}{(2l+1)!!} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial q^2}\right)^{l+1} K(q). \tag{П. 4}$$

Удерживая в сумме (П. 4) лишь слагаемое $l = 0$, получим

$$\Pi(n, q) \simeq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n}{n-q^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-n}} + \frac{1}{n} \cdot \left[K(q) - \frac{E(q)}{1-q^2} \right]. \tag{П. 5}$$

Выражение (П. 5) содержит наряду со слагаемыми порядка $1/\sqrt{1-n}$ и 1 также часть слагаемых порядка $1-n$ (что является превышением точности), однако подобная запись иногда более удобна. Так, для n и q^2 из (7) коэффициент перед $1/\sqrt{1-n}$ не зависит от h.

В заключение приведем формулу для производной полного эллиптического интеграла третьего рода по параметру h, справедливую только для конкретных n и q^2, определенных равенствами (7),

$$h \cdot \frac{\partial}{\partial h} \Pi(n, q) = -n \cdot \Pi(n, q) + K(q) - \frac{E(q)}{1-q^2}. \tag{П. 6}$$

Список литературы

[1] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[2] *Иоссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Г.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 288 с.
[3] *Мейерова Р. С., Фридберг П. Ш.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 2. С. 364—367.
[4] *Шелюто В. А.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 7. С. 198—201.
[5] *Shelyuto V. A.* // Zeitschrift für ang. Math. und Phys. (ZAMP). 1989. Vol. 40. N 4. P. 608—612.
[6] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.
[7] *Иоссель Ю. Я.* // Электричество. 1982. № 11. С. 66—69.
[8] *Игнатовский В. С.* // Тр. физико-математического института им. Стеклова. 1932. Т. 2, № 3. С. 1—15.
[9] *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 334 с.

Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева
Ленинград

Поступило в Редакцию
11 сентября 1989 г.
В окончательной редакции
5 марта 1990 г.