

01; 04

© 1991 г.

РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ ПЛАЗМА—ВАКУУМ В ПРЕДЕЛЕ БОЛЬШОГО ЛАРМОРОВСКОГО РАДИУСА

А. Л. Великович

В рамках одножидкостной холловской идеальной МГД модели исследована рэлей-тейлоровская неустойчивость границы между плазмой и поддерживающим ее в поле тяжести магнитным полем в вакуумной области. Рассматриваются желобковые возмущения с $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = 0$. Показано, что в этих условиях существует глобальная мода рэлей-тейлоровской неустойчивости с инкрементом $\gamma = (gk)^{1/2}$, которая, однако, является доминирующей только при $\gamma \leq \Omega_i$, где Ω_i — ларморовская частота ионов. Найдена точная оценка сверху $\gamma = \gamma_{\max}(k)$ для инкремента наиболее быстрой моды неустойчивости при данном k . Для больших k $\gamma_{\max}(k) = gk/\Omega_i$.

Предметом активных исследований стала в последнее время рэлей-тейлоровская (РТ) неустойчивость, развивающаяся в условиях, когда ларморовский радиус ионов ρ_i не мал по сравнению с характерным масштабом задачи L (см., например, [1-4]). Такие условия реализуются в экспериментах, где движение и (или) расширение плазмы тормозятся сильным магнитным полем [5, 6]. Эффекты конечного ларморовского радиуса могут существенно повлиять на устойчивость имплозии Z- и θ -пинчей, на устойчивость плотных пинчей, инициируемых дейтериевыми нитями, и т. д.

Рэлей-тейлоровская неустойчивость в пределе большого ларморовского радиуса $\rho_i \gg L$, $\omega \gg \Omega_i$ (Ω_i — ларморовская частота ионов, ω — характерная частота задачи) изучалась в [1, 3, 4]. Было показано, что инкремент неустойчивости γ при больших k растет пропорционально k , т. е. гораздо быстрее корневой зависимости, характерной для классической РТ неустойчивости. Этот вывод подтвержден результатами двумерного численного расчета [4].

В настоящей работе рассматривается в указанном пределе неустойчивость границы плазма—вакуум. Плазма находится в гравитационном поле с постоянным ускорением g , направленным вниз по оси z , занимает верхнее полупространство $z > 0$ и поддерживается снизу давлением магнитного поля \mathbf{B} , направленного по оси y ($B_y = B_y(z)$; в нижнем полупространстве $B_y = \text{const}$). Мы рассматриваем наиболее опасные желобковые возмущения поверхности с $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = 0$, т. е. волновой вектор возмущения \mathbf{k} направлен по оси x . В обычной магнитной гидродинамике инкремент основной (глобальной) моды РТ неустойчивости в данном случае дается классическим выражением

$$\gamma(k) = (gk)^{1/2} \quad (1)$$

и не зависит ни от невозмущенных профилей плотности, давления, магнитного поля в плазме, ни от уравнения состояния плазмы [7, 8].

При изучении той же задачи в пределе большого ларморовского радиуса естественным образом возникают следующие вопросы: существует ли теперь глобальная РТ мода, сохраняются ли ее свойства? Если она не является основной, то как оценить максимальное значение инкремента при данном k ? Являются ли эффекты большого ларморовского радиуса, в первую очередь эффект Холла, всегда дестабилизирующими или же они могут быть и стабилизирующими.

щими в зависимости, например, от невозмущенных профилей (ср. [2, 9])? Расчет инкремента РТ неустойчивости для «ступеньки» плотности в [4] при значении числа Атвуда $A=1$ (граница плазма—вакуум) дает формулу (1), как это согласуется с выводом о линейном росте инкремента с увеличением k ? Ответы на перечисленные вопросы даны в настоящей работе.

В [3] показано, что плазму в данном пределе можно описывать одножидкостной холловской моделью, отличающейся от идеальной МГД модели лишь последним членом справа в уравнении индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{m_i c}{e} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) = \text{rot} \left(\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en_i} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right), \quad (2)$$

где \mathbf{u} — массовая скорость плазмы, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, m_i — масса иона, n_i — плотность числа ионов (предполагается $n_i = n_e$), \mathbf{j} — плотность тока.

Названный дополнительный член описывает генерацию магнитного поля за счет завихренности движения плазмы и возникает благодаря эффекту Холла (см. (2) в [3]).

Поскольку в невозмущенном состоянии плазма неподвижна, то \mathbf{u} в (2) — поле возмущений скорости. Известно [7, 8], что глобальной РТ моде отвечают безвихревое (потенциальное) и бездивергентное поля скоростей \mathbf{u} . Значит, холловский член в (2) для таких возмущений тождественно обращается в нуль и все результаты МГД теории относительно глобальной РТ моды с инкрементом (1) сохраняют силу. Теперь, однако, эта мода РТ неустойчивости не обязательно доминирует.

В дальнейшем мы ограничимся наиболее практически важным предельным случаем холодной плазмы, считая давление магнитного поля $B^2/8\pi$ много больше как теплового давления плазмы, так и гидростатического давления $m_i n_i g h$ слоя плазмы характерной высоты $h = g/\Omega_i^2$. В этом случае можно пренебречь изменением магнитного поля вблизи границы и свести систему уравнений для возмущений к одному уравнению второго порядка [4]

$$\frac{d}{dz} \left[n_0(z) \frac{dV}{dz} \right] - k^2 \left[n_0(z) + \frac{1}{k} D \frac{dn_1}{dz} \right] V = 0, \quad (3)$$

где $n_0(z)$ — невозмущенный профиль плотности, $V = u_y - i(\omega/\Omega_i) u_x$, временная зависимость возмущения принята в виде $\exp(-i\omega t)$ (т. е. инкремент $\gamma = \text{Re } \omega$),

$$D = (\omega^2/\Omega_i + gk/\omega)(\omega + gk/\Omega_i)^{-1}. \quad (4)$$

Мы рассматриваем невозмущенные профили плотности, непрерывные при $z=0$, т. е. удовлетворяющие условию

$$n_0(z=0) = 0. \quad (5)$$

Граничные условия отвечают требованиям исчезновения возмущения V при $z \rightarrow \infty$ и регулярности V в особой точке $z=0$ уравнения (3). Нетрудно показать, что непрерывность нормальной компоненты магнитного поля на возмущенной поверхности при этом обеспечивается автоматически за счет геометрии задачи, а непрерывность давления — за счет (5).

Рассмотрим сперва семейство профилей плотности вида

$$n_0(z) = \bar{n}(z/L)^s, \quad s > 0. \quad (6)$$

Собственные функции данной краевой задачи есть

$$V_n(z) = e^{-kz} L_n^{(s-1)}(2kz), \quad (7)$$

где $n=0, 1, 2, \dots$ — номер моды возмущения, $L_n^\alpha(x)$ — обобщенный полином Лагерра.

Собственные значения ω определяются из кубического уравнения

$$D = -(1 + 2n/s) \equiv -\mu_n. \quad (8)$$

Очевидно, номер $n=0$ соответствует глобальной РТ моде, для которой ни собственная функция (7), ни собственное значение (8), отвечающее инкременту (1), не зависят от s , как и должно быть. Для всех мод асимптотики инкрементов при больших и малых k имеют вид

$$\gamma(k) \sim \begin{cases} \mu_n^{-1/2} (gk)^{1/2}, & k \ll \Omega_n^2/g, \\ \mu_n^{1/2} (gk)^{1/2}, & k \gg \Omega_n^2/g. \end{cases} \quad (9)$$

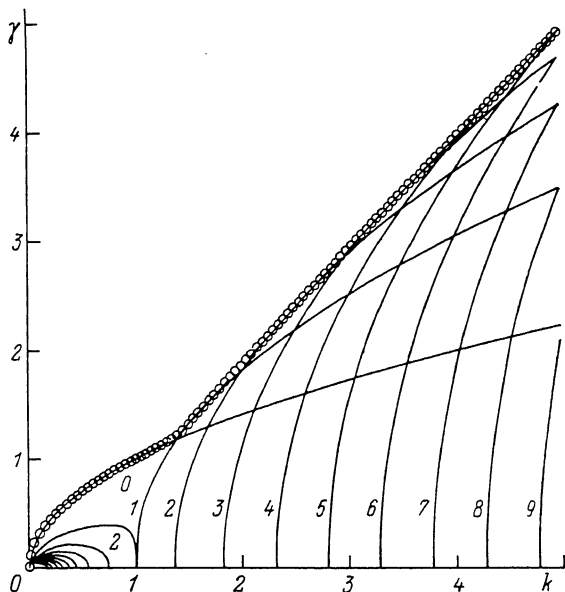
Для мод с $n > s$ дисперсионные кривые $\gamma(k)$ состоят из двух ветвей, разделенных «полосой устойчивости», в пределах которой инкремент обращается в нуль и соответствующая собственная мода отвечает не неустойчивости, а бегущей гравитационно-дрейфовой волне [3]. При $n \gg s$ границы этой полосы оцениваются как

$$2s/n < gk/\Omega^2 < n/2s. \quad (10)$$

Однако при любых значениях k , в том числе и отвечающих стабилизации отдельных мод, имеет место глобальная РТ мода, т. е. максимальный инкремент не может быть меньше (1), а потому эффект большого ларморовского радиуса в целом является только дестабилизирующим.

Первые 10 дисперсионных кривых $\gamma(k)$ для мод с номерами $n=0, 1, \dots, 9$ при $s=1$ показаны на рисунке. Поскольку инкремент зависит не от s и n в отдельности, а от их комбинации μ_n (см. (8)), то кривые того же вида отвечают и другим значениям n и s . Так, при

Сплошные линии — дисперсионные кривые $\gamma(k)$ для мод с номерами $n=0, 1, \dots, 9$ при $s=1$ (γ выражается в единицах Ω_n^2 , k — в единицах Ω_n^2/g). Левые, не обозначенные ветви кривых 3—9 последовательно вложены друг в друга. Кружки представляют кривую (11) $\gamma = \gamma_{\max}(k)$.



$s=1/2$ кривые с четными номерами 2, ..., 8 отвечают модам с $n=1, \dots, 4$; напротив, для $s=2$ кривые 1, ..., 9 отвечают четным модам с номерами $n=2, \dots, 18$, между которыми лежат дисперсионные кривые, отвечающие нечетным номерам мод. Чем меньше s , тем реже лежат на плоскости (k, γ) дисперсионные кривые. В пределе «ступеньки» плотности $s \rightarrow 0$ для каждого конечного k в согласии с [4] остается только глобальная РТ мода с $n=0$, следующая мода с номером $n=1$ конкурирует с нею только при $k > \Omega_1^2/2gs \rightarrow \infty$ (см. (10)). Напротив, чем больше s , тем более густо заполняют дисперсионные кривые ту же область плоскости (k, γ) . Естественно построить для этого однопараметрического семейства кривых их общую границу сверху $\gamma = \gamma_{\max}(k)$. Можно показать, что

$$\gamma_{\max}(k) = \begin{cases} (gk)^{1/2}, & k \leq \Omega_0^2/g, \\ F(k), & k > \Omega_0^2/g, \end{cases} \quad (11)$$

где $F(k)$ — огибающая данного семейства кривых, определяемая из соотношения $\partial\gamma/\partial\mu=0$, причем μ в (8) предполагается теперь непрерывным параметром, пробегающим при данном k все допустимые значения от 1 до ∞ .

Каждому k отвечает некоторое значение $\mu = \mu_m(k)$ в этом диапазоне, при котором инкремент γ достигает максимального возможного значения $F(k)$. Огибающая $F(k)$ ответвляется от кривой (1) при $\gamma_{\max} = \Omega_0^2$, причем в этой точке вторая производная комбинированной кривой $\gamma_{\max}(k)$ разрывна. Как видно из рисунка,

функция $F(k)$ при больших k линейна, можно показать, что в пределе $k \gg \gg \Omega_i^2/g$

$$\gamma_{\max}(k) = gk/\Omega_i. \quad (12)$$

Кривая (11) не является дисперсионной, но дисперсионные кривые проходят очень близко к ней, коль скоро профиль плотности при $z \rightarrow 0$ не является слишком резким (см. рисунок), а потому (11), (12) — точные, наилучшие оценки сверху инкремента доминирующей при данном k моды РТ неустойчивости. Номер этой моды растет вместе с k ($\mu_m(k) \sim 2 gk/\Omega_i^2$ при больших k), чем и объясняется линейное нарастание $\gamma_{\max}(k)$ при корневой асимптотике (9) для каждой отдельно взятой моды.

Покажем теперь, что построенная кривая (11) дает решение задачи об оценке сверху максимального инкремента не только для семейства профилей (6), но и для любых непрерывных профилей. Для этого рассмотрим произвольный профиль $n_0(z)$, удовлетворяющий (5), и соответствующую краевую задачу, формулируемую уже в рамках идеальной МГД модели для несжимаемой жидкости. Уравнение для вертикальной компоненты скорости имеет вид (3) с заменой D на gk/ω^2 (предел (4) при $\omega/\Omega_i \rightarrow 0$), граничные условия не изменяются [7, 8]. Данная задача является уже самосопряженной, поэтому собственные значения ω^2 действительны. Неустойчивые собственные моды отвечают отрицательным значениям $\omega^2 = -\gamma^2$, причем можно показать [10], что инкременты в МГД задаче удовлетворяют неравенству $\gamma^2 \leq gk$. Значит, в исходной задаче для того же профиля $n_0(z)$ при любом k собственное значение $D = -\mu$ действительно, $\mu \geq 1$. Если для данного невозмущенного профиля плотности при заданном k существуют собственные моды, отвечающие $\mu > \mu_m(k)$, то соответствующие дисперсионные кривые касаются огибающей $F(k)$, заданной (11), в противном случае они проходят ниже нее. Простой пример ситуации, когда значения инкремента (11) не достигаются, дает рассмотрение семейства профилей

$$n_0(z) = \bar{n}(z/L)^s \exp(z/l) \quad (13)$$

при $l < 4g/\Omega_i^2$. Так же, как и выше, находим, что соответствующая верхняя граница для инкрементов при больших k является линейной функцией, причем коэффициент перед k отличается от (12) меньшим множителем $(8q-1)^{1/2}/4q$, где $q = g/\Omega_i^2 l$.

Очевидно, в любом случае формулы (11), (12) дают оценку сверху для инкремента доминирующей при данном k моды неустойчивости. Таким образом, мы показали универсальный характер этих выражений. Отметим, что принятый здесь подход предполагает выполнение неравенства $\gamma \gg \Omega_i$ [1, 3, 4], поэтому строго обоснованной является только асимптотика (12). Тем не менее, данная теория дает разумные результаты и вне области своей формальной применимости, в противоположном пределе $\gamma \ll \Omega_i$. Более того, в конечном интервале инкрементов $\gamma \leq \Omega_i$, воспроизводится результат стандартной теории (1). Поэтому оценкой (11) фактически можно пользоваться во всем диапазоне волновых чисел k .

Автор благодарен М. А. Либерману за полезное обсуждение.

Список литературы

- [1] *Huba J. D., Lyon J. G., Hassam A. B.* // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 52. P. 2971—2974.
- [2] *Sanghvi R. K., Chhajlani R. K.* // Astrophys. Space Sci. 1987. Vol. 132. P. 57—65.
- [3] *Hassam A. B., Huba J. D.* // Phys. Fluids. 1988. Vol. 31. P. 318—325.
- [4] *Huba J. D., Hassam A. B., Satyanarayana P.* // Phys. Fluids B. 1989. Vol. 1. P. 931—941.
- [5] *Ripin B. H., McLean E. A., Manka C. K. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. P. 2299—2302.
- [6] *Bernhardt P. A., Roussel-Dupré R. A., Pongratz M. B. et al.* // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92. P. 5777—5786.
- [7] *Иногзов Н. А.* // ПМТФ. 1985. N 5. С. 110—116.
- [8] *Будько А. Б., Великович А. Л., Либерман М. А. и др.* // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. С. 140—162.
- [9] *Coppins M., Bond D. J., Haines M. G.* // Phys. Fluids. 1984. Vol. 27. P. 2886.
- [10] *Munro D. H.* // Phys. Rev. A. Vol. 38. P. 1433—1445.