

01; 03

© 1991 г.

ЗАКОНОМЕРНОСТИ РЭЛЕЕВСКОГО РАСПАДА
ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

А. И. Григорьев, С. О. Ширяева

Из требования экстремальности изменения собственной потенциальной энергии изолированной, заряженной выше Рэлеевского предела капли идеально проводящей идеальной несжимаемой жидкости найдены размеры, заряды, удельные заряды и общее количество дочерних капелек, выбрасываемых при развитии неустойчивости в исходной капле. Показано, что дочерние капельки изначально неустойчивы по отношению к собственному заряду и также распадаются, выбрасывая еще более мелкие и также неустойчивые. Рассчитаны функции распределения вторичных и третичных капель по размерам. Показана невозможность деления за счет электростатических сил сильно заряженной сферической капли на две равные части. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными экспериментов других авторов.

Введение

В различных задачах технической физики — от создания жидкометаллических источников ионов, ионных коллоидных реактивных двигателей, жидкометаллической эпитаксии до разработки устройств электрокапельструйной печати и теории грозового электричества [1-5] приходится иметь дело с явлением неустойчивости сильно заряженных капель по отношению к собственному заряду, исследования которого были начаты еще Рэлеем [6].

Рэлей связал явление неустойчивости сильно заряженной капли идеальной проводящей несжимаемой жидкости с неустойчивостью капиллярных волн бесконечно малой амплитуды, существующих в капле уже в силу наличия теплового движения молекул. Представив каплю в качестве колебательной системы с бесконечным числом степеней свободы и рассматривая амплитуды отдельных мод капиллярных волн в качестве обобщенных координат, он в приближении малости амплитуд по сравнению с радиусом капли выписал систему несвязанных уравнений Лагранжа для различных мод, из которой сразу же следовали условия неустойчивости капиллярных колебаний n -й моды в виде

$$4W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} \geq (n+2).$$

Здесь Q и R — заряд и радиус капли, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Следует отметить, что ввиду важности работы [6] и крайней лаконичности ее языка она была повторена и напечатана в гораздо более подробном виде в начале 60-х годов [7]. Тогда же Тейлором [8] был предложен новый метод расчета критических условий устойчивости заряженной капли на основе баланса давлений на полюсах сферической капли, так как в то время уже было экспериментально установлено, что в момент потери устойчивости капля вытягивается в фигуру вращения, близкую к сфероиду, а затем начинает эмитировать высокодисперсные микрокапельки, сбрасывая избыточный заряд. К сожалению, работа Тейлора носила лишь частный характер и в ряде существенных моментов была ошибочна. Так, Тейлор высказал предположение, что выступы, образующиеся на вершинах капли при развитии в ней неустойчивости, имеющие почти коническую форму, с которых собственно и происхо-

дит эмиссия высокодисперсных капелек, уносящих избыточный заряд, являясь равновесными образованиями. На основе этого предположения он вычислил поверхностную плотность электрического заряда на коническом выступе, которая убывала вдоль образующей конуса по мере удаления от вершины $\sim 1/\sqrt{r}$ (где r — радиальная координата). Ввиду большого авторитета Тейлора в научном мире с тех пор представления о равновесных конических эмиттирующих выступах стали широко использоваться при оценках в работах по теории жидкометаллических источников ионов, жидкостной масс-спектрометрии и т. д. (см., например, [9]). На самом же деле, как показано в [10, с. 31], поверхностная плотность заряда на коническом выступе убывает по мере удаления от его вершины $\sim 1/r$. Противоречие с результатами Тейлора указывает на ошибочность предположения о равновесности конических эмиттируемых выступов (на что ранее неоднократно обращалось внимание [11, 12]).

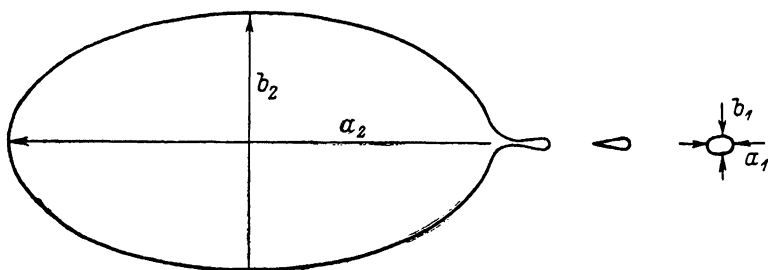


Рис. 1. Схема эмиссии дочерних капелек неустойчивой по Рэлею исходной каплей на финальной стадии развития неустойчивости.

Кроме того, Тейлор на основе поверхностных впечатлений подверг незаслуженной критике идею расчета, проведенного Рэлеем, и полученный им критерий (1). Основанием для критики послужило обстоятельство, что, согласно (1), в капле заданных размеров, имеющей заряд Q_* , критический для развития неустойчивости моды с $n=2$, моды с более высокими номерами остаются устойчивыми. В этом случае трудно объяснить феноменологию неустойчивости, согласно которой на вершинах капли, вытягивающейся в близкую к сфероиду фигуру, образуются эмиттирующие выступы и имеет место эмиссия заряженных микрокапелек.

В [13] в рамках метода Рэля исследована неустойчивость заряженной сфероидальной капли и показано, что критика Тейлора в адрес работы Рэля не обоснована. Согласно результатам работы [13], критические условия развития неустойчивости капиллярных волн в заряженной сфероидальной капле сильно зависят от величины ее эксцентриситета, быстро снижаясь по мере его увеличения. А так как неустойчивость основной моды капиллярных волн в капле приводит к ее вытягиванию в сфероид, то увеличение амплитуды основной моды сопровождается снижением критических условий неустойчивости более высоких мод капиллярных волн. В итоге неустойчивость высоких мод с $n > 2$ становится возможной уже при заряде капли, соответствующем пределу выполнения условия (1) для основной моды (с $n=2$). Суперпозиция же высоких неустойчивых мод как раз и обеспечивает образование эмиттирующего выступа.

С начала 60-х годов одновременно с развитием теории рэлеевского распада стали предприниматься попытки экспериментальной проверки критерия неустойчивости сильно заряженной капли (1) и изучения закономерностей ее распада [14-27].

Суммируя результаты, полученные в указанных экспериментальных работах [21-27], можно сказать, что справедливость рэлеевского критерия неустойчивости (1) надежно подтверждена. Кроме того, выяснилось [28], что при неустойчивости капля теряет 23 ± 5 % своего исходного заряда и 5 ± 5 % массы. Что же касается определения размеров, зарядов и количества мелких капелек, выбрасываемых при неустойчивости — задачи, представляющей наибольший интерес для приложений, то тут сколь-либо надежные экспериментальные дан-

ные отсутствуют. В этой связи в последние годы предпринято несколько попыток теоретического расчета параметров распада из принципа минимума энергии конечного состояния системы [16-18], окончившихся, однако, неудачей в связи с тем, что авторы указанных работ, во-первых, принимали, что все эмиттированные капельки тождественны, во-вторых, пренебрегали энергией их электростатического взаимодействия в конечном состоянии, в-третьих, количество эмиттированных капелек брали в качестве независимого термодинамического параметра наравне с радиусом капли. Сама идея минимизации энергии конечного состояния в задачах обсуждаемого класса была предложена экспериментаторами в [28] на заре целенаправленных исследований электродиспергирования жидкостей и была весьма популярна в 60-е и в начале 70-х годов в связи с расчетами режимов работы ионных коллоидных реактивных двигателей (см., например, [29]), а также в связи с попытками реанимации жидкокапельной модели ядра [30]. Но уже в [31] было указано, что результаты расчетов параметров электродиспергирования жидкостей на основе принципа минимума энергии конечного состояния (с вышеперечисленными недостатками) не согласуются с данными экспериментов. В реальности же (как показано в [19]) при расчете параметров распада необходимо учитывать, что процесс перехода неустойчивой капли в устойчивое состояние является неравновесным и следует проводить минимизацию не энергии конечного состояния, а скорости рассеяния энергии системы — исходя из принципа наименьшего рассеяния энергии Онзагера.

1. Пусть капля идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости радиуса R , несущая электрический заряд Q , чуть больший предельного в смысле устойчивости по Рэлею, претерпела неустойчивость. При этом [8] капля вытягивается в сфероид с эксцентриситетом $e_2 \approx 0.8$ и с ее вершин начинается эмиссия мелких капелек, уносящих избыточный заряд (рис. 1). Следует отметить, что величина предельного в смысле устойчивости по Рэлею заряда сильно зависит от e_2 . Когда первоначально сферическая капля вытягивается в сфероид, имеющийся на ней заряд становится существенно закритическим. На первый взгляд, представляется, что для возвращения к исходной сферической форме на капле должен остаться заряд, лишь чуть меньший предельного, при котором капля могла бы обратимо деформироваться внешними силами до сфероида с $e_2 \approx 0.8$. Но, как будет показано ниже, это не так.

Примем далее в соответствии со сказанным, что исходная сфероидальная капля выбросила в результате неустойчивости капельку радиуса r ($r \ll R$) с зарядом q ($q \ll Q$). Будем считать, что при этом процессе температура системы остается неизменной, а также сохраняются полный объем и электрический заряд жидкой фазы. Тогда, учитывая, что эмиттируемая капелька отрывается от большой в поле ее заряда, а значит, также имеет сфероидальную форму [32] с эксцентриситетом e_1 , для изменения свободной энергии системы можно записать

$$\Delta F = 4\pi r^2 \sigma \left[A_1 - \frac{2}{3} \frac{r}{R} A_2 \right] + \frac{q^2}{2r} B_1 - \frac{Q \cdot q}{R} B_2 + \frac{q^2}{2R} B_2 - \frac{q^2}{R} K + \frac{Q \cdot q}{R} K = 0, \quad (1)$$

где

$$A_i = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 - e_i^2} + \frac{1}{e_i} \arcsin e_i \right] (1 - e_i^2)^{-1/2}; \quad i = 1; 2,$$

$$B_i = \frac{(1 - e_i^2)^{3/2}}{e_i} \operatorname{arth} e_i; \quad K = \frac{(1 - e_2^2)^{3/2}}{e_2} \operatorname{arth} \frac{e_2}{v}; \quad v = \sqrt{1 + \frac{\xi}{a_2^2}}.$$

В (1) первое слагаемое определяет изменение свободной энергии сил поверхностного натяжения, три последующих слагаемых определяют изменение собственной электростатической энергии заряженных капелек, два последующих — энергию взаимодействия выброшенной капельки с остатком большой капли. В (1) ξ — эллипсоидальная координата центра маленькой капли в момент ее отрыва от большой; v — расстояние между каплями в момент отрыва контакта между ними, измеренное в a_2 ; a_2 и b_2 — большая и меньшая полуоси сфероида $a_2 = R(1 - e_2^2)^{-1/2}$, $b_2 = R(1 - e_2^2)^{1/2}$.

Примем, что отрыв маленькой капли от большой происходит с вершины выступа, вырастающего на большой капле при развитии в ней неустойчивости капиллярных волн. При этом под действием кулоновского взаимодействия заряда вершины выступа и заряда большой капли вершина выступа вместе с находящимся на ней зарядом отрывается, как только кулоновская сила отталкивания между зарядами превысит силу поверхностного натяжения $2\pi r_n \sigma$, удерживающую вершину выступа (r_n — радиус перетяжки, связывающей капли).

Пусть заряд вершины выступа в момент начала отрыва βq ($\beta < 1$), а часть заряда $(1-\beta) \cdot q$ отрывающаяся капелька получает за время отрыва, которое хоть и мало, но конечно. Примем далее, что форма вершины выступа сфероидальна с меньшей полуосью b_1 , и учтем, что величина напряженности поля E создаваемого большой сфероидальной каплей в месте отрыва маленькой капельки [10]

$$E = \gamma \frac{Q \sqrt{(1 - e_2^2)^3}}{R^2 (\sqrt{v^2 - e^2})},$$

где параметр $\gamma \leq 1$, учитывает тот факт, что часть поверхности сфероида, образующая эмиттирующий выступ, от которого отрывается капля, в создании поля не участвует. И наконец, из условия баланса сил в момент начала разрыва перетяжки получим уравнение для определения параметра ν

$$\frac{\alpha}{8W} \leq \frac{e_1 (1 - e_2^2)}{e_2 \sqrt{1 - e_1^2} \operatorname{arth} e_1} \frac{1}{(\nu^2 - e_2^2)} \cdot \operatorname{arth} \left(e_2 \frac{\nu - 1}{\nu - e_2^2} \right),$$

$$\alpha = \frac{r_n}{\gamma \beta b_1}, \quad (2)$$

где в α собраны все неопределенные параметры задачи.

Изменение свободной энергии системы связано с появлением новой поверхности, т. е. с изменением энергии сил поверхностного натяжения, которое можно выразить через r , и с изменением энергии электрического поля, выражающимся через q . Потребуем, чтобы в силу принципа наименьшего рассеяния энергии это изменение было экстремальным, т. е. чтобы выполнялись условия $(\partial F)/(\partial r) = 0$, $(\partial F)/(\partial q) = 0$, из которых несложно получить уравнения для нахождения r и q ,

$$\begin{aligned} X [A_1 - X A_2] - W B_1 Y^2 X^{-2} &= 0, \\ Y &= X \cdot C [1 - X (D - C)]^{-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$D = K \cdot B_1^{-1}, \quad C = (B_2 - K) \cdot B_1^{-1}.$$

Принимая $W=1$, $e_2^2=0.7$, из систем уравнений (2), (3) несложно найти $q=q(\alpha)$ и $r=r(\alpha)$. Причем в отличие от [19, 20, 33] эксцентриситет отрывающейся капельки e_1 будем определять в итерационной процедуре, а не задавать изначально.

Принимая во внимание гидродинамическую инерционность большой капли (то очевидное обстоятельство, что характерное время эмиссии одной капельки много меньше времени гидродинамической релаксации большой капли), несложно видеть, что эмиссия капелек будет иметь место до тех пор, пока сила кулоновского отталкивания заряда отрывающейся капельки от заряда, остающегося на исходной капле, будет превышать удерживающую лапласовскую силу в перетяжке.

Ясно, что заряд каждой последующей капли будет больше, чем предыдущей, так как для выполнения условия (2) при уменьшающемся заряде большой капли Q необходимо увеличение заряда маленькой капли q . На рис. 2 представлены рассчитанные на ЭВМ из систем (2), (3) зависимости от α количества эмиттированных капелек n (кривая 1), параметра Рэлея для остатка исходной капли W (кривая 2), а также относительной потери заряда большой капли $\zeta = (\Delta Q)/Q$ (кривая 3) и ее массы $\eta = (\Delta M)/M$ (кривая 4). Вертикальными штриховыми линиями отделены те значения α , при которых значения ζ (как наиболее точно измеряемой в экспериментах величины) соответствуют экспериментальным данным [26] — $\zeta = 0.23 \pm 0.05$. Значения η и W , соответствующие выделенному па-

параметру α , также хорошо согласуются с результатами экспериментов [21-27]. На рис. 2 видно также, что количество капелек, эмиттируемых при распаде неустойчивой по Рэлею исходной капли, в выделенном интервале α изменяется от 100 до 300. На рис. 3 представлены рассчитанные при $\alpha=0.9$ и исходном параметре Рэлея большой капли $W=1$ зависимости безразмерного заряда отрывающихся капелек Y (кривая 1), безразмерного радиуса X (кривая 2), удельного заряда $Z=Y \cdot X^{-3}$ (кривая 3), критерия Рэлея для остатка основной капли (кривая 4) от порядкового номера эмиттируемой капельки. Как показали расчеты, значение эксцентриситета эмиттируемой капельки практически не зависит от W и n и равно $e_1 \approx 0.46$.

Как несложно видеть из рис. 3, значения характерных размеров и зарядов эмиттируемых капелек примерно на два порядка меньше размера и заряда ис-

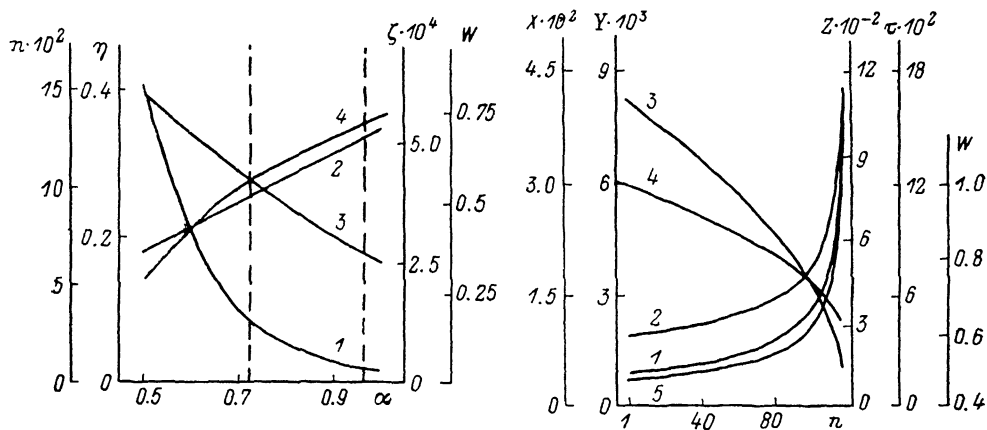


Рис. 2. Зависимости от неопределенного параметра α количества эмиттированных капелек n (1), параметра Рэлея для остатка исходной капли W (2), относительной потери большой капли заряда $\zeta = \Delta Q/Q$ (3), массы $\eta = \Delta M/M$ (4).

Вертикальными пунктирными линиями отделены те значения α , при которых значения ζ (как наиболее точно измеряемой в экспериментах величины) соответствуют экспериментальным данным [28] $\zeta = 0.23 \pm 0.05$.

Рис. 3. Зависимости безразмерного заряда отрывающихся капелек Y (1), безразмерного радиуса X (2), удельного заряда $Z = Y/X^3$ (3), параметра Рэлея для остатка основной капли (4), характерного времени нарастания неустойчивости дочерней капельки (5) от порядкового номера эмиттируемой капельки n , рассчитанные при $\alpha=0.9$ и исходном значении параметра Рэлея неустойчивой капли $W=1$.

ходной капли. Что касается значений параметра Рэлея для эмиттированных капелек W_* , то этот вопрос нуждается в более подробном рассмотрении.

2. Как выяснилось при численных расчетах, величина параметра Рэлея для эмиттированных капелек W_* немного превышает единицу, т. е. это критическое значение в соответствии с (1) и, следовательно, дочерние капельки изначально неустойчивы по отношению к имеющемуся на них заряду. Это обстоятельство, несмотря на кажущуюся противоречивость, достаточно прозрачно физически. В самом деле, изолированная капля радиуса r с зарядом q характеризуется свободной энергией

$$F = 4\pi r^2 \sigma + \frac{q^2}{2r^2},$$

имеющей экстремум при

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 8\pi r \sigma - \frac{q^2}{r^3} = 0,$$

т. е. при

$$\frac{q^2}{16\pi\sigma r^3} = W_* = 1.$$

Находя вторую производную от F по r , несложно убедиться, что найденный экстремум является минимумом, так как $(\partial^2 F)/(\partial r^2) > 0$. А это означает, что

наличие на капле предельного по Рэлею заряда наиболее выгодно с термодинамической точки зрения. Пусть теперь та же капля находится во внешнем электростатическом поле напряженности E . Тогда полная потенциальная энергия капли запишется в виде

$$U = 4\pi\sigma r^2 + \frac{q^2}{2r} + \frac{E^2}{2} \left(\frac{r^3}{3} + C_* \right) + q\varphi,$$

где C_* — константа, зависящая от геометрии пространства, занятого полем; φ — потенциал внешнего поля в месте нахождения капли.

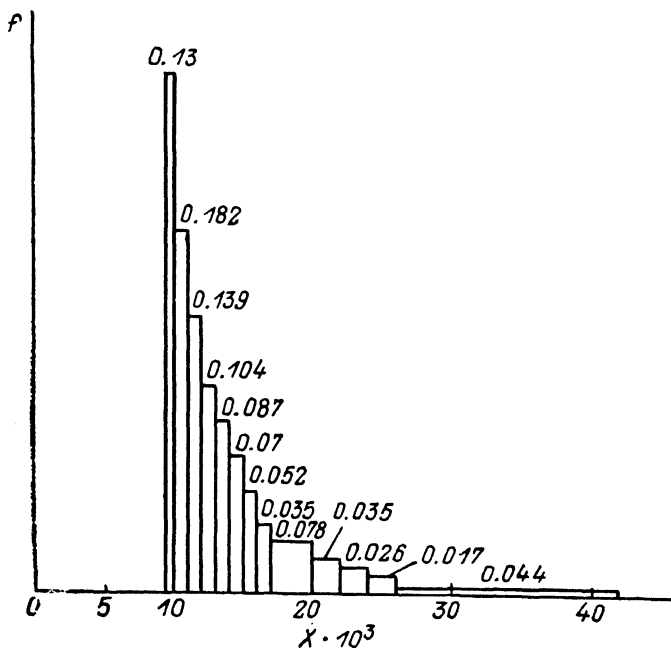


Рис. 4. Нормированная на единичный интервал функция распределения по размерам вторичных дочерних капелек.

Находя производную $(\partial U)/(\partial r)$ и приравнявая нулю, несложно получить уравнение для нахождения экстремального (минимального, как и раньше) значения параметра Рэлея для рассматриваемой капли в виде

$$W_* = 1 + \frac{E^2 r}{16\pi\sigma} \equiv 1 + w,$$

где безразмерный параметр w характеризует устойчивость капли по отношению к поляризационному заряду [8, 32].

В рассматриваемой ситуации маленьких капель, находящихся в электрическом поле заряда большой капли, значение параметра w для них много меньше критического и много меньше единицы. Это и объясняет тот факт, что все дочерние капельки несут заряд, чуть больший предельного в смысле устойчивости по Рэлею.

Дисперсионное уравнение для капиллярных волн в эмиттированных капельках имеет вид [13, 32]

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) - 4W_*.$$

Отсюда видно, что если W_* превышает единицу, то капля становится неустойчивой и амплитуда основной моды начинает нарастать со временем по экспоненциальному закону с инкрементом

$$\chi_2 = \omega_2^0 \sqrt{1 - W_*},$$

где ω_2^0 — частота колебаний основной моды незаряженной капли в отсутствие внешнего поля.

Сказанное выше означает, что изначально неустойчивые по Рэлею дочерние капельки будут распадаться за характерное время $\tau \approx 1/\chi_2$. Кривая 5 на рис. 3 иллюстрирует зависимость τ от порядкового номера эмиттированной капельки.

На рис. 4 представлена рассчитанная при $\alpha=0.9$ нормированная на единичный интервал гистограмма функции распределения вторичных капель по размерам f . Всего вторичных капель при принятом значении α получается

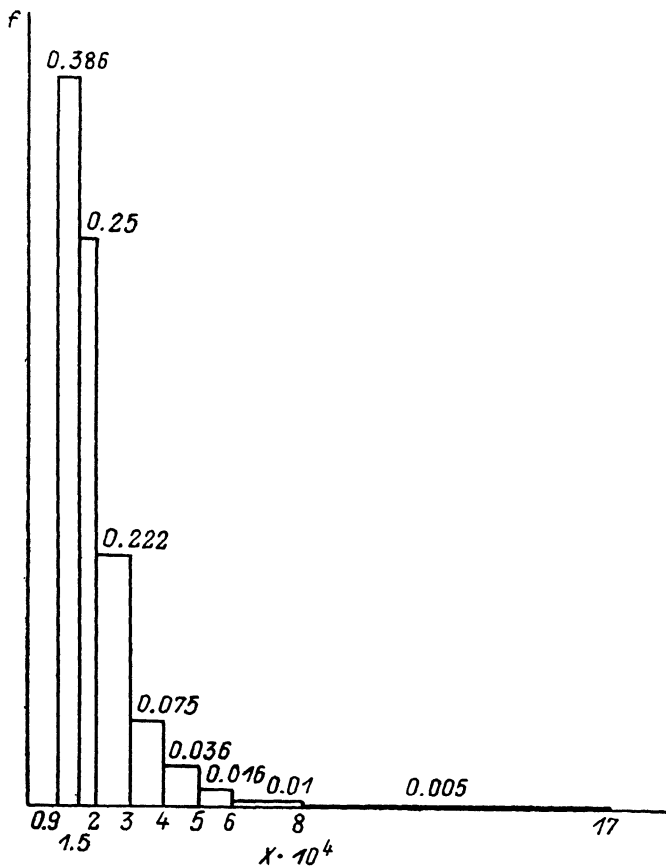


Рис. 5. Нормированная на единичный интервал функция распределения по размерам третичных дочерних капелек.

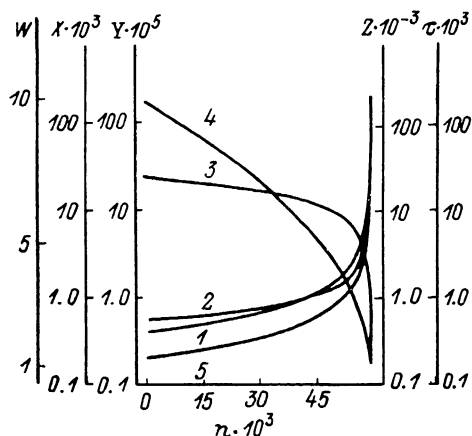
115 штук. На рис. 5 приведена нормированная на единичный интервал гистограмма функции распределения по размерам f третичных капель, которые будут эмиттированы при распаде вторичных. Общее количество третичных капель будет $\sim 1.3 \cdot 10^4$. Характерные размеры вторичных и третичных эмиттированных капель, приведенные на рис. 4 и 5, обезразмерены на радиус R исходной большой капли. Третичные капли также неустойчивы по Рэлею и снова распадаются по тому же закону.

Явление последовательного распада эмиттированных при Рэлеевской неустойчивости капель подтверждается данными как прямых экспериментов [5, 22], так косвенных [28, 34, 35] (в [28, 34, 35] наблюдались и фотографически зафиксированы вторичные распады капель, получаемых при электростатическом диспергировании жидкости, но, как показано в [19, 20], физические механизмы неустойчивости Рэлея и неустойчивости поверхности жидкого мениска на срезе капилляра (по отношению к индуцированному заряду имеют одну природу).

Функция распределения эмиттируемых капель по размерам с учетом процессов распада вторичных капель в соответствии со сказанным выше должна быть разрывной (рис. 4, 5), т. е. должна состоять из нескольких не связанных

между собой пиков; этот вывод подтверждается данными экспериментов по электростатическому диспергированию жидкостей [36, 37].

3. В целом ряде технических устройств (в жидкометаллических источниках ионов, в жидкостной масс-спектрометрии и т. п.) при электростатическом диспергировании хорошо проводящих жидкостей могут реализовываться условия, когда значение параметра Рэля эмиттированной капельки значительно превышает критическое по Рэлею значение. В этой связи желательно знать параметры распада капли, несущей существенно запредельный по Рэлею заряд. На рис. 6 представлены результаты расчета характеристик распада капли, исходное значение параметра Рэля для которой в десять раз превышает критическое. Расчет показал, что относительная потеря заряда такой каплей при распаде ζ составит ~ 0.76 , а относительная потеря массы $\eta \approx 0.8 \cdot 10^{-3}$. Из сравнения



данных, приведенных на рис. 6 и 3, несложно видеть, что основным отличием обсуждаемой ситуации от распада капли, находящейся на рэлеевском пределе, является резкое увеличение (почти на три порядка) количества вторичных капелек, снижение их характерных линей-

Рис. 6. Рассчитанные при $\alpha=0.9$ и исходном значении параметра Рэля большой капли $W=10$ зависимости безразмерного заряда отрывающихся капелек Y (1), безразмерного радиуса X (2), удельного заряда $Z=Y/X^3$ (3), параметра Рэля для остатка основной капли (4) и характерного времени нарастания неустойчивости дочерней капельки (5) от порядкового номера эмиттируемой капельки n .

ных размеров и зарядов и увеличение удельных зарядов. Последнее обстоятельство следует иметь в виду при разработке технических устройств, для функционирования которых необходимы частицы с большими удельными зарядами, как это имеет место в ионных коллоидных реактивных двигателях [29].

4. В связи с исследованием устойчивости заряженных кластеров (см., например, [2, 38]) представляет интерес вопрос о возможности деления мелкой сильно заряженной капли на две части близких размеров. В недавнем переиздании работы [10], в конце первой главы в задаче (6), вставлено решение подобной задачи — об оценке критического значения параметра W , при котором сильно деформированная заряженная капля разделится за счет кулоновского расталкивания на две равные части. В основе использованного метода (см. также [2]) лежит сравнение собственной энергии исходной капли

$$U = \frac{Q^2}{2R} + 4\pi R^2\sigma$$

с суммарной собственной энергией вновь образовавшихся капелек

$$U_* = 2 \left(\frac{Q_*^2}{2R_*} + 4\pi R_*^2\sigma \right), \quad (4)$$

где $Q_* = (1/2)Q$, $R_* = 2^{-1/3}R$.

Критическое условие неустойчивости исходной капли по отношению к делению на две части получается из требования $U > U_*$ в виде $W \geq 0.35$. На основании этого результата в [2] утверждается, что реальным условием неустойчивости заряженной капли является более слабое последнее, а состояния с $0.35 \leq W \leq 1$ являются метастабильными. Этот вывод представляется несколько поспешным, так как в выражении (4) для энергии системы в конечном состоянии (сразу после разрыва исходной капли) отсутствует слагаемое, учитывающее энергию электростатического взаимодействия дочерних капелек. Кроме того, слагаемые, учитывающие энергию сил поверхностного натяжения выписаны для сферических капелек, тогда как их форма сразу после разрыва

будет существенно несферической. В этой связи ниже предлагается более строгий анализ возможности деления заряженной капли на две части при ее сильной деформации.

Пусть имеется заряженная капля идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости, деформированная в вытянутый сфероид. Ясно, что одноименно заряженные половинки сфероидальной капли будут отталкиваться, и вполне возможно, что при некоей величине заряда на сфероиде сила отталкивания между его половинками может повысить лапласовскую силу в центральной части сфероида в плоскости симметрии, перпендикулярной оси симметрии $2\pi b\sigma$, удерживающую обе половинки вместе, и тогда произойдет разрыв капли на две равные части. Силу отталкивания половинок сфероида несложно посчитать, используя известное [10] выражение для поверхностной плотности заряда на сфероиде

$$F = 2\pi \int_0^a x^2 n_{xy} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (5)$$

Здесь

$$y = y(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

— уравнение образующей сфероида, n_x — проекция орта нормали к поверхности сфероида на ось OX . Подставляя в (5) из [10]

$$x = \frac{Q}{4\pi ab^2} \left\{ \frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^4} \right\}^{-1/2},$$

несложно получить

$$F = \frac{Q^2}{8a^2} \frac{\ln\left(\frac{1}{1-e^2}\right)}{e^2}.$$

Сравнивая это выражение с лапласовской силой $2\pi b\sigma$, получим условие разрыва такого сфероида пополам

$$W > \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{1-e^2}\right)}. \quad (6)$$

Выражение, стоящее в (6) справа, является медленно растущей функцией e^2 , имеющей минимальное значение, равное единице, при $e^2=0$. Это означает, что при увеличении эксцентриситета лапласовская сила в центре капли убывает медленнее, чем сила кулоновского отталкивания, и, следовательно, заряженная сфероидальная капля устойчива относительно деления по плоскости симметрии на две равные части при сколь угодно больших (в рамках разумного, конечно) деформаций. Единственной возможностью деления капли пополам является рассмотренная в [38] ситуация двухзарядного малого кластера.

Список литературы

- [1] Григорьев А. И., Земсков А. А., Ширяева С. О. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 18. С. 1637—1640.
- [2] Елецкий А. В., Смирнов Б. М. // УФН. 1989. Т. 159. № 1. С. 45—82.
- [3] Won-Kyu Rhim, Sang Kun Chung, Hyson M. J. et. al. // IEEE Trans. Ind. Appl. 1987. Vol. IA-23. N 6. P. 975—979.
- [4] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 5. С. 6—13.
- [5] Elghazaly H. M. A., Castle G. S. P. // IEEE Trans. Ind. Appl. 1989. Vol. 25. N 1. P. 48—53.
- [6] Rayleigh // Philosophical Magazine. 1882. Vol. 14. N 1. P. 182—186.
- [7] Hendrics C. D., Schneider J. M. // Amer. J. Phys. 1963. Vol. 16. N 6. P. 450—453.
- [8] Jaylor D. // Proc. Roy. Soc. 1964. Vol. 280. N 2. P. 383—387.
- [9] Дудников В. Г., Шабалин А. П. Препринт ИЯФ СО АН СССР. № 87-63. Новосибирск, 1987. 66 с.
- [10] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1957. 537 с.

- [11] Григорьев А. И. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 3. С. 538—541.
- [12] Габович М. Д. // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137—151.
- [13] Григорьев А. И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272—1278.
- [14] Ailam G., Gallily I. // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. N 2. P. 575—582.
- [15] Baily A. G. // Phys. Fluids. 1974. Vol. 17. N 4. P. 852—853.
- [16] Roth D. G., Kelly A. J. // IEEE Trans. Ind. Appl. 1983. Vol. IA-19. N 5. P. 771—775.
- [17] Elghazaly H. M. A., Castle G. S. P. // IEEE Trans. Ind. Appl. 1987. Vol. IA-23. N 1. P. 108—113.
- [18] Elghazaly H. M. A., Castle G. S. P. // IEEE Trans. Ind. Appl. 1986. Vol. IA-22. N 5. P. 892—895.
- [19] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 5—13.
- [20] Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белашина Е. И. // ЭОМ. 1989. № 5. С. 28—33.
- [21] Ryce S. A., Wyman R. R. // Canad. J. Phys. 1964. Vol. 42. N 11. P. 2185—2194.
- [22] Ryce S. A., Patriarche D. A. // Canad. J. Phys. 1965. Vol. 43. N 9. P. 2192—2199.
- [23] Abbas M. A., Latham J. // J. Fluid. Mech. 1967. Vol. 30. N 4. P. 663—670.
- [24] Berg J. G. O., Grainor R. J., Vaughan U. // J. Atmos. Sci. 1970. Vol. 27. N 11. P. 1173—1181.
- [25] Roulleau M., Desbois M. // J. Atmos. Sci. 1972. Vol. 29. N 4. P. 565—569.
- [26] Schweizer J. W., Hanson D. N. // J. Coll. Int. Sci. 1971. Vol. 35. N 3. P. 417—423.
- [27] Cerkanowicz A. E. // IEEE. IAS Conf. Proc. New York, 1981. P. 1161—1165.
- [28] Vonnegut B., Neubauer R. L. // J. Coll. Sci. 1952. Vol. 7. N 6. P. 616—622.
- [29] Krohn V. E. // Electrostatic Propulsion. New York: Academic Press, 1961. P. 73—80.
- [30] Ryce S. A. // Nature. 1966. Vol. 209. N 5030. P. 1343—1344.
- [31] Krohn V. E. // Appl. Phys. Lett. 1973. Vol. 23. N 5. P. 220—221.
- [32] Григорьев А. И., Ширяева С. О. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 11. С. 119—121.
- [33] Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белашина Е. И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 11. С. 27—34.
- [34] Коженков В. И., Кириш А. А., Фукс Н. А. // Коллоид. журн. 1974. Т. 36. № 6. С. 1168—1171.
- [35] Коженков В. И., Кириш А. А., Симонов А. П., Фукс Н. А. // ДАН СССР. 1973. Т. 213 № 4. С. 879—880.
- [36] Hendrics C. D. J. Coll. Sci. 1962. Vol. 17. N 2. P. 249—259.
- [37] Веренчиков А. Н., Лубо-Лесниченко К. Е., Масалов С. А. и др. // Научное приборостроение. Л.: Наука, 1987. С. 64—71.
- [38] Ширяева С. О., Григорьев А. И. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 192—194.

Ярославский государственный университет

Поступило в Реакцию
21 ноября 1989 г.