1991 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 61, в. 3
1991 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 61, N 3

09; 10

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ВОЛНОВОДЕ ПРИ ФОКУСИРОВКЕ ЕГО ПЕРИОДИЧЕСКИМ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ ПОЛЕМ

М. И. Капчинский, Л. А. Юдин

Изучается линейная стадия поперечной параметрической неустойчивости сильноточного электронного пучка в гладком волноводе. Пучок промодулирован по радиусу стационарными пространственно-периодическими фокусирующими полями с аксиальной симметрией — продольным магнитным полем и электростатическим радиальным полем (типа ионной фокусировки). Отклик пучка на электромагнитное поле бегущей волноводной моды, синхронный с ней, описан с помощью тензора диэлектрической проницаемости. Определены условия возникновения неустойчивости, вычислены ее инкременты и стартовые токи. Рассмотрены конкретные примеры транспортных каналов.

Введение

При распространении сильноточного электронного пучка в пространственно-периодическом фокусирующем поле он может испытывать поперечную неустойчивость. Эта неустойчивость является следствием резонансного взаимодействия пучка непосредственно с камерой транспортного канала. Физика неустойчивости состоит в резонансе параметрических гармоник медленных поперечных пучковых волн с электромагнитной волной, распространяющейся в окружающем пучок гладком металлическом лайнере. Последняя волна носит чисто волноводный характер.

Эта неустойчивость (по физике дела ее удобно называть волноводно-параметрической) в некотором смысле противоположна той, что имеет место в приборах типа карсинотрона [1, 2]. Как известно, при распространении пучка в гофрированном волноводе карсинотрона происходит взаимодействие медленной пучковой волны и параметрической гармоники волноводной моды.

В транспортных каналах ускорителей волноводно-параметрическая неустойчивость будет проявляться как паразитная, приводя к росту амплитуды поперечных колебаний, размеров пучка, увеличению его эмиттанса и т. д. В теории ускорителей определяющее значение имеют инкремент неустойчивости и ее стартовый ток. Вычислить их можно уже в рамках линейной теории.

Нелинейная теория СВЧ приборов типа ЛСЭ, использующих такую неустойчивость, предложена в [3]. Неоднородное вдоль оси фокусирующее поле интерпретируется как волна накачки с нулевой частотой и постоянной распространения $\pm(2\pi/L)$, где L — период фокусировки; амплитуда волны накачки считается малой, что позволяет усреднить уравнения движения частиц по быстрым осцилляциям с частотой $2\pi u/L$, где u — поступательная скорость электронов. С квантовой точки зрения развитие неустойчивости в [3] рассматривается как поглощение электроном пучка одного кванта волны накачки с испусканием кванта сигнальной волны (бегущей волноводной моды) и переходом электрона в новое энергетическое состояние (возбуждение пучковой моды).

Как легко видеть, такие приближения требуют малости глубины модуляции фокусирующего поля и синусоидальности формы модуляции. Сильная модуляция фокусирующего поля не позволит провести усреднение уравнений движения частиц по периоду поля, а отказ от гармонической формы модуляции повлечет за собой необходимость введения нескольких волн накачки с кратными периодами. Предположение об участии в элементарном акте взаимодействия лишь одного кванта волны накачки эквивалентно учету только первых параметрических пучковых гармоник и пренебрежению остальными.

В [4] изучена неустойчивость в фокусирующем поле стеллараторного типа. При движении в таком поле в пучке возбуждаются лишь две волны: основная и первая параметрическая, в соответствии с чем неустойчивость в [4] интерпретируется как трехволновая.

В данной работе мы изложим линейную теорию поперечной волноводно-параметрической неустойчивости пучка, фокусируемого стационарными пространственно-периодическими полями, обладающими аксиальной симметрией — продольным магнитным полем и радиальным электрическим полем, возникающим, например, при ионной фокусировке [5]. Допускается модуляция фокусирующих полей любой глубины и формы (пока справедливо параксиальное приближение). Возможен расчет взаимодействия любой параметрической гармоники с любой бегущей модой волновода. Действие метода на примере неустойчивости пучка в поле классической квадрупольной фокусировки показано в [6].

Отклик промодулированного пучка на поле бегущей волны

Уравнение движения в продольном магнитном поле $B_0(z)$ в сочетании с полем фокусировки типа ионной под действием бегущей паразитной волноводной моды имеет вид

$$\left(-i\omega+u\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{V}_\perp+u\Omega\,[\mathbf{e}_z,\ \mathbf{V}_\perp]+\frac{u^2}{2}\frac{d\Omega}{dz}[\mathbf{e}_z,\ \mathbf{r}_\perp]+u^2\omega_r^2\mathbf{r}_\perp=\frac{e_0}{m_0\gamma}\mathbf{K}e^{ihz}, \qquad (1)$$

где $\Omega(z)=e_0B_0(z)/\beta\gamma m_0c^2$ — пространственная циклотронная частота электронов, e_0 и m_0 — заряд и масса частиц, c — скорость света, u — равновесная скорость частиц в направлении оси z, $\beta=u/c$ и $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$ — релятивистские факторы, $\omega_r=\omega_r(z)$ — жесткость радиальной электростатической фокусировки, поперечная скорость $\mathbf{V}_\perp$ связана с поперечным смещением $\mathbf{r}_\perp$ соотношением $\mathbf{V}_\perp=(-i\omega+u\,(\partial/\partial z))\,\mathbf{r}_\perp$, зависимость от времени всех величин в волне предполагается в виде $\exp(-i\omega t)$, ω — частота волны, $\mathbf{K}=\mathbf{E}_\perp+\beta\,[\mathbf{e}_z,\ \mathbf{B}_\perp]$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — комплексные амплитуды электрического и магнитного полей волны, h — ее продольное волновое число. Третье слагаемое в левой части уравнения (1) описывает в параксиальном приближении действие радиальной компоненты статического магнитного поля. Считается, что пучок получен с замагниченного катода, т. е. в невозмущенном состоянии его частицы не закручены.

От векторного уравнения (1) перейдем к скалярному уравнению для «общей» поперечной координаты $\zeta=x+iy$. Члены с первой производной по координате z устраняются после введения замены переменной

$$\xi=\zeta\exp\left[-i\frac{\omega}{u}z+\frac{i}{2}\int_0^z\Omega(s)\,ds\right].$$

Уравнение для $\xi(z)$ имеет вид

$$\frac{d^2\xi}{dz^2}+\left(\frac{\Omega^2}{4}+\omega_r^2\right)\xi=\frac{e_0}{m_0\gamma u^2}(K_x+iK_y)\exp\left[i\left(h-\frac{\omega}{u}\right)z+\frac{i}{2}\int_0^z\Omega(s)\,ds\right]. \qquad (2)$$

Уравнение (2) без правой части описывает равновесную поперечную динамику частиц в канале транспортировки. Его коэффициенты $\Omega^2(z)$ и $\omega_r^2(z)$ по предположению периодичны по координате z с общим периодом L: $\Omega(z+L)=\Omega(z)$, $\omega_r^2(z+L)=\omega_r^2(z)$. Поэтому общее решение однородного уравнения, соответствующего (2), удобно записать в терминах функций Флоке $\xi_{\text{одн}}(z)=C_1F(z)+C_2F^*(z)$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, звездочка означает операцию комплексного сопряжения. Функция Флоке $F(z)=\varphi(z)\times$

$\times\exp(i\mu^2/L)$ определяет характеристический показатель μ и комплексную огибающую Флоке $\varphi(z)$, также имеющую период L. Равновесное движение пучка в канале устойчиво, когда μ — действительное число, причем без ограничения общности можно считать, что $\mu > 0$.

Частное решение неоднородного уравнения (2) находится методом вариации постоянных. Переходя сразу к переменной $\zeta(z)$, напишем его в виде

$$\zeta(z) = \frac{-e_0}{m_0\gamma u^2}\,\frac{K_x + iK_y}{iW}\,e^{i(hz-\alpha)}\left\{\varphi(z)\,e^{i\mu z/L}\int\limits_0^z \varphi^*(s)\,e^{i(\alpha-\mu s/L)}ds\,-\right.$$

$$\left.-\,\varphi^*(z)\,e^{-i\mu z/L}\int\limits_0^z \varphi(s)\,e^{i(\alpha+\mu s/L)}ds\right\}, \qquad (3)$$

где $\alpha(z) = (h - (\omega/u))\,z + (1/2)\int\limits_0^z \Omega(s)\,ds$, W — вронскиан функций Флоке; стоящая в знаменателе комбинация iW всегда действительна, положительна и не зависит от z (функции Флоке обычно нормируют так, что $W = -2i$).

Используя свойство периодичности продольного магнитного поля, в выражении (3) можно перейти от интегрирования к суммированию. Выделим из циклотронной частоты $\Omega(z)$ ее среднее на периоде значение $\Omega(z) = \bar{\Omega} + \tilde{\Omega}(z)$ и введем периодические функции

$$\Psi_\pm(z) = \varphi(z)\exp\left\{\pm\frac{i}{2}\int\limits_0^z \tilde{\Omega}(s)\,ds\right\}, \qquad (4)$$

которые на отрезке от 0 до L разложим в ряды Фурье

$$\Psi_\pm(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_{n\pm}e^{2\pi niz/L};\quad \Psi_{n\pm} = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \Psi_\pm(z)\,e^{-2\pi niz/L}dz.$$

С учетом этих обозначений выражение (3) преобразуется к виду

$$\zeta(z) = \frac{-e_0}{m_0\gamma u^2}\,\frac{K_x + iK_y}{iW}\,e^{ihz}\times$$

$$\times\sum_{n,\,p=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Psi_{n-}\Psi^*_{p-}}{h - \dfrac{\omega}{u} + \dfrac{\bar{\Omega}}{2} - \dfrac{2\pi p + \mu}{L}} - \frac{\Psi_{n+}\Psi^*_{p+}}{h - \dfrac{\omega}{u} + \dfrac{\bar{\Omega}}{2} + \dfrac{2\pi n + \mu}{L}}\right)e^{2\pi i(n-p)z/L}. \qquad (5)$$

Из (5) видно, что отклик промодулированного в фокусирующих полях пучка на поле бегущей волны является несинхронным, исходный спектр возмущения обогащается параметрическими гармониками с постоянными распространения вида $h + (2\pi/L)\,k$ со всевозможными номерами k. Основной вклад во взаимодействие пучка с волной вносит синхронная гармоника, имеющая продольное волновое число h (о влиянии несинхронных гармоник см. в [7]). Оставив в сумме в правой части (5) только слагаемые с $n = p$, найдем для синхронной с внешней волной гармоники

$$\zeta_s(z) = \frac{-e_0}{m_0\gamma u^2}\,\frac{K_x + iK_y}{iW}\,e^{ihz}\times$$

$$\times\sum_n\left(\frac{|\Psi_{n-}|^2}{h - \dfrac{\omega}{u} + \dfrac{\bar{\Omega}}{2} - \dfrac{2\pi n + \mu}{L}} - \frac{|\Psi_{n+}|^2}{h - \dfrac{\omega}{u} + \dfrac{\bar{\Omega}}{2} + \dfrac{2\pi n + \mu}{L}}\right). \qquad (6)$$

В исходном уравнении движения (1) «общую» поперечную координату можно ввести еще и другим образом $\zeta_1 = x - iy$. Уравнение для нее и выражение для синхронной гармоники отличаются от (2) и (6) соответственно заменой $K_y \to -K_y$ и $\Omega(z) \to -\Omega(z)$. От выражений для ζ_s и ζ_{1s} уже легко перейти к «первичным» поперечным координатам $x_s = \frac{1}{2}(\zeta_s + \zeta_{1s})$, $y_s = \frac{1}{2i}(\zeta_s - \zeta_{1s})$.

Вычисленная здесь синхронная гармоника линейного отклика пучка на поле бегущей волны характеризует диэлектрические свойства пучка. Их удобно описать с помощью тензора диэлектрической проницаемости. В нашей задаче его поперечная часть имеет обычный для гиротропной среды вид

$$\hat{\varepsilon}_\perp = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & -ig \\ ig & \varepsilon_\perp \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где

$$\varepsilon_\perp = 1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^2 u^2} \frac{1}{iW} \sum_n \left\{ \frac{|\Psi_{n-}|^2 \mu_{n-}}{\left(h - \frac{\omega}{u}\right)^2 - \mu_{n-}^2} + \frac{|\Psi_{n+}|^2 \mu_{n+}}{\left(h - \frac{\omega}{u}\right)^2 - \mu_{n+}^2} \right\},$$

$$g = \frac{\omega_b^2}{\gamma^2 u^2} \frac{h - \omega/u}{iW} \sum_n \left\{ \frac{|\Psi_{n-}|^2}{\left(h - \frac{\omega}{u}\right)^2 - \mu_n^2} - \frac{|\Psi_{n+}|^2}{\left(h - \frac{\omega}{u}\right)^2 - \mu_{n+}^2} \right\}, \tag{8}$$

$\omega_b = (4\pi N e_0^2/m_0\gamma)^{1/2}$ — ленгмюровская частота пучка, N — концентрация электронов в пучке, $\mu_{n\pm} = (\mu + 2\pi n/L) \pm (\bar{\Omega}/2)$.

Отметим, что найденное в [6] выражение для диэлектрической проницаемости пучка, фокусируемого периодическим жесткофокусирующим полем, формально следует из (8), если положить там $\bar{\Omega} = 0$, $\tilde{\Omega}(z) \equiv 0$.

Инкремент неустойчивости, координаты точки резонанса и стартовые условия

Резонансные эффекты возможны, когда один из знаменателей в суммах (8) близок к нулю $(h - (\omega/u))^2 \simeq \mu_{n\pm}^2$. Поскольку частота и продольное волновое число волноводной моды связаны между собой очевидным дисперсионным уравнением

$$\frac{\omega^2}{c^2} - h^2 = \varkappa^2, \tag{9}$$

где $\varkappa$ — поперечное волновое число, то пересечение при $\omega > 0$ дисперсионных линий пучковой параметрической гармоники и моды волновода возможно лишь при $h - (\omega/u) < 0$. Следовательно, дисперсионное уравнение пучковой гармоники можно принять в виде

$$h - \frac{\omega}{u} = -|\mu_{n\pm}|. \tag{10}$$

Таким образом, согласно (9) и (10), параметры точки резонанса составляют

$$\omega_{1,2} = \gamma^2 u |\mu_{n\pm}| \left(1 + s_{1,2} \sqrt{\beta^2 - \frac{\varkappa^2}{\gamma^2 \mu_{n\pm}^2}}\right),$$

$$h_{1,2} = \gamma^2 |\mu_{n\pm}| \left(\beta^2 + s_{1,2} \sqrt{\beta^2 - \frac{\varkappa^2}{\gamma^2 \mu_{n\pm}^2}}\right), \tag{11}$$

где $s_1 = 1$, $s_2 = -1$.

Здесь два знака перед радикалом соответствуют двум точкам пересечения дисперсионных линий пучка и волновода. Отметим заранее, что больший инкремент имеет низкочастотная волна. Условие взаимодействия волн

$$\beta\gamma > \frac{\varkappa}{|\mu_{n\pm}|}, \tag{12}$$

оно выполняется, когда энергия пучка выше некоторой пороговой. В окрестности резонанса, учитывая (10), можно написать

$$\left(h-\frac{\omega}{u}\right)^2-\mu_{n\pm}^2=-2\,|\mu_{n\pm}|\,(h-h_0), \tag{13}$$

где $h_0=(\omega/u)-|\mu_{n\pm}|$.

Воспользуемся методом возмущений [8], позволяющим связать сдвиг постоянной распространения волноводной моды с диэлектрическими свойствами среды, заполняющей волновод. Согласно [8], в случае электронного пучка

$$\delta h=\frac{\omega\gamma^2}{16\pi S_z}\int \mathbf{K}^*(\hat{\varepsilon}_\perp-1)\,\mathbf{K}\,d\sigma, \tag{14}$$

где S_z — поток энергии, переносимый волной; интегрирование ведется по поперечному сечению пучка, в правую часть надо подставлять характеристики невозмущенной волны.

Рассмотрим транспортный канал, в котором среднее на периоде фокусировки значение продольного магнитного поля не равно нулю ($\bar{\Omega}\neq 0$). В этом предположении в окрестности резонанса (13) в суммах в (8) можно оставить только по одному слагаемому, имеющему малый знаменатель. Тогда, подставляя (7), (8) и (13) в соотношение (14), найдем

$$\delta h=\frac{\omega}{h-h_0}\,\frac{1}{64\pi S_z u^2}\,\frac{\mu_{n\pm}}{|\mu_{n\pm}|}\,\frac{|\Psi_{n\pm}|^2}{iW}\int \omega_b^2\left|\mathbf{K}\pm i\frac{\mu_{n\pm}}{|\mu_{n\pm}|}[\mathbf{K},\ \mathbf{e}_z]\right|^2 d\sigma. \tag{15}$$

В формуле (15) ленгмюровская частота пучка может быть функцией поперечных координат. В точном резонансе $h-h_0=\delta h$ и (15) дает нам квадратное уравнение для сдвига продольного волнового числа, вызванного наличием пучка.

Согласно [9], если волноводная мода бежит вправо (в сторону распространения пучка), т. е. у нее $h>0$ и $S_z>0$, то взаимодействие оказывается неустойчивым при $\delta h^2<0$, причем неустойчивость носит конвективный характер. В случае распространения влево, т. е. при $h<0$ и $S_z<0$, взаимодействие неустойчиво при $\delta h^2>0$ и носит характер генерации. В обоих случаях необходимым условием неустойчивости оказывается неравенство

$$\mu_{n\pm}<0. \tag{16}$$

Как известно, неустойчивость при взаимодействии двух мод проявляется, когда одна из этих мод обладает положительной энергией, а другая — отрицательной. Поскольку волноводная мода всегда обладает положительной энергией, то наши рассуждения позволяют сделать вывод, что при выполнении условия (16) энергия параметрической пучковой гармоники отрицательна.

Формулы (11) при выполнении условия (12) дают параметры двух неустойчивых волн. Из них точка с более высокой частотой (ей соответствует положительный знак перед радикалами в (11)) всегда имеет $h>0$ и неустойчивость в ней носит конвективный характер. Точка же с более низкой частотой может дать абсолютную неустойчивость. Условие генерации

$$\beta>\frac{\varkappa}{|\mu_{n\pm}|}. \tag{17}$$

В случае конвективной неустойчивости квадрат пространственного инкремента усиления равен

$$\Gamma^2=-\delta h^2=\frac{\omega}{64\pi S_z u^2}\,\frac{|\Psi_{n\pm}|^2}{iW}\int \omega_b^2\,|\mathbf{K}\pm i[\mathbf{e}_z,\ \mathbf{K}]|^2\,d\sigma. \tag{18}$$

В случае абсолютной неустойчивости квадрат временно́го инкремента генерации составляет

$$\Gamma_t^2=\frac{uc^2}{\omega}\,|h|\,\delta h^2. \tag{19}$$

Если структура фокусирующего канала такова, что $\bar{\Omega}=0$, то $\mu_{n+}=\mu_{n-}$ и приведенные выше формулы для инкрементов (18) и (19) усложняются. Выражение для инкремента конвективной неустойчивости, например, принимает вид

$$\Gamma^2=\frac{\omega}{64\pi S_z u^2}\,\frac{1}{iW}\int \omega_b^2\,|(|\Psi_{n+}|+|\Psi_{n-}|)\,\mathbf{K}+i(|\Psi_{n+}|-|\Psi_{n-}|)[\mathbf{e}_z,\ \mathbf{K}]|^2\,d\sigma. \tag{20}$$

Выражение для инкремента генерации сохраняет форму $\Gamma_i^2 = -h\Gamma^2 \; uc^2/\omega$, где Γ^2 определено уже соотношением (20).

Препятствовать развитию неустойчивости могут такие стабилизирующие факторы, как резистивное поглощение энергии в стенках волновода и затухание Ландау, вызванное разбросом частиц пучка по энергии. Последний фактор важен, в частности, из-за зависимости величины $h_0 = (\omega/u) - |\mu_{n\pm}|$ от энергии частиц. Для простейшей оценки примем функцию распределения частиц по энергии в лоренцевой форме

$$f(\gamma) = \frac{\gamma_1}{\pi} \frac{1}{(\gamma - \gamma_0)^2 + \gamma_1^2}, \tag{21}$$

где γ_0 соответствует средней энергии, γ_1 — ширина распределения.

В приближении узкой линии $\gamma_1 \ll \gamma_0$ выражение для «стабилизированного» инкремента конвективной неустойчивости имеет вид

$$\Gamma' = \frac{1}{2} \left[\sqrt{4\Gamma^2 + (h'' - \gamma_1 h_0')^2} - (h'' + \gamma_1 h_0')\right], \tag{22}$$

где Γ^2 определено формулой (18) или (20), $h_0' = |(dh_0)/(d\gamma)|$, h'' — постоянная затухания волноводной моды.

Последнюю величину легко рассчитать, пользуясь методами [10]. Критерий неустойчивости $\Gamma' > 0$ определяет стартовые условия

$$\Gamma^2_{\text{ст}} = h'' \gamma_1 h_0'. \tag{23}$$

В частном случае круглого волновода радиуса R и азимутально-симметричного пучка формула (18), описывающая инкремент неустойчивости при $\bar{\Omega} \neq 0$ для E-волн, выглядит так:

$$\Gamma^2 = \frac{1}{hLR^2c^2} \left(4\pi^2 b_{n\pm}^2 - \frac{\varkappa^2 L^2}{\beta^2\gamma^2} d_{n\pm}^2\right) \int\limits_0^R \omega_b^2(r)\, J^2_{m\mp 1}(\varkappa r)\, r dr / J_m'^2(\varkappa R), \tag{24}$$

где m — азимутальный индекс неустойчивой волны; $J_m(x)$ — функция Бесселя; $\varkappa$ является корнем уравнения $J_m(\varkappa R) = 0$; введены параметры, определяемые структурой фокусирующих полей на периоде канала,

$$d_{n\pm} = \frac{|\Psi_{n\pm}|}{\sqrt{iW}}; \quad b_{n\pm} = \frac{|\Psi_{n\pm}|}{\sqrt{iW}} \left| n + \frac{\mu}{2\pi} \pm \frac{\bar{\Omega} L}{4\pi} \right|. \tag{25}$$

Для H-волн аналог формулы (24) имеет более простой вид

$$\Gamma^2 = \frac{4\pi^2}{hLR^2c^2} b_{n\pm}^2 \frac{\varkappa^2 R^2}{\varkappa^2 R^2 - m^2} \int\limits_0^R \omega_b^2(r)\, J^2_{m\mp 1}(\varkappa r)\, r dr / J_m^2(\varkappa R), \tag{26}$$

а $\varkappa$ здесь является корнем уравнения $J_m'(\varkappa R) = 0$.

Если $\bar{\Omega} = 0$, то соотношение для H-волн надо записывать так:

$$\Gamma^2 = \frac{4\pi^2}{hLR^2c^2} \frac{\varkappa^2 R^2}{\varkappa^2 R^2 - m^2} \int\limits_0^R \omega_b^2(r) \left[b_{n+}^2 J^2_{m-1}(\varkappa r) + b_{n-}^2 J^2_{m+1}(\varkappa r)\right] r dr / J_m^2(\varkappa R), \tag{27}$$

а для E-волн аналогично преобразуется формула (24).

Рассмотрим, наконец, случай тонкого приосевого электронного пучка. В этом примере наиболее заметную величину инкремента дадут волноводные моды с одной вариацией по азимуту ($m = \pm 1$), поперечные поля которых однородны вблизи оси системы в области, где распространяется пучок. Виды формул здесь для случаев равного и не равного нулю среднего на периоде магнитного поля совпадают. Для неустойчивой E-волны

$$\Gamma^2 = \frac{2}{hLR^2} \frac{I}{\beta\gamma I_0} \left(4\pi^2 b_{n\pm}^2 - \frac{\varkappa^2 L^2}{\beta^2\gamma^2} d_{n\pm}^2\right) \Big/ J_1'^2(\varkappa R), \tag{28}$$

где I — ток пучка, $I_0=m_0c^3/e_0=17$ кА; в частности, в первой радиальной моде E_{11}

$$\Gamma=\frac{22}{R}\sqrt{b_{n\pm}^2-\left(\frac{0.61L}{\beta\gamma R}\right)^2 d_{n\pm}^2}\sqrt{\frac{1}{hL}\frac{I}{\beta\gamma I_0}}. \tag{29}$$

Для неустойчивой H-волны

$$\Gamma^2=\frac{8\pi^2}{hLR^2}\frac{I}{\beta\gamma I_0}\frac{\varkappa^2R^2}{\varkappa^2R^2-m^2}b_{n\pm}^2/J_1^2(\varkappa R), \tag{30}$$

в первой радиальной моде H_{11}

$$\Gamma=\frac{18}{R}b_{n\pm}\sqrt{\frac{1}{hL}\frac{I}{\beta\gamma I_0}}. \tag{31}$$

Сопоставление формул (24), (26) и (12) позволяет сделать интересный вывод. Пусть сначала энергия пучка невелика и условие неустойчивого взаимодействия его с какой-либо модой волновода (12) не выполнено. В дальнейшем при ускорении энергия пучка возрастает и неравенство (12) начинает выполняться. Если при этом рассматриваемая мода волновода является E-волной, то инкремент ее неустойчивости, согласно (24), стартует с нулевого значения. Инкремент же неустойчивости H-волны, согласно (26), сразу же не равен нулю, для моды H_{11}, например, этот «начальный» инкремент составит

$$\Gamma=\frac{3.9}{R}\frac{d_{n\pm}}{\beta^2\gamma^2}\sqrt{\frac{L}{R}\frac{I}{I_0}}. \tag{32}$$

Отметим, что на квантовом языке раскачка высших параметрических гармоник может интерпретироваться как участие в элементарном акте рассеяния $|n|$ квантов волны накачки, так что эффект можно назвать $(|n|+2)$-волновым взаимодействием.

Неустойчивость пучка в канале с реверсным магнитным полем

Рассмотрим в качестве примера транспортный канал без ионной фокусировки, в котором продольное магнитное поле образует симметричный реверс с резким краем,

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Omega, & 0<z<L/2,\\ -\Omega, & L/2<z<L.\end{cases} \tag{33}$$

Очевидно, что здесь $\bar{\Omega}=0$ и $\Omega^2(z)=\text{const}$, так что уравнение для функций Флоке имеет постоянные коэффициенты и огибающая Флоке $\varphi(z)\equiv 1$. Величина $\mu=|\Omega|L/2$, параметры канала

$$b_{n+}=b_{n-}=\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{2}\,\pi}\left|\frac{\sin\left(\frac{\mu}{4}+\frac{\pi|n|}{2}\right)}{\frac{\mu}{4}+\frac{\pi|n|}{2}}\right|,$$

$$d_{n+}=d_{n-}=\frac{\sqrt{\mu}}{4\sqrt{2}}\left|\frac{\sin\left(\frac{\mu}{4}+\frac{\pi|n|}{2}\right)}{\frac{\mu^2}{16}-\frac{\pi^2n^2}{4}}\right|. \tag{34}$$

Условия неустойчивости (12) и (16) принимают вид

$$n<-\frac{1}{2\pi}\left(\mu+\frac{\varkappa L}{\beta\gamma}\right). \tag{35}$$

При характеристиках канала $L=50$ см, $R=10$ см, $B_0=5$ кГс соотношение (35) начинает выполняться для минус первой пучковой параметрической гармоники при $\beta\gamma>2.6$, взаимодействовать она будет с низшей модой волновода H_{11}. Условие генерации

$$n < -\frac{1}{2\pi}\left(\mu + \frac{\varkappa L}{\beta}\right) \tag{36}$$

для $n=-1$ не выполняется ни при каких энергиях пучка.

Если энергия пучка такова, что $\beta\gamma=20$, то условие (35) при взаимодействии с модой H_{11} выполнено при всех отрицательных n. При $n=-1$ из двух неустойчивых волн (11) наибольший инкремент усиления имеет низкочастотная, ее частота 1.7 ГГц, $h=0.30$ см$^{-1}$, инкремент для узкого приосевого пучка $\Gamma = 5.6\cdot10^{-3}\sqrt{I/I_0}$ см$^{-1}$. Стартовый ток, вычисленный согласно (23) для медного волновода, составляет $I_{\text{ст}}=5.7\cdot10^{-3}$ $(\gamma_1/\gamma_0)\,I_0$.

Условие генерации (37) моды H_{11} начинает выполняться при $n\leqslant -3$. Для $n=-3$ инкремент генерации равен $\Gamma_t=8.8\cdot10^{6}\sqrt{I/I_0}$ с$^{-1}$ на частоте 990 МГц.

Неустойчивость пучка в канале со слабо неоднородным магнитным полем

Неоднородность продольного магнитного поля в транспортных каналах может возникать в результате «проседания» его в зазорах между катушками соленоидов. Промоделируем эту неоднородность гармонической зависимостью

$$\Omega(z) = \bar{\Omega}\left(1 + q\sin\frac{2\pi z}{L}\right), \tag{37}$$

где $q \ll 1$ и для определенности $\bar{\Omega} > 0$.

Именно этот вариант ближе всего к модели, рассмотренной в [3]. Здесь в приближении $q\bar{\Omega}L \ll 1$ в первом порядке малости величина $\mu=\bar{\Omega}L/2$, параметры канала

$$d_{n+} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\left|\frac{\pi-2\mu}{\pi-\mu}\right|\left(\frac{q\mu}{4\pi}\right)^{|n|}, \quad b_{n+} = d_{n+}\left|n + \frac{\mu}{\pi}\right|,$$

$$d_{n-} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\,\frac{\pi}{|\pi-\mu|}\left(\frac{q\mu}{4\pi}\right)^{|n|}, \quad b_{n-} = d_{n-}|n|. \tag{38}$$

Отметим, что равновесное движение частиц в канале (37) будет устойчивым при условии $|1-(\mu/\pi)| > q/2$. Случай $\mu\simeq\pi$ соответствует двойному циклотронному резонансу [11] и у нас не рассматривается.

Как видим, здесь в отличие от предыдущего примера снимается поляризационное вырождение волны. Так, для приосевого электронного пучка положительный знак в индексе параметров канала соответствует взаимодействию с волной, поля которой зависят от азимута θ как $\exp(i\theta)$, отрицательный знак — $\exp(-i\theta)$.

Условия усиления и генерации волн с $m=+1$ есть соответственно

$$n < -\frac{1}{2\pi}\left(2\mu + \frac{\varkappa L}{\beta\gamma}\right), \quad n < -\frac{1}{2\pi}\left(2\mu + \frac{\varkappa L}{\beta}\right). \tag{39}$$

При $L=50$ см, $R=10$ см, $B_0=10$ кГс условие усиления моды H_{11} с $m=+1$ для минус первой пучковой гармоники начинает выполняться при энергии пучка, равной 50 МэВ, условие ее генерации не выполняется ни при каких значениях энергии. Если $\beta\gamma=20$, то условие усиления выполняется для $\eta\leqslant -3$. При $n=-3$ инкремент усиления составляет $\Gamma=1.3\cdot10^{-2}\,q^3\sqrt{I/I_0}$ см$^{-1}$, частота неустойчивой волны 1.2 ГГц, $h=0.16$ см$^{-1}$, стартовый ток для медного волновода равен $I_{\text{ст}}=2.7\cdot10^{-2}\,q^{-6}\,(\gamma_1/\gamma_0)\,I_0$. Условие генерации выполнено для $n\leqslant -4$, при $n=-4$ инкремент абсолютной неустойчивости есть $\Gamma_t=5.4\times10^{8}\,q^4\sqrt{I/I_0}$ с$^{-1}$ на частоте 940 МГц.

Для волн с азимутальным индексом $m=-1$ условия усиления и генерации выглядят так:

$$n < -\frac{\varkappa L}{2\pi\beta\gamma}, \quad n < -\frac{\varkappa L}{2\pi\beta}, \tag{40}$$

так что усиление для пучковой гармоники с $n=-1$ начнется при энергии пучка выше 400 кэВ, а генерация может иметь место лишь начиная с $n=-2$. При

$\beta\gamma=20$ инкремент усиления моды H_{11} равен $\Gamma=2.5\cdot 10^{-2}\,q\,\sqrt{I/I_0}$ см$^{-1}$, частота нарастающей волны 940 МГц, $h=0.072$ см$^{-1}$, стартовый ток неустойчивости $I_{ст}=2.7\cdot 10^{-5}\,q^{-2}\,(\gamma_1/\gamma_0)\,I_0$. Инкремент абсолютной неустойчивости при $n=-2$ составляет $\Gamma_t=5.2\cdot 10^8\,q^2\,\sqrt{I/I_0}$ с$^{-1}$ на частоте 920 МГц.

Таким образом, наиболее неустойчивой оказывается волна с угловым индексом $m=-1$. Перемена направления продольного магнитного поля $\Omega\to-\Omega$ эквивалентна изменению ориентации поляризации волны $m\to-m$.

Отметим следствие формул (39): при малых $q\mu$ неустойчивость высших параметрических гармоник сильно подавлена по сравнению с первыми. Это соответствует модели [3].

Заключение

В лазерах на свободных электронах рассматриваемая неустойчивость вряд ли сможет быть эффективно использована: переход в режим двойного циклотронного резонанса (как в [11]) или возбуждение соответствующей продольной неустойчивости (как в [12]) обещает резкое повышение инкремента по сравнению с приведенным здесь.

В ускорителях же волноводно-параметрическая неустойчивость может явиться препятствием для транспортировки электронных пучков с большими токами в периодических фокусирующих полях. Неустойчивость должна приводить к раскачке поперечных колебаний частиц и гибели их на стенках камеры. Отсутствие ее в современных пучковых экспериментах [13, 14], по-видимому, объясняется короткими длительностями пучков и малостью дистанций, на которые транспортируется пучок.

Список литературы

[1] *Зайцев Н. И., Ковалев Н. Ф., Кольчугин Б. Д., Фукс М. И.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 8. С. 1611—1617.
[2] *Быков Н. М., Губанов В. П., Гунин А. В.* и др. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 5. С. 32—38.
[3] *Гинзбург Н. С.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 2. С. 299—305.
[4] *Hughes T. P., Godfrey B. B.* // Phys. Fluids. 1986. Vol. 29. N 5. P. 1698—1703.
[5] *Buchanan H.* Lee. // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 1. P. 221—231.
[6] *Юдин Л. А., Капчинский М. И.* // Тез. докл. XI Всесоюз. семинар по линейным ускорителям заряженных частиц. Харьков, 1989. С. 100.
[7] *Абубакиров Э. Б., Петелин М. И.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 6. С. 1085—1089.
[8] *Юдин Л. А.* // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 2. С. 235—244.
[9] *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. С. 337.
[10] *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. § 51.
[11] *Богданкевич Л. С., Гелхвиидзе П. К., Иванов В. С.* и др. Препринт ИОФ АН СССР. № 51. М., 1984. 29 с.
[12] *Ткач Ю. В., Файнберг Я. Б., Онищенко И. Н.* и др. Препринт ХФТИ АН УССР. № 81-50. Харьков, 1981. 11 с.
[13] *Reiser M.* // IEEE Trans. on Nucl. Sci. 1985. Vol. NS-32. N 5. P. 2201—2205.
[14] *Диканский Н. С., Пестриков В. В.* Физика интенсивных пучков в накопителях. Новосибирск: Наука, 1989. 334 с.

Московский радиотехнический институт
АН СССР

Поступило в Редакцию
11 декабря 1989 г.