О ЛОКАЛЬНОМ СОСТОЯНИИ В ДЛИННОЙ ПЕРЕДАЮЩЕЙ ЛИНИИ С МАГНИТНОЙ ИЗОЛЯЦИЕЙ

О. И. Василенко

При изучении квазистационарного и квазиоднородного в продольном направлении режимов магнитной изоляции в длинной линии с использованием телеграфных уравнений [1–3] в качестве локального ее состояния выбирают статическое бриллюэновское решение [4, 5], в котором все электроны потока имеют одинаковую полную энергию. Однако наличие в системе продольного электрического поля способно привести к изменению функции распределения частиц и, следовательно, локального состояния в линии. В работе в рамках односкоростной холодной гидродинамики получено уравнение для функции распределения и показано, что при существующих в линии условиях реализуется бриллюэновский поток.

Рассмотрим полосковую линию. Введем прямоугольную систему координат (x, y, z), ось x которой перпендикулярна электродам, а ось z направлена вдоль линии. Используем систему единиц, в которой скорость света, заряд и масса электрона равны единице. Считаем, что система однородна в направлении y.

Уравнения Максвелла для электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{B}$ полей имеют вид

$$-\frac{\partial B}{\partial z}=4\pi\rho\frac{p_x}{\gamma}+\frac{\partial E_x}{\partial t},\quad \frac{\partial B}{\partial x}=4\pi\rho\frac{p_z}{\gamma}+\frac{\partial E_z}{\partial t},\quad E_y=0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=4\pi\rho,\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B}{\partial t},\quad B_x=B_z=0,\quad B_y=B, \tag{1}$$

где ρ — плотность заряда, а $\mathbf{p}$ — импульс односкоростного электронного потока, динамика которого описывается уравнениями

$$\frac{\partial p_x}{\partial t}+\frac{p_x}{\gamma}\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{p_z}{\gamma}\frac{\partial p_x}{\partial z}=E_x-\frac{p_z}{\gamma}B,\quad p_y=0,$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial t}+\frac{p_x}{\gamma}\frac{\partial p_z}{\partial x}+\frac{p_z}{\gamma}\frac{\partial p_z}{\partial z}=E_z+\frac{p_x}{\gamma}B,\quad \gamma=\sqrt{p_x^2+p_z^2+1}. \tag{2}$$

Введем малый параметр ε и произведем в (1), (2) замену

$$\frac{\partial}{\partial z}\to\varepsilon\frac{\partial}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial t}\to\varepsilon\frac{\partial}{\partial t},\quad E_z\to\varepsilon E_z,\quad p_x\to\varepsilon p_x,$$

соответствующую телеграфному приближению. Раскладывая величины в ряды по малому параметру, получим, что система (1), (2) с точностью $0(\varepsilon^2)$ имеет вид

$$-\frac{\partial B}{\partial z}=\frac{p_x}{\gamma}\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_x}{\partial z},\quad \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$E_z=\frac{\partial p_t}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}-\frac{p_x}{\gamma}\left(B-\frac{\partial p_z}{\partial x}\right). \tag{3}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}=\frac{p_z}{\gamma}\frac{\partial E_x}{\partial x},\quad E_x=\frac{p_z}{\gamma}B,\quad \gamma=\sqrt{1+p_z^2}. \tag{4}$$

Уравнения (4) соответствуют нулевому приближению по ε и имеют решение

$$E_x=\sigma p,\quad B=\sigma\gamma,\quad \gamma=\sqrt{1+p^2},\quad p=p_z, \tag{5}$$

где σ — произвольная функция z и t.

Если $\sigma=\mathrm{const}$, то (5) описывает стационарный и однородный по z электронный поток, в котором p может рассматриваться как функция распределения с произвольной зависимостью от x. Граничные условия на катоде $(x=x_k)$

$$E_x(x=x_k)=0,\quad p(x=x_k)=0 \tag{6}$$

не позволяют устранить неопределенность в выборе конкретного состояния для использования его как локального в телеграфных уравнениях.

Подстановка (5) в (3) приводит к выражению для поля E_z и уравнению для функции распределения p

$$E_z = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \left[\frac{\partial (\sigma\gamma)}{\partial z} + \frac{\partial (\sigma p)}{\partial t}\right]\left(\frac{\gamma}{\frac{\partial p}{\partial x}} - \frac{1}{\sigma}\right), \qquad (7)$$

$$\frac{\partial (\sigma p)}{\partial z} + \frac{\partial (\sigma\gamma)}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}. \qquad (8)$$

На катоде поле E_z равно нулю и, согласно (6), (7),

$$E_z (x = x_k) = \frac{\partial \sigma}{\partial z}\left(\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial x}} - \frac{1}{\sigma}\right)\Bigg|_{x=x_k} = 0 \text{ или } \frac{\partial p}{\partial x}(x = x_k) = \sigma. \qquad (9)$$

Преобразуем уравнение (8) для функции распределения. Положим

$$Q = \frac{\gamma}{\frac{\partial p}{\partial x}} - \frac{1}{\sigma}. \qquad (10)$$

Тогда (8) можно представить в виде закона сохранения линейного по

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q\left(\frac{\partial (\sigma\gamma)}{\partial z} + \frac{\partial (\sigma p)}{\partial t}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[Q\,\frac{\partial (\sigma\gamma)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[Q\,\frac{\partial (\sigma p)}{\partial x}\right]. \qquad (11)$$

Это соотношение можно еще более упростить, положив $p = \operatorname{sh}\nu$, $\gamma = \operatorname{ch}\nu$ и произведя замену переменных $(x, z, t) \to (\nu, z, t)$

$$\frac{\partial Q}{\partial \nu}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\operatorname{ch}\nu + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\operatorname{sh}\nu\right) = \sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\operatorname{sh}\nu + \frac{\partial Q}{\partial t}\operatorname{ch}\nu\right). \qquad (12)$$

Согласно (9), $Q\ (x = x_k) = 0$, поэтому вблизи катода $Q = q\,(x - x_k)^{\beta}$ и уравнение (11) в этой области имеет вид

$$\beta q\,\frac{\partial \sigma}{\partial z}(x - x_k)^{\beta-1} = \frac{\partial (q\sigma^3)}{\partial z}(x - x_k)^{\beta+1} + \frac{\partial (\sigma^2 q)}{\partial t}(x - x_k)^{\beta}. \qquad (13)$$

Здесь в каждом члене оставлена его главная часть. Отсюда следует, что с граничными условиями (6), (9) совместимо только нулевое значение Q

$$Q \equiv 0 \text{ или } \frac{\partial p}{\partial x} = \sigma\gamma,$$

что вместе с (5) однозначно выделяет бриллюэновское решение в качестве локального состояния линии.

Отметим для общности, что $E_z\,(x = x_k) = 0$ может также иметь место, если вместо (или вместе с) (9) выполняется $\partial\sigma/\partial z = 0$. При этом из (12) следует, что $Q\,(\nu, z, t) = Q\,(\sigma\,(t)\operatorname{sh}\nu)$. Данный случай относится к процессам в линии при нестационарном внешнем магнитном поле.

Список литературы

[1] *Василенко О. И.* Автореф. канд. дис. М., 1978. 148 с. Вестник МГУ. Физика. Астрономия. 1990. Т. 31. № 1. С. 11—17.

[2] *Гордеев А. В., Заживихин В. В.* // Науч.-техн. сб. ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 1982. № 1 (9). С. 55—60.

[3] *Voronin V. S., Kolomensky A. A., Krastelyev E. G.* et al. // Proc. 3d Intern. Topical Conf. on High Power Electron and Ion Beam Research and Technology. Novosibirsk, 1979. Vol. 2. P. 593—602.

[4] *Brillouin L.* // Phys. Rev. 1945. Vol. 67. N 7, 8. P. 260—266.

[5] *Creedon J. M.* // J. Appl. Phys. 1975. Vol. 46. N 7. P. 2946—2955.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Научно-исследовательский институт ядерной физики

Поступило в Редакцию 14 декабря 1989 г.