

05; 11

© 1991 г.

ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА В БЫСТРО НАРАСТАЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. В. Титков

Аналитически исследуются механические напряжения, возникающие в полом цилиндре при действии на его внутренней поверхности нарастающего магнитного поля в условиях резкого поверхностного эффекта. Показано наличие специфического распределения механических напряжений, характеризующегося возникновением двух областей с различными типами напряженного состояния материала. Дана количественная оценка максимальной интенсивности напряжений в зависимости от скорости нарастания поля.

Введение

К числу наиболее ответственных узлов импульсных электрофизических установок сверхсильных токов и магнитных полей относятся токоведущие элементы, подвергающиеся механическому действию электромагнитных сил и сильному, до нескольких сотен градусов, нагреву вследствие джоулева тепловыделения (импульсные соленоиды, токоподводящие шины, экраны) [1]. Комбинация отмеченных факторов действия электромагнитного поля на проводник в типичных для таких установок условиях резкого поверхностного эффекта обуславливает сложные пространственные и временные распределения механических напряжений, возникающих вблизи его поверхности. При этом составляющая механических напряжений, возникающая в твердом проводнике вследствие действия электромагнитных сил, достигает наибольших значений, когда индукция магнитного поля на его поверхности максимальна,¹ и уменьшается по мере затухания импульса тока. Термоупругие напряжения, возникающие вследствие резко неоднородного нагрева проводника, когда глубина проникновения поля в стенку много меньше ее толщины, максимальны по окончании действия импульса поля. Поэтому при анализе напряженного состояния проводника наибольший интерес представляет рассмотрение двух режимов: процесса нарастания поля до максимума и стадии окончания действия импульса поля. Последняя изучалась в работе [2]. В настоящей работе рассматривается первый режим, при этом наибольший интерес представляют количественные оценки механических напряжений для момента максимума индукции магнитного поля.

Особенностью процесса нарастания индукции до максимума является одновременно усиливающееся действие двух составляющих механических напряжений, вызванных электромагнитными силами и неоднородным нагревом. Поскольку анализ проводится в рамках линейной теории упругости, то эти составляющие напряжений могут быть найдены по отдельности, а решение получается суперпозицией.

В качестве примера рассмотрим типичный в технике больших импульсных токов и магнитных полей случай толстостенного полого цилиндра, на внутрен-

¹ Индукция магнитного поля на поверхности однозначно связана с полным током и геометрией проводника.

ней поверхности которого действует импульс магнитного поля $B_0(t)$, направленного вдоль оси цилиндра [3] (рис. 1). Анализ напряженного состояния при заданном импульсе индукции внутри цилиндра $B_0(t)$ может быть выполнен на основе решения системы уравнений в частных производных, включающей в себя уравнение проникновения поля в стенку цилиндра, нагрева, равновесия в перемещениях (уравнение теории упругости). В соответствии с этим следует рассмотреть три задачи: 1) расчет проникновения поля в стенку проводника; 2) определение напряжений, вызванных электромагнитными силами, и термоупругих напряжений; 3) анализ критерия прочности.

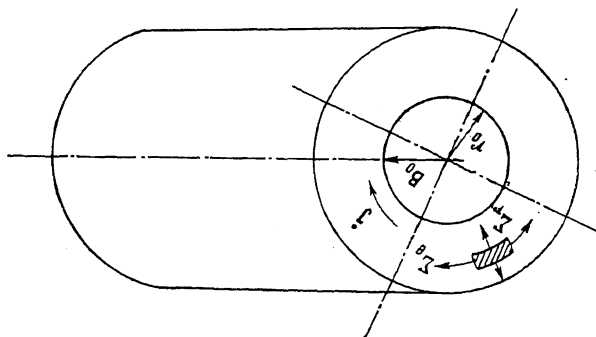


Рис. 1. К расчету механических напряжений в цилиндре.

Расчет электромагнитного поля в стенке проводника

Проникновение электромагнитного поля в стенку цилиндра описывается хорошо известным уравнением для аксиальной составляющей индукции

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rD \frac{\partial B}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где $D = \rho / \mu_0$ — коэффициент диффузии поля, ρ — удельное сопротивление проводника, μ_0 — магнитная постоянная.

Стенку цилиндра считаем достаточно толстой, так что при решении (1) можно принять $r \in (r_0, \infty)$. Для приближенного решения уравнения (1), используем тот факт, что в процессе нарастания магнитного поля на поверхности распределение индукции в стенке проводника является монотонно убывающей функцией, примем следующую аппроксимацию индукции в стенке цилиндра:

$$B(r) = B_0(t) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-m}, \quad (2)$$

где величина $m > 0$ подлежит определению.

Для определения параметра m используем метод, аналогичный методу скин-слоя [4]. Умножим (1) на r и проинтегрируем в пределах от r_0 до бесконечности

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{r_0}^{\infty} Br dr = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left(rD \frac{\partial B}{\partial r} \right) dr.$$

Этот подход известен в литературе как метод взвешенных невязок. В данном случае в качестве весовой функции используется $w(r) = r$ [5]. Принимая во внимание условие при $r \rightarrow \infty$: $B=0$ и $dB/dr=0$, с учетом (2) получим

$$r_0^2 \frac{d}{dt} \left[\frac{B_0(t)}{2-m} \right] = -B_0(t) mD.$$

Поскольку режиму резкого поверхностного эффекта соответствует условие $m \gg 1$, то последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{B_0}{m} d \left[\frac{B_0}{m} \right] = \frac{B_0^2 D}{r_0^2} dt,$$

откуда $m=r_0/\Delta$, где глубина проникновения поля Δ есть

$$\sqrt{\frac{2D \int_0^t B_0^2 dt}{B_0^2}}. \quad (3)$$

К аналогичному выражению для глубины проникновения поля можно прийти при использовании более часто применяемой экспоненциальной аппроксимации индукции в стенке плоского проводника. Однако принятый здесь степенной закон для $B(r)$, как будет видно из дальнейшего, более удобен при анализе механических напряжений.

Расчет механических напряжений, вызванных электромагнитными силами, и термоупругих напряжений

Радиальная объемная электромагнитная сила есть $f(r)=j \cdot B$, где $j=-\frac{dB}{dr}/\mu_0$. С учетом последнего равенства имеем

$$f(r) = -\frac{\partial P_\mu}{\partial r}, \quad (4)$$

где $P_\mu = B^2/2\mu_0$ — «магнитное давление».

Уравнение равновесия цилиндра в перемещениях при наличии объемной радиальной силы записывается в виде [6]

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(rU)}{dr} \right] = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{dP_\mu}{dr}, \quad (5)$$

где ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, U — радиальное перемещение.

Радиальное и азимутальное механические напряжения выражаются через компоненты деформации в виде

$$\hat{\sigma}_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta), \quad (6a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r), \quad (6b)$$

где $\epsilon_r = dU/dr$, $\epsilon_\theta = U/r$.

Выражение для P_μ при учете (2) приобретает вид

$$P_\mu = P_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2m},$$

где $P_0 = B_0^2/2\mu_0$.

Подставляя последние соотношения в (5) и дважды интегрируя, получим

$$U = -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{P_0 r_0^{2m}}{2(m-1)r^{2m-1}} + rC + \frac{C_2}{r},$$

где C и C_2 — постоянные интегрирования.

Для толстостенного цилиндра $U=0$ при $r \rightarrow \infty$, поэтому $C=0$. Радиальное напряжение с использованием (6) запишется в виде

$$\sigma_r = \frac{P_0}{2(m-1)} \frac{r_0^{2m}}{r^{2m}} (2m-1-\nu) - \frac{C_2}{r^2} (1-\nu) \frac{E}{1-\nu^2}. \quad (7)$$

Поскольку внутренняя поверхность цилиндра является свободной, то $\sigma_r(r_0)=0$ и из (7) находим

$$C_2 = P_0 \frac{(2m-1-\nu)r_0^2}{2(m-1)(1-\nu)} \frac{1-\nu^2}{E}.$$

Окончательное выражение для напряжений, вызванных электромагнитными силами, при учете условия $m \gg 1$ имеет простой вид

$$\sigma_r = P_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{2m} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right], \quad (8a)$$

$$\sigma_\theta = P_0 \left[\nu \left(\frac{r_0}{r} \right)^{2m} + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right], \quad (8b)$$

что обусловлено выбором степенного закона аппроксимации $B(r)$. Следует отметить, что выражения (8) при $r > r_0$ и $m \rightarrow \infty$ совпадают с формулами Ламе для толстостенного цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления P_0 ,

$$\sigma_\theta = -\sigma_r = P_0 \frac{r_0^2}{r^2}. \quad (9)$$

Отмеченные условия имеют место, если принять приближение идеальной проводимости, когда глубина проникновения поля $\Delta \rightarrow 0$ и нагрузка в виде «магнитного» давления приложена к поверхности проводника. Этот подход был использован ранее в [7] для оценок предельной величины индукции, получаемой в толстостенных соленоидах.

Для расчета второй составляющей механических напряжений, обусловленной неравномерным нагревом по толщине стенки проводника, воспользуемся формулами Лоренца для температурных напряжений в полом цилиндре. В случае толстостенного цилиндра $r \in (r_0, \infty)$ формулы Лоренца имеют вид [2, 6]

$$s_r = -\frac{\alpha_0 E}{(1-\nu)r^2} \int_{r_0}^r r T dr, \quad (10)$$

$$s_\theta = \frac{\alpha_0 E}{(1-\nu)r^2} \left[\int_{r_0}^r r T dr - r^2 T \right],$$

$$s_z = -\frac{\alpha_0 E}{1-\nu} T, \quad (11)$$

где α_0 — коэффициент линейного температурного расширения.

Входящая в последние выражения температура может быть вычислена по величине джоулева нагрева

$$Q = \rho \int_0^t j^2 dt.$$

Величина Q рассчитывается без учета процесса теплопроводности, которым при резком поверхностном эффекте можно пренебречь [2].

Используя (2), находим для плотности тока

$$j = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{m B_0}{r_0 \mu_0} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-(m+1)},$$

откуда имеем

$$Q = \frac{\rho}{r_0^2 \mu_0^2} \int_0^t B_0^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2(m+1)} m^2 dt.$$

Поскольку $Q = \gamma c T$, где γ — плотность, c — удельная теплоемкость, то можно записать выражение для температуры

$$T(r, t) = \frac{\rho}{\gamma r_0^2 \mu_0^2 c} \int_0^t B_0^2 m^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2(m+1)} dt.$$

Входящий в (10) и (11) интеграл запишем в виде

$$A(r, t) = \int_{r_0}^r r T dr = \frac{\rho}{\gamma r_0^2 \mu_0^2 c} \int_{r_0}^r \int_0^t B_0^2 m^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2(m+1)} r dt dr.$$

В результате интегрирования по r при $m \gg 1$ получаем

$$A(r, t) = \frac{\rho}{2\gamma \mu_0^2 c} [a_1(t) - a_2(t)], \quad (12)$$

где

$$a_1(t) = \int_0^t B_0^2(t) m(t) dt,$$

$$a_2(t) = \int_0^t m(t) B_0^2(t) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2m(t)} dt.$$

Принимая степенной закон нарастания во времени индукции магнитного поля на внутренней поверхности цилиндра и переходя к безразмерным переменным $\tau = t/t_0$, t_0 — время нарастания индукции до максимума, $x = r/r_0$, получим

$$B_0 = b\tau^\alpha,$$

$$m = m_0 \sqrt[2]{\tau},$$

где фигурируют константы $m_0 = \sqrt{r_0^2 (2\alpha + 1) / 2Dt_0}$, b — максимальное значение индукции, α — показатель скорости нарастания поля на поверхности проводника,

$$a_1 = \frac{b^2 m_0 t_0 \tau^{2\alpha+1/2}}{(2\alpha + 1/2)}, \quad (13)$$

$$a_2 = 2b^2 m_0 t_0 \int_{1/\sqrt{\tau}}^{\infty} \xi^{-2(1+2\alpha)} \exp(-\beta\xi) d\xi, \quad (14)$$

где $\beta = r m_0 \ln x$.

Подставляя (13) и (14) в (12), а выражение для $A(r, t)$ в (10) и (11), найдем после преобразований выражения для температурных напряжений

$$s_0 = \frac{\alpha_0 E \rho b^2 m_0 t_0}{2(1-\nu) r_0^2 \gamma \mu_0^2 c} \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{\tau^{2\alpha+1/2}}{2\alpha+1/2} - 2J_1(\alpha, \beta, \tau) - 4m_0 x^2 J_2(\alpha, \beta, \tau) \right\}, \quad (15)$$

$$s_r = -\frac{\alpha_0 E \rho b^2 m_0 t_0}{2(1-\nu) r_0^2 \gamma \mu_0^2 c} \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{\tau^{2\alpha+1/2}}{2\alpha+1/2} - 2J_1(\alpha, \beta, \tau) \right\}, \quad (16)$$

$$s_z = -2\alpha_0 E \rho b^2 m_0^2 t_0 J_2(\alpha, \beta, \tau) / [(1-\nu) \gamma r_0^2 \mu_0^2 c], \quad (17)$$

где функции

$$J_1(\alpha, \beta, \tau) = \int_{1/\sqrt{\tau}}^{\infty} \xi^{-2(1+2\alpha)} \exp(-\beta\xi) d\xi,$$

$$J_2(\alpha, \beta, \tau) = \int_{1/\sqrt{\tau}}^{\infty} \xi^{-1-4\alpha} \exp(-\beta\xi) d\xi$$

имеют наиболее простой вид для случая $\alpha = 1/2$, когда их можно выразить через функцию интегральной экспоненты $E_1(z) = -E_i(-z)$, для которой имеются таблицы. При этом

$$J_1(1/2, \beta, \tau) = \frac{1}{6} \{ (2\tau^{3/2} - \beta\tau + \beta^2\tau^{1/2}) \exp(-\beta\tau^{1/2}) - \beta^2 E_1(\beta\tau^{1/2}) \},$$

$$J_2(1/2, \beta, \tau) = \frac{1}{2} \{ (\tau - \beta\tau^{1/2}) \exp(-\beta\tau^{1/2}) + \beta^2 E_1(\beta\tau^{1/2}) \}.$$

Анализ критерия прочности

Полные механические напряжения являются суммой электромагнитной и тепловой составляющих

$$\Sigma_r = \sigma_r + s_r,$$

$$\Sigma_\theta = \sigma_\theta + s_\theta,$$

$$\Sigma_z = \sigma_z + s_z.$$

Запишем выражения для напряжений в безразмерном виде, нормируя их на текущее значение «магнитного» давления $B_0^2(t)/2\mu_0$,

$$\bar{\sigma}_r = x^{-2m_0/\sqrt{v}} - x^{-2},$$

$$\bar{\sigma}_\theta = vx^{-2m_0/\sqrt{v}} + x^{-2},$$

$$\bar{s}_r = -\frac{A_0}{m_0} \frac{2\alpha + 1}{2} \frac{\tau^{-2\alpha}}{x^2} \left\{ \frac{\tau^{2\alpha+1/2}}{2\alpha + 1/2} - 2J_1(\alpha, \beta, \tau) \right\},$$

$$\bar{s}_\theta = \frac{A_0}{m_0} \frac{2\alpha + 1}{2} \frac{\tau^{-2\alpha}}{x^2} \left\{ \frac{\tau^{2\alpha+1/2}}{2\alpha + 1/2} - 2J_1(\alpha, \beta, \tau) - 4m_0 x^2 J_2(\alpha, \beta, \tau) \right\},$$

$$\bar{s}_z = -2A_0(2\alpha + 1) J_2(\alpha, \beta, \tau) \tau^{-2\alpha}.$$

В последних выражениях фигурируют безразмерные параметры

$$A_0 = \frac{\alpha_0 E}{\gamma c(1-\nu)}, \quad m_0' = \frac{2m_0}{2\alpha + 1}.$$

Первый из них содержит в себе тепловые и механические характеристики проводника, второй характеризует глубину проникновения электромагнитного поля. Величина параметра A_0 для наиболее употребительных металлических проводников близка к 1 (см. таблицу), поэтому ниже при рассмотрении числовых результатов будем полагать $A_0 = 1$.

Материал	A_0	Материал	A_0
Бронза фосфористая	1.01	Сталь 45	0.905
Нейзильбер	1.02	Алюминий	0.945
Медь	0.945		

Интенсивность напряжений удобно характеризовать при помощи второго инварианта тензора Σ

$$I_2 = (\Sigma_r - \Sigma_z)^2 + (\Sigma_r - \Sigma_\theta)^2 + (\Sigma_z - \Sigma_\theta)^2.$$

Критерий прочности Мизеса—Генки, относящийся к числу наиболее употребительных, записывается в виде [8, 9]

$$I_2 \leq 2\sigma_x^2, \quad (18)$$

где σ_x — предел текучести материала.

В приближении идеальной проводимости, когда отсутствует нагрев и поле не проникает в проводник, I_2 можно вычислить с помощью формул Ламе (9). При этом максимальная интенсивность напряжений имеет место на поверхности проводника, где

$$I_2 = I_{2\max} = 6P_0^2,$$

$$P_0 = B_0^2/2\mu_0.$$

Отсюда следует критерий прочности

$$\frac{B^2}{2\mu_0\sigma_T} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.58.$$

При конечной проводимости цилиндра, когда электромагнитная составляющая напряжений определяется по формулам (8), максимальное значение инварианта, вычисленного без учета тепловых составляющих S_r , S_θ , S_z , как нетрудно показать, всегда меньше характерной величины $6P_0^2$. Влияние температурных составляющих напряжений приводит к существенным изменениям

картины напряженного состояния, что хорошо видно из рис. 2, где даны радиальные распределения напряжений σ , s и инварианта I_2 для случая $\alpha=1/2$, $m_0=46$.

Действие на поверхности проводника сжимающих температурных на-

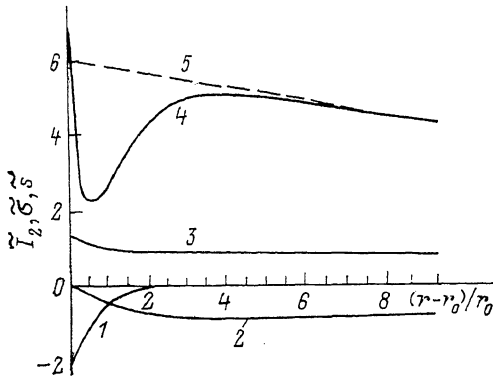


Рис. 2. Радиальные распределения азимутального температурного напряжения (1), электромагнитных составляющих напряжений σ_r , σ_θ (2, 3), интенсивности напряжений I_2 (4), а также распределение интенсивности напряжений по Ламе (5).

пряжений s_θ и s_z , превосходящих по абсолютной величине электромагнитные компоненты, приводит к тому, что поверхностный слой подвергается всестороннему сжатию и интенсивность напряжений в нем превосходит характерную величину $6P_0^2$. Выражения для безразмерных компонент напряжений на поверхности проводника ($r=r_0$) имеют следующий вид ($\tau=1$):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= 0, \quad \bar{s}_r = 0, \\ \bar{\sigma}_\theta &= 1 + \nu, \\ \bar{s}_z &= \bar{s}_\theta = -2(2\alpha + 1) \int_1^\infty \xi^{-1-4\alpha} d\xi = -(1 + 1/2\alpha). \end{aligned}$$

Сопоставляя величину суммарного азимутального напряжения на внутренней поверхности медного цилиндра при $\alpha=1/2$ $\bar{\Sigma}_\theta(r_0)=-0.42$ с данными численных расчетов напряжений в медном соленоиде при синусоидальном импульсе поля в момент максимума индукции ($\bar{\Sigma}_\theta^{\text{числ}} \cong 0.4$ [9]), убеждаемся в достаточной точности принятого приближения.

Безразмерная интенсивность напряжений I_0/P_0^2 есть

$$\bar{I}_2(r_0) = (\nu - 1/2\alpha)^2 + (1 + 1/2\alpha)^2 + (1 + \nu)^2.$$

Частичная компенсация электромагнитных составляющих напряжений в скин-слое тепловыми компонентами обуславливает заметную разгрузку материала в этой области. В связи с этим выходу зависимости $I_2(r)$ на асимптоту, соответствующую решению Ламе (9), предшествует появление максимума интенсивности напряжений на расстоянии от поверхности проводника порядка Δ (рис. 2).

Анализ последних выражений для напряжений на поверхности проводника показывает, что при значениях $\alpha < 1/2$, соответствующих более быстрому росту магнитного поля, имеет место быстрый рост интенсивности напряжений на поверхности проводника. В пределе $\alpha \rightarrow 0$ возникает режим ступенчатого роста индукции на поверхности. При этом в предположении адиабатического нагрева $I_2 \rightarrow \infty$. Поэтому при импульсах с плоской вершиной интенсивность напряжений на поверхности проводника может заметно превосходить характерную величину $6P_0^2$.

При возникновении пластических деформаций отмеченные особенности распределения интенсивности напряжений могут стать причиной образования двух зон пластичности: поверхностного слоя проводника и зоны, расположенной на расстоянии порядка Δ от поверхности.

Следует отметить, что по окончании импульса индукции, когда исчезают электромагнитные составляющие напряжений, распределение интенсивности напряжений имеет один максимум в точке $r=r_0$, в которой

$$I_2 = 2s_0^2,$$

где $s_0 = s_z(r_0) = s_\theta(r_0) \cong Q_0$.

Численное значение нагрева поверхности Q_0 определяется формой и длительностью импульса индукции и может в практически важных частных случаях в несколько раз превосходить P_0 [2].

Полученные выше результаты соответствуют азимутальному направлению тока в цилиндре и аксиальному для вектора плотности тока. Нетрудно показать, что в режиме резкого поверхностного эффекта ($m \gg 1$) приведенные выше выражения будут справедливы и при аксиальном направлении тока в азимутальном направлении вектора индукции.

Список литературы

- [1] Шнейерсон Г. А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. Л.: Энергоиздат, 1981. 199 с.
- [2] Титков В. В. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 10. С. 72—77.
- [3] Кнопфель Г. Сверхсильные магнитные поля. М.: Мир, 1972. 391 с.
- [4] Шнейерсон Г. А. // ЖТФ. 1973. Т. 48. Вып. 2. С. 418—428.
- [5] Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
- [6] Боли Б., Чэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 510 с.
- [7] Техника больших импульсных токов и магнитных полей / Под ред. П. Н. Дашука. М.: Атомиздат, 1970. 472 с.
- [8] Ионов В. И., Селиванов В. В. Динамика разрушения деформируемого тела. М.: Машиностроение, 1987. 271 с.
- [9] Farynski A., Karpinski L., Nowak A. // J. Techn. Phys. 1979. Vol. 20. N 2. P. 265—280.

Ленинградский политехнический
университет

Поступило в Редакцию
5 марта 1990 г.
В окончательной редакции
4 апреля 1990 г.