

10

© 1991 г.

К ТЕОРИИ РЕЗОНАНСНЫХ ЭФФЕКТОВ В ЭЛЕКТРОННЫХ СИНХРОТРОНАХ

В. П. Белов, А. А. Макаров, В. Ц. Никогосян,¹ К. А. Садоян¹

В отличие от протонных циклических ускорителей движение частиц в электронных синхротронах в большой степени зависит от радиационных эффектов. В работе рассмотрена динамика частиц вблизи резонансов в электронных синхротронах. Результаты иллюстрируются построением фазовых диаграмм.

Введение

Теория резонансов в ускорителях заряженных частиц разработана еще в 50-е годы [1]. Одним из методов анализа является метод фазовой плоскости — построение фазовых диаграмм при разных расстройках от резонанса. Этот метод отличается большой наглядностью, хорошо апробирован и для протонных ускорителей является достаточно точным приближением. В циклических электронных ускорителях фазовые диаграммы в том виде, как они изображаются для протонных машин, в принципе неверны, причиной тому является синхротронное излучение, приводящее к непрерывной раскачке или затуханию бетатронных колебаний. Демпфирование, например, радиальных колебаний не меняет ситуации, так как их квантовая раскачка все равно остается. Учет синхротронного излучения приводит к тому, что движение на всей фазовой плоскости становится неустойчивым и сепаратрисы больше не существует. Однако при достаточной силе резонанса характерное n -угольное строение фазовых диаграмм для резонанса n -го порядка сохраняется, сепаратриса размыкается, появляются «щели» в ее углах и образуется квазисепаратриса. В зависимости от выбора магнитной структуры синхротрона может иметь место радиационное затухание или раскачка радиальных колебаний, изображающие точки могут «втекать» в область внутри квазисепаратрисы из области вне ее или «вытекать» из нее через «щели» в ней. Этот эффект, насколько нам известно, не описан, и фазовые диаграммы, показанные здесь, приводятся впервые.

Все рассмотрение мы проведем на примере конкретного резонанса, например резонанса третьего порядка $3\nu_x = m$, ν_x — число радиальных бетатронных колебаний; m — целое число, номер резонансной гармоники секступольного поля. В разделе 1 получены укороченные уравнения Боголюбова—Крылова, описывающие резонанс с учетом синхротронного излучения. В разделах 2 и 3 изучается строение фазовых диаграмм.

1. Укороченные уравнения для резонанса $3\nu_x = m$ с учетом синхротронного излучения

Радиально-фазовое движение электронов в синхротроне с учетом их излучения при наличии резонанса радиальных бетатронных колебаний $3\nu_x = m$ описывается системой дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{d^2x}{ds} \left(1 + \frac{\Gamma}{R_0} \right) \frac{dx}{ds} + \frac{1-n}{R^2} x = \frac{1}{R} \frac{\Delta E}{E_s} - \frac{1}{2} n_1 \frac{x^2}{R^3},$$

¹ Сотрудники Ереванского физического института.

$$\frac{1}{E_s} \frac{d\Delta E}{ds} = -\frac{eV_0 \sin \varphi_s}{2\pi R_0 E_s} \eta - \Gamma \left[(1-2n) \frac{x}{R} + 2 \frac{\Delta E}{E_s} \right] + \frac{w(s)}{E_s},$$

$$\frac{d\eta}{ds} = q \frac{x}{RR_0}. \quad (1)$$

Здесь $\Gamma/R_0 = W/(cE_s)$ — относительная потеря энергии электрон m на излучение на единице пути; $\Gamma_1 = (1/E_s)(dE/ds)$ — изменение энергии за счет ускорения; ΔE — разброс энергии частиц в пучке; $w(s) = \sum_k \mathcal{E}_k \delta(s-s_k) - \sum_k \mathcal{E}_k \delta(s-s_k)$; \mathcal{E}_k — энергия кванта, излученного в направлении движения на азимуте s_k ; черта — усреднение по ансамблю испущенных квантов;

$$n = -\frac{R}{H_z} \left(\frac{\partial H_z}{\partial X} \right)_0, \quad n_1 = \frac{R^2}{H_z} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \right)_0;$$

R — радиус кривизны частиц с энергией E в магнитном поле напряженности H_z ; $\eta = \varphi - \varphi_s$ — отклонение фазы ВЧ от равновесной; V_0 — амплитуда ВЧ напряжения на резонаторах; R_0 — средний радиус кольцевого электромагнита синхротрона.

В силу статистической независимости отдельных актов испускания квантов имеем [1]

$$\overline{w(s)} = 0, \quad \overline{w(s)w(s')} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{r_0 \Lambda}{R^3} \gamma^{5\delta} (s-s'),$$

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}, \quad \Lambda = \frac{\hbar}{mc}. \quad (2)$$

Исключая $\Delta E/E_s$ в первом уравнении системы (1), получим уравнение радиальных бетатронных колебаний в виде

$$\chi'' + \chi \frac{1-n}{R^2} = -2\psi' \frac{w}{E_s} - \psi \frac{w'}{E_s} - \frac{1}{2} n_1 \chi^2 \frac{1}{R^3} - \chi' \left[\Gamma_1 + \Gamma (1 - (1-2n) \frac{x}{R}) \right] =$$

$$= \mathcal{F}_x(\chi, \psi, w; s),$$

$$x = \psi \frac{\Delta E}{E_s} + \chi, \quad (3)$$

$\psi(s)$ — дисперсионная функция кольцевого электромагнита синхротрона.

Уравнение (3) учитывает только линейные по w и Γ слагаемые [1]. Вблизи резонанса $3\nu_x = m + \delta$ его решение будем искать в виде

$$\chi = a\varphi + a\varphi^* = (\varepsilon\beta)^{1/2} \cos \Theta,$$

$$\chi' = a\varphi' + a^*\varphi'^* = -\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^{1/2} [\alpha \cos \Theta + \sin \Theta], \quad (4)$$

$a = |a|e^{i\theta}$, $\Theta = \theta + \lambda + (\nu_x s/R_0)$, $\varepsilon = 4|a|^2 \Delta$; α , β — параметры Твисса;

$$\lambda_s = \lambda_0 + \int_0^s \frac{ds}{\beta} - \nu_x \frac{s}{R_0}$$

— фаза функции Флоке;

$$\delta = \nu_x - \frac{m}{3} + \nu_x \frac{\Delta p}{p}$$

— расстройка от резонанса для частицы с импульсом $p_0 + \Delta p$; ν_x — радиальная хроматичность кольцевого электромагнита синхротрона; $\Delta = 1$ м — Вронский.

Комплексная амплитуда a удовлетворяет уравнению

$$\frac{da}{ds} = \frac{1}{2i\Delta} \mathcal{F}_x(\chi, \psi, w; s) \varphi^*. \quad (5)$$

Его решение ищем методом вариации постоянных:

$$a \rightarrow a + \frac{1}{2i\Delta} \int_0^s \mathcal{F}_x(\chi, \psi, w; s') \varphi^* ds'. \quad (6)$$

Наша цель — учесть влияние синхротронного излучения на динамику частиц, используя метод усреднения Боголюбова—Крылова и статистическое усреднение по ансамблю квантов. Согласно (2), квантовые флуктуации излучения дают ненулевой вклад только в том случае, если описывающие их слагаемые входят в уравнение квадратично. В уравнение (5) они входят линейно и при статистическом усреднении по ансамблю испущенных квантов обратятся в нуль. Каноническими переменными, как известно, являются $|a|^2 = \varepsilon/(4\Delta)$ и фаза θ . В уравнение для $|a|^2$ члены $\sim w(s)$ войдут квадратично, и это позволит их учесть. Составим комбинации

$$\begin{aligned} a \frac{da^*}{ds} \pm a^* \frac{da}{ds} &= \left(a + \frac{1}{2i\Delta} \int_0^s \mathcal{F}_x \varphi^* ds' \right) \left(-\frac{1}{2i\Delta} \mathcal{F}_x^* \varphi \right) \pm \\ &\pm \left(a^* - \frac{1}{2i\Delta} \int_0^s \mathcal{F}_x^* \varphi ds' \right) \left(\frac{1}{2i\Delta} \mathcal{F}_x \varphi \right) = \begin{cases} \frac{d|a|^2}{ds}, \\ -2i|a|^2 \frac{d\theta}{ds}. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Раскрывая (7), получим

$$\begin{aligned} \frac{d|a|^2}{ds} &= \frac{1}{\Delta} \operatorname{Im} (a^* \mathcal{F}_x \varphi^*) + \frac{1}{2\Delta^2} \operatorname{Re} \left(\mathcal{F}_x \varphi^* \int_0^s \mathcal{F}_x \varphi(s') ds' \right), \\ \frac{d\theta}{ds} &= \frac{1}{2|a|^2} \left[\frac{1}{\Delta} \operatorname{Re} (a^* \mathcal{F}_x \varphi^*) - \frac{1}{2\Delta^2} \operatorname{Im} \left(\mathcal{F}_x \varphi^* \int_0^s \mathcal{F}_x \varphi(s') ds' \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Второе слагаемое первого уравнения преобразуем к виду

$$\frac{1}{2\Delta^2} \operatorname{Re} \left(\mathcal{F}_x \varphi^* \int_0^s \mathcal{F}_x^* \varphi(s') ds' \right) = \frac{1}{4\Delta^2} \frac{d}{ds} \left| \int_0^s \mathcal{F}_x \varphi^*(s') ds' \right|^2. \quad (9)$$

Оставляя в (9) только слагаемые, описывающие квантовую раскачку колебаний, получим

$$\left\langle \int_0^s f(s) ds \right\rangle = \frac{1}{2\pi R_0} \int_0^{2\pi R_0} f(s) ds,$$

$$\frac{1}{2\Delta^2} \operatorname{Re} \left(\mathcal{F}_x \varphi^* \int_0^s \mathcal{F}_x^* \varphi(s') ds' \right) = \frac{1}{4\Delta^2} \frac{d}{ds} \left(\left| \int_0^s \frac{w(s')}{E_s} (\varphi'^* \psi - \varphi^* \psi') ds' - \frac{w}{E_s} \varphi^* \psi \right|^2 \right). \quad (10)$$

Усредняя (10) по фазам бетатронных колебаний и проводя статистическое усреднение по ансамблю квантов, окончательно найдем

$$\left\langle \frac{1}{2\Delta^2} \operatorname{Re} \left(\mathcal{F}_x \varphi^* \int_0^s \mathcal{F}_x^* \varphi(s') ds' \right) \right\rangle = \frac{55}{96 \sqrt{3}} \frac{r_0 \Delta \gamma^5}{\Delta^2 E_s^2} \left\langle \frac{1}{R^2} |\psi \varphi'^* - \psi' \varphi^*|^2 \right\rangle = \frac{A}{4\Delta}. \quad (11)$$

Аналогично получим

$$\left\langle \frac{1}{2\Delta^2} \operatorname{Im} \left(\mathcal{F}_x \varphi^* \int_0^s \mathcal{F}_x^* \varphi(s') ds' \right) \right\rangle = 0. \quad (12)$$

Первые члены уравнений (8) после усреднения по фазам бетатронных колебаний и статистического усреднения по ансамблю квантов равны

$$\frac{1}{\Delta} \langle \text{Im}(a^* \mathcal{F}_x \varphi^*) \rangle = |F_m| |a|^2 \sin\left(3\theta + \frac{\delta}{R_0} s - \arg F_m\right) - \frac{2}{R_0} |a|^2 \left\langle \Gamma_1 - \Gamma \left[1 - (1 - 2n) \frac{\psi}{R}\right] \right\rangle, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \langle \text{Re}(a^* \mathcal{F}_x \varphi^*) \rangle = |F_m| |a|^2 \cos\left(3\theta + \frac{\delta}{R_0} s - \arg F_m\right),$$

$$F_m = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi R_0} \frac{ds}{(HR)} \left(\frac{d^2 H_z}{dx^2}\right) \beta^{3/2} e^{-3i\lambda - im \frac{s}{R_0}}. \quad (14)$$

Уравнения (8) в переменных $\varepsilon = 4\Delta |a|^2$, $\Phi = \theta + (\delta/R) s$ примут окончательный вид

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = A - \left[\langle \xi_x \rangle + \frac{d}{ds} \ln \gamma \right] \varepsilon - \frac{|F_m|}{2R_0} \varepsilon^{3/2} \sin(3\Phi - \arg F_m),$$

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\delta}{R_0} - \frac{|F_m|}{R_0} \varepsilon^{1/2} \cos(3\Phi - \arg F_m);$$

$$A = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{r_0 \Delta K}{R_0 \beta_{\max}^3} \gamma^5,$$

$$K = \frac{\beta_{\max} R_0}{\Delta} \left\langle \frac{1}{R^3} [\psi^2 |\varphi'|^2 - |\varphi|^2 \psi \psi' + |\varphi|^2 \psi'^2] \right\rangle,$$

$$\langle \xi_x \rangle = \frac{2}{R_0} \left\langle \Gamma \left[1 - (1 - 2n) \frac{\psi}{R}\right] \right\rangle, \quad \Gamma = \frac{2}{3} r_0 \frac{R_0}{R^2} \gamma^3. \quad (15)$$

Фактор K в (15) можно записать так:

$$K = \beta_{\max} R_0 \left\langle \frac{1}{R^3} [\beta \psi'^2 + 2\alpha \psi \psi' + \gamma \psi^2] \right\rangle,$$

где $\gamma = 1 + \alpha^2/\beta$.

Множитель в квадратных скобках есть уравнение эллипса на фазовой плоскости (ψ, ψ')

$$\beta \psi'^2 + 2\alpha \psi \psi' + \gamma \psi^2 = \varepsilon_\psi,$$

а величина ε_ψ равна площади эллипса S_ψ , деленной на π : $\varepsilon_\psi = S_\psi/\pi$. Полагая $\psi_{\max} = (\varepsilon_\psi \beta_{\max})^{1/2}$, найдем, что

$$K = \left(\frac{\psi_{\max}}{R}\right)^2 \quad (16)$$

при одинаковом радиусе кривизны во всех дипольных магнитах синхротрона. Эта формула позволяет сделать быстрые и достаточно точные оценки параметра K .

Система уравнений (15) описывает совместное действие резонанса $3\nu_x = m$ и синхротронного излучения. Слагаемое A в ее первом уравнении определяет рост амплитуды радиальных колебаний под действием квантовой раскачки и в укороченных уравнениях учитывается впервые. Второе слагаемое $\langle \xi_x \rangle$ в нем отвечает затуханию ($\langle \xi_x \rangle > 0$) или росту ($\langle \xi_x \rangle < 0$) амплитуды радиальных колебаний, обусловленному классической частью синхротронного излучения. Значение $\langle \xi_x \rangle$ можно регулировать с помощью специальных демпфирующих устройств [1], $(d \ln \gamma)/(ds)$ соответствует адиабатическому затуханию колебаний с ростом энергии электронов. Это стандартный член. Он отсутствует, например, в режиме накопления и медленного вывода, и для простоты рассмотрения мы не будем его учитывать.

В отсутствие резонанса ($|F_m| = 0$) решение уравнений (15) описывает изменение амплитуды радиальных колебаний под действием синхротронного излучения. Оно имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{\langle \xi_x \rangle} \left[A - (A - \langle \xi_x \rangle \varepsilon_0) \exp \left(-\frac{\delta}{R_0} \langle \xi_x \rangle (\Phi - \Phi_0) \right) \right]. \quad (17)$$

В пределе $\Phi \rightarrow \infty$ при $\langle \xi_x \rangle > 0$ (17) определяет установившуюся под действием квантовой раскочки и классического радиационного затухания амплитуду радиальных бетатронных колебаний ε

$$\varepsilon_{уст} = \frac{A}{\langle \xi_x \rangle}. \quad (18)$$

На фазовой плоскости $(\varepsilon, \Phi - \arg F_m)$ этому процессу отвечает устойчивый предельный цикл. В отсутствие излучения ($A=0, \langle \xi_x \rangle=0$) система уравнений (15) описывает резонанс $3\nu_x = m$. При малых амплитудах бетатронных колебаний определяющими в уравнении (15) являются слагаемые с $|F_m| = 0$ и фазовая диаграмма представляет собой раскручивающуюся спираль ($\varepsilon=0$ — особая точка типа неустойчивый фокус) вследствие квантовой раскочки радиальных колебаний. При несколько больших амплитудах может иметь место устойчивый предельный цикл ($\langle \xi_x \rangle > 0$). Для больших амплитуд бетатронных колебаний определяющим является резонансный член с $|F_m|$ и фазовая диаграмма должна иметь характерное резонансное строение.

2. Фазовые диаграммы резонанса $3\nu_x = m$ для электронных синхротронов

Тип решений системы (15) полностью определяется положением и характером ее особых точек на фазовой плоскости. Их координаты находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 - \varepsilon_{ст} \varepsilon^2 - (\varepsilon_{кв}^{3/2} - \varepsilon_{кл}^{1/2} \varepsilon)^2 &= 0, \\ \operatorname{tg} (3\Phi - \arg F_m) &= \frac{\varepsilon_{кв}^{3/2} - \varepsilon_{кл}^{1/2} \varepsilon}{\varepsilon \varepsilon_{ст}^{1/2}}, \end{aligned} \quad (19)$$

где введены обозначения

$$\varepsilon_{ст} = \left(\frac{4\delta}{|F_m|} \right)^2, \quad \varepsilon_{кв} = \left(\frac{2R_0 A}{|F_m|} \right)^{2/3}, \quad \varepsilon_{кл} = \left(\frac{2R_0 \langle \xi_x \rangle}{|F_m|} \right)^2, \quad (20)$$

$\varepsilon_{ст}$ — координаты особых точек в случае отсутствия излучения $A=0, \langle \xi_x \rangle=0$; $\varepsilon_{кв}$ и $\varepsilon_{кл}$ — координаты особых точек при расстройке $\delta=0$ и соответственно в случае чисто квантовой ($\langle \xi_x \rangle=0$) и чисто классической ($A=0$) радиационной раскочки (затухания) радиальных колебаний.

Аналитическое исследование характера особых точек затруднено громоздкостью выражений. Поэтому дальше исследование проводится численно для трех возможных значений регулируемого параметра $\langle \xi_x \rangle$, характеризующего влияние классической части синхротронного излучения $\langle \xi_x \rangle \geq 0$. Первый интеграл (гамильтониан) система (15) имеет при $\langle \xi_x \rangle=0$

$$\mathcal{H} = \frac{|F_m|}{2R_0} \left[\varepsilon_{кв}^{3/2} \Phi - \frac{1}{2} \varepsilon_{ст}^{1/2} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon^{3/2} \cos (3\Phi - \arg F_m) \right]. \quad (21)$$

Он обладает симметрией. Именно совокупность фазовых кривых в области

$$0 \leq \Phi - \frac{1}{3} \arg F_m \leq \frac{2}{3} \pi,$$

соответствующая значению $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$, идентична совокупности фазовых кривых в области

$$\frac{2}{3} k\pi \leq \Phi - \frac{1}{3} \arg F_m \leq \frac{2}{3} (k+1)\pi, \quad k=0, 1, 2$$

при значении гамильтониана $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + (2/3) k\pi$. В остальных случаях интегральные кривые системы (15) даются решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{d\Phi} = \frac{1}{y} \frac{\left(\frac{\varepsilon_{\text{кр}}^{1/2}}{\varepsilon_{\text{KB}}}\right) y^2 + y^3 \sin(3\Phi - \arg F_m) - 1}{y \cos(3\Phi - \arg F_m) - \left(\frac{\varepsilon_{\text{сг}}}{\varepsilon_{\text{KB}}}\right)^{1/2}},$$

$$y = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{KB}}}\right)^{1/2}. \quad (22)$$

Фазовые диаграммы для резонанса $3\nu_x = m$ представлены на рис. 1—6. Расчеты выполнены при значениях $|F_m| = 0.8292 \text{ см}^{-1/2}$, $R_0 = 34.49 \text{ м}$, $|\langle \xi_x \rangle| = 3.3235 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1}$, $A = 3.7281 \cdot 10^{-12}$, характерных для ереванского электронного синхротрона на энергию 6 ГэВ.

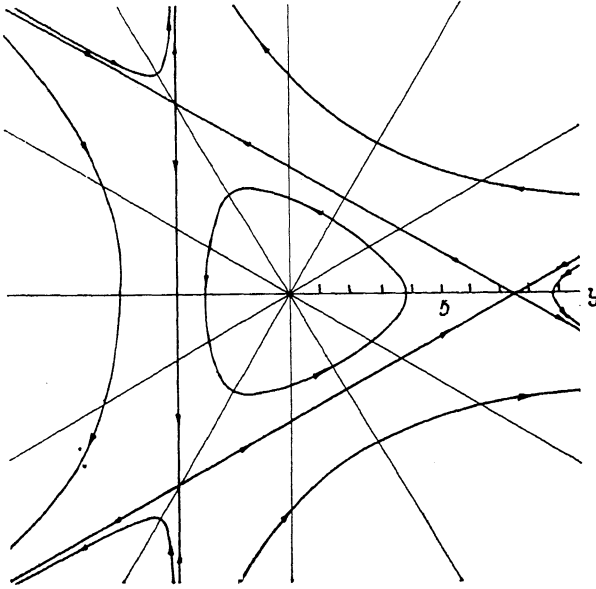


Рис. 1. Фазовая диаграмма резонанса $3\nu_x = m$ без учета синхротронного излучения $A=0$, $\langle \xi_x \rangle = 0$. Расстройка $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$.

Для сравнения на рис. 1 приведена фазовая диаграмма, соответствующая отсутствию синхротронного излучения $\langle \xi_x \rangle = 0$, $A=0$ (стандартная для протонных синхротронов) и расстройке $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$. Центр фазовой диаграммы $\varepsilon=0$ является особой точкой типа центр, остальные, лежащие на лучах $\Phi_{\text{сг}} = \Phi - (1/3) \arg F_m = (k/3) \pi$, $k=0, 2, 4$, — типа седло. Существует сепаратриса, проходящая через седлообразные точки $\varepsilon_{\text{сг}}$ и разделяющая области устойчивого (внутри сепаратрисы) и неустойчивого (вне ее) движения. Внутри сепаратрисы интегральные кривые замкнуты. При $\delta \rightarrow 0$ седлообразные точки $\varepsilon_{\text{сг}}$ по лучам $\Phi_{\text{сг}}$ приближаются к нулю, уменьшая область устойчивости, для $\delta=0$ сепаратриса вырождается в лучи $(2k+1) (\pi/6)$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

На рис. 2—4 представлены фазовые диаграммы, соответствующие учету радиационной раскачки радиальных колебаний $\langle \xi_x \rangle < 0$, $A \neq 0$ для расстройки $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-4}$, 0. Движение на всей фазовой плоскости неустойчиво, сепаратрисы нет, но есть квазисепаратриса (рис. 2), разомкнутая в вершинах квазитреугольника (особые точки типа седло) с координатами, определяемыми из решения системы (19). $\varepsilon=0$ является особой точкой типа неустойчивый фокус ($\delta = 5 \cdot 10^{-3}$) (рис. 2) или неустойчивый узел ($\delta = 5 \cdot 10^{-4}$, 0) (рис. 3, 4). Даже при больших расстройках ($\delta = 5 \cdot 10^{-3}$) со временем частицы будут непрерывно вытекать через «щели» квазисепаратрисы вблизи ее углов наружу. Существуют два механизма увеличения амплитуды радиальных колебаний: ее медленный рост внутри квазисепаратрисы под действием радиационной раскачки до достижения ею порогового значения $(\varepsilon_{\text{сг}})^{1/2}$ и быстрый резонансный рост за ним.

ε_c, Φ_c — решения уравнений (19) — координаты неустойчивых седловых точек. Если пучок занимает всю область внутри квазисепаратрисы, соответствующей

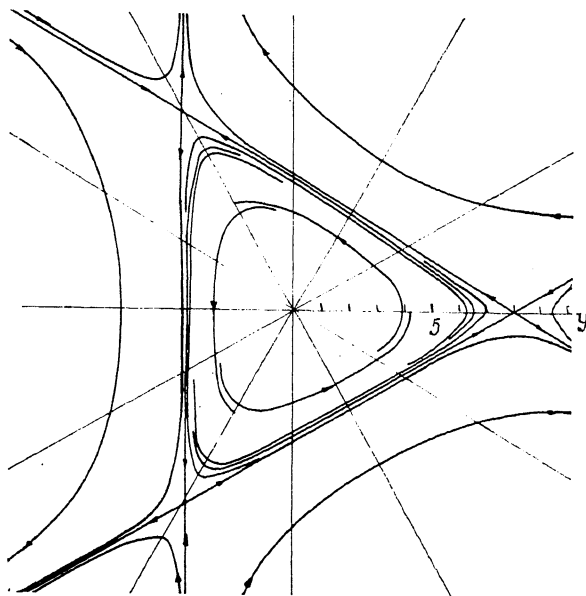


Рис. 2. Фазовая диаграмма резонанса $3\nu_x = m$ с учетом синхротронного излучения $\langle \xi_x \rangle < 0$, $\delta = 5 \cdot 10^{-3}$.

расстройке $\delta = \delta_{\text{нач}}$, то частицы будут медленно «вытекать» из нее через «щели» и затем быстро за счет резонанса выводиться наружу или попадать на стенки камеры при постоянной расстройке δ . С уменьшением расстройки ($\delta \rightarrow 0$)

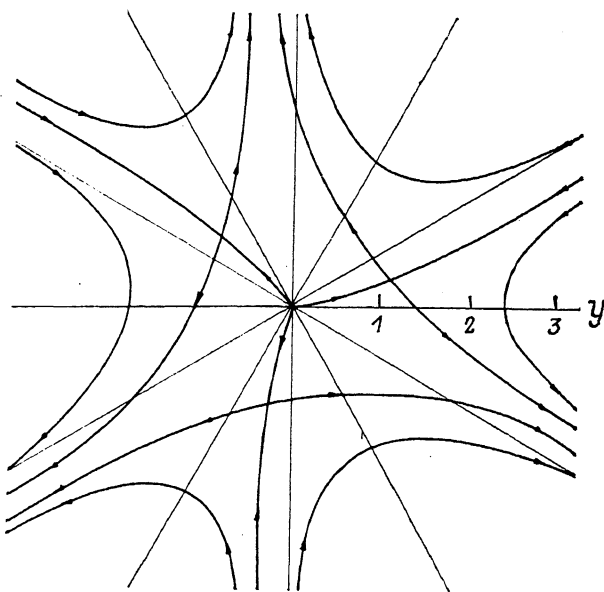


Рис. 3. Фазовая диаграмма резонанса $3\nu_x = m$ с учетом синхротронного излучения $\langle \xi_x \rangle < 0$, $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$.

седловые особые точки на поворачивающихся лучах $\Phi_c = (1/3) \arg F_m$ приближаются к центру фазовой диаграммы. Однако они не достигают ее и при $\delta = 0$, а максимальный угол поворота Φ_c составляет 30° (рис. 4). При компенсации

классической части синхротронного излучения ($\langle \xi_x \rangle = 0$) имеет место раскачка радиальных колебаний под действием квантовых флуктуаций излучения, качественно фазовые диаграммы подобны показанным на рис. 2—4.

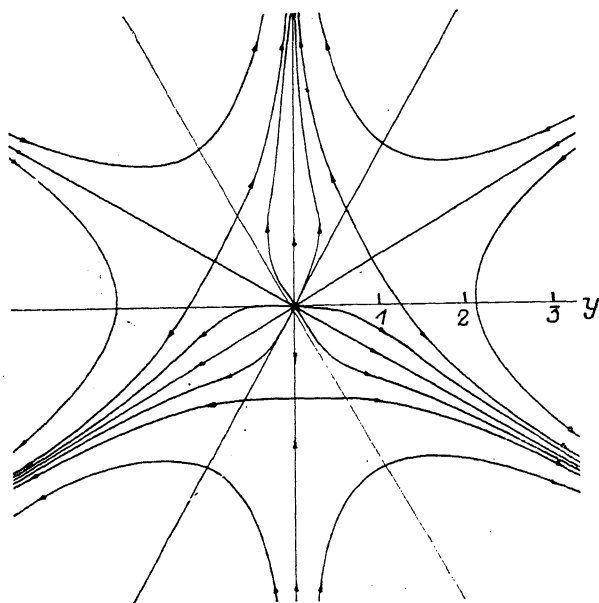


Рис. 4. Фазовая диаграмма резонанса $3\nu_x = m$ с учетом синхротронного излучения $\langle \xi_x \rangle < 0$, $\delta = 0$.

На рис. 5 приведена фазовая диаграмма, соответствующая квантовой раскачке и классическому радиационному затуханию радиальных колебаний

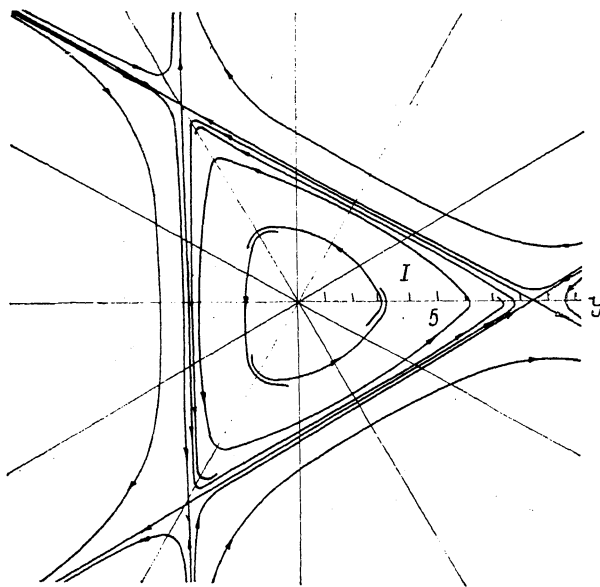


Рис. 5. Фазовая диаграмма резонанса $3\nu_x = m$ с учетом синхротронного излучения $\langle \xi_x \rangle > 0$, $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$.

I — устойчивый предельный цикл.

$A \neq 0$, $\langle \xi_x \rangle > 0$ для расстройки $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$. Существует устойчивый предельный цикл. $\varepsilon = 0$ — особая точка типа неустойчивый фокус. Три механизма изменяют

амплитуду радиальных бетатронных колебаний при больших расстройках ($\delta \geq 0.004$): 1) квантовая раскачка обеспечивает ее медленный рост от нуля до значения, соответствующего устойчивому предельному циклу; 2) классическое радиационное затухание приводит к ее медленному уменьшению от больших значений в узкой области между асимптотически приходящими ветвями квазисепаратрисы до устойчивого предельного цикла (непрерывное «втекание» изображающих точек через щели квазисепаратрисы в ее углах); 3) резонанс обуславливает быстрое уменьшение и затем рост амплитуды в остальных областях вне квазисепаратрисы.

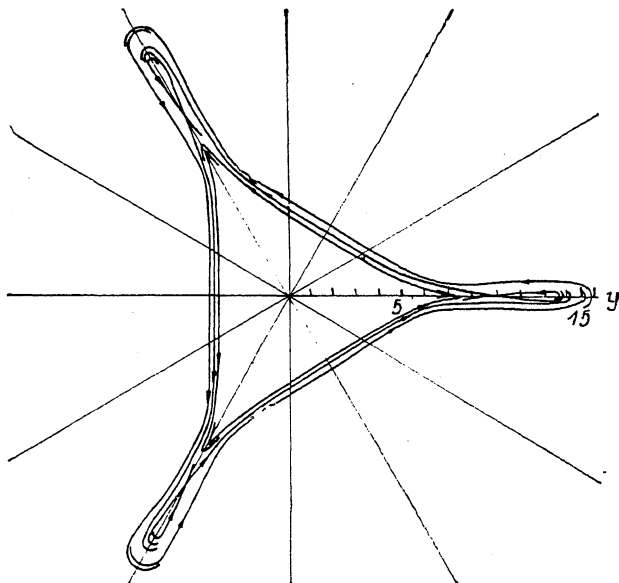


Рис. 6. Фазовая диаграмма резонанса $3\nu_x = m$ с учетом синхротронного излучения и регулярной кубической нелинейности $\langle \xi_x \rangle > 0$ ($\delta = 2.5 \cdot 10^{-3}$).

Эти особенности строения фазовых диаграмм сохраняются и для других расстроек. При $\delta = 0$ фазовая диаграмма практически совпадает с приведенной на рис. 4 для $\langle \xi_x \rangle < 0$.

3. Влияние регулярной кубической нелинейности на строение фазовых диаграмм

Регулярная кубическая нелинейность $\partial^3 H / \partial x^3$ оказывает стабилизирующее воздействие на развитие резонанса. С ее учетом укороченные уравнения (15) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{ds} &= A - \langle \xi_x \rangle \varepsilon - \frac{|F_m|}{2R_0} \varepsilon^{3/2} \sin(3\Phi - \arg F_m), \\ \frac{d\Phi}{ds} &= \frac{\delta}{R_0} + \frac{B}{R_0} \varepsilon - \frac{|F_m|}{4R_0} \varepsilon^{1/2} \cos(3\Phi - \arg F_m), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$B = \frac{1}{32\pi} \int_0^{2\pi E_0} \frac{ds}{HR} \frac{\partial^3 H_x}{\partial x^3} \beta^2.$$

Согласно уравнениям (23), $B < 0$ отвечает втягиванию в резонанс, а $B > 0$ — удалению от него. Координаты особых точек находятся из решения уравнений

$$\varepsilon^4 - \varepsilon^3 \varepsilon_{\text{куб}} \left[1 - 2 \left(\frac{\varepsilon_{\text{ст}}}{\varepsilon_{\text{куб}}} \right)^{1/2} \right] + \varepsilon^2 (\varepsilon_{\text{к.л}} + \varepsilon_{\text{ст}}) \varepsilon_{\text{куб}} - 2\varepsilon (\varepsilon_{\text{к.л}} \varepsilon_{\text{кв}})^{1/2} \varepsilon_{\text{куб}} + \varepsilon^3 \varepsilon_{\text{куб}} = 0,$$

$$\Phi = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_{\text{кв}}^{3/2} - \varepsilon \varepsilon_{\text{к.л}}^{1/2}}{\varepsilon (\varepsilon_{\text{ст}}^{1/2} + \varepsilon / \varepsilon_{\text{куб}}^{1/2})}.$$

Все особые точки системы (23) типа седло или неустойчивый фокус. Типичная фазовая диаграмма представлена на рис. 6. Как и при $B=0$ (раздел 2), сепаратриса отсутствует и все движение на фазовой плоскости, исключая устойчивый предельный цикл, неустойчиво.

Заключение

Представленные здесь фазовые диаграммы построены для случая специально созданного резонанса (большие значения силы резонанса $|F_m|$) при учете действия синхротронного излучения. Если резонанс имеет место на возмущениях поля, то топология фазовых диаграмм становится существенно сложнее, так как эффекты сравниваются по силе, и, например, седловые особые точки могут находиться внутри предельного цикла. Аналогичные особенности строения имеют фазовые диаграммы и для резонанса порядка n .

Список литературы

- [1] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Теория циклических ускорителей. М.: ГИФМЛ, 1962. 352 с.

Поступило в Редакцию
9 августа 1989 г.