

09; 10

© 1991 г.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАССЫ И ЦИКЛОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПОТОКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ-ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В. Л. Братман, С. В. Самсонов

Получена система нелинейных самосогласованных уравнений, описывающих развитие одномерных флуктуаций поля пространственного заряда плоского тонкого (толщиной в ларморовский диаметр) потока релятивистских электронов, движущихся в однородном магнитном поле в свободном пространстве. Собственное поле возмущенного потока наряду с кулоновским содержит также вихревые компоненты. При малой концентрации потока найдены поправки к циклотронным гармоникам частоты его собственных колебаний. Инкремент неустойчивости, обусловленной эффектом отрицательной массы, уменьшается с ростом поступательной скорости электронов. При релятивистских скоростях частиц существенную роль играют вихревые поля. Учет эффектов, связанных с этими полями, в частности излучения, уносящего энергию от потока, качественно изменяет зависимость инкремента от энергии частиц и номера циклотронной гармоник.

Введение

Неустойчивость отрицательной массы [1, 2], возникающая вследствие эффективного притяжения (группировки по фазам) расталкивающихся кулоновскими силами неизохронных электронов-осцилляторов, играет существенную роль в слабoreлятивистских мазерах на циклотронном резонансе. В мощных приборах вследствие этого эффекта могут значительно увеличиваться усиление и снижаться стартовые токи [3-8]. Еще более существенно подобные эффекты должны проявляться в релятивистских мазерах на циклотронном резонансе, где обычно плотность электронных потоков значительно выше, чем в слабoreлятивистских приборах.

Важно подчеркнуть, что при релятивистских скоростях частиц для развития неустойчивости наряду с кулоновскими полями существенны также и собственные вихревые поля, уносящие энергию от потока. В настоящей работе проводится детальное исследование неустойчивости собственных колебаний релятивистского винтового электронного потока на основной циклотронной частоте и ее гармониках (в том числе и в синхротронном пределе), последовательно учитывающее влияние вихревых полей на неустойчивость отрицательной массы.

Модель и стационарное состояние электронного потока

Рассмотрим плоский нескомпенсированный поток релятивистских электронов, движущихся в однородном магнитостатическом поле $H_0 z_0$ (рис. 1, а). Пусть в невозмущенном состоянии все электроны имеют одинаковые поступательные $v_{||0}$ и вращательные скорости $v_{\perp 0}$, равномерно распределены по фазам вращения, а их центры вращения равномерно распределены в плоскости yz . В кинематическом пределе, когда концентрация частиц N исчезающе мала, электроны совершают циклотронное движение

$$x = X + a_0 \cos \Theta, \quad y = Y + a_0 \sin \Theta, \quad z = v_{||0}t + z_0, \quad (1)$$

$X = 0$; Y — координаты центров вращения частиц, где $a_0 = v_{\perp 0}/\omega_{H_0}$ — гирорадиус; $\Theta = \omega_{H_0}t + \varphi$ — циклотронная фаза; $\omega_{H_0} = (eH_0)/(mc\gamma_0)$ — циклотронная частота; $\gamma_0 = (1 - \beta_{||0}^2 - \beta_{\perp 0}^2)^{-1/2}$ — релятивистский масс-фактор электрона, $\beta_{\perp 0} = v_{\perp 0}/c$, $\beta_{||0} = v_{||0}/c$.

В каждом сечении имеется два встречных потока частиц, преобразующихся друг в друга на границах $x = \pm a_0$. Используя уравнение непрерывности для каждого из потоков, получаем кинематическое распределение концентрации электронов

$$N = N_0 \frac{v_{\perp 0}}{v_x} = N_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a_0} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2)$$

где N_0 — концентрация в плоскости симметрии $x=0$ (рис. 1, а).

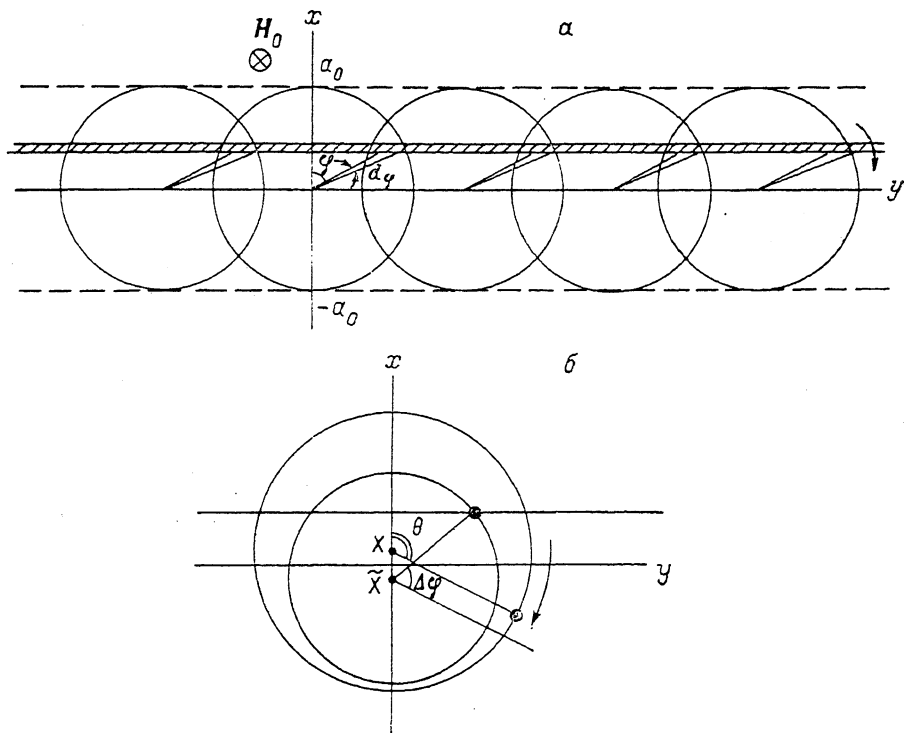


Рис. 1. Модель электронного потока.

а — начальное невозмущенное состояние; выделен плоский слой, содержащий частицы с начальными фазами из интервала $(\varphi; \varphi + \Delta\varphi)$; б — возмущенное движение электронов.

При малой средней концентрации можно найти собственные статические поля потока и изменение движения частиц под влиянием этих полей методом возмущения, используя соотношение (2). Электростатическое поле имеет единственный компонент

$$E_x = -H_0 \beta_{\perp 0} \frac{\omega_{p_0}^2}{\omega_{H_0}^2} \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a_0}, & |x| \leq a_0, \\ 1, & |x| > a_0, \end{cases} \quad (3)$$

перпендикулярный потоку; для собственного магнитостатического поля имеем

$$H_y = \beta_{||0} E_x, \quad H_z = -H_0 \beta_{\perp 0}^2 \frac{\omega_{p_0}^2}{\omega_{H_0}^2} \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_0} \right)^2}, & |x| \leq a_0, \\ 0, & |x| > a_0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\omega_{p_0} = ((4\pi e^2 N_0 / (m\gamma_0))^{1/2}$ — плазменная частота, соответствующая концентрации в плоскости симметрии потока. Компонент H_y связан с продольным движением частиц, а H_z — с их вращением.

Используя (3) и (4), найдем, например, среднее центростремительное ускорение частицы

$$m\gamma_0 v_{\perp 0} \Omega = eH_0 \beta_{\perp 0} + e(\overline{E_x \cos \Theta} - \beta_{\parallel 0} \overline{H_y \cos \Theta}) + e\overline{H_z} \beta_{\perp 0} \quad (5)$$

и отличие частоты обращения электрона Ω от циклотронной частоты

$$\Omega = \omega_{H_0} \left[1 - \frac{2}{\pi} \alpha \gamma_0 (1 - \beta_{\parallel 0}^2) - \frac{2}{\pi} \alpha \gamma_0 \beta_{\perp 0}^2 \right], \quad (6)$$

где $\alpha = \omega_{p_0}^2 / (\omega_{H_0}^2 \gamma_0)$ — малый параметр, пропорциональный концентрации частиц и не зависящий от их энергии.

Частота обращения уменьшается из-за кулоновского расталкивания электронов, частично компенсируемого магнитным притяжением параллельных токов (слагаемое $-(2/\pi) \alpha \gamma_0 (1 - \beta_{\parallel 0}^2)$), а также из-за диамагнетизма потока (слагаемое $-(2/\pi) \alpha \gamma_0 \beta_{\perp 0}^2$).

Одномерные возмущения стационарного состояния

Исследуем эволюцию симметричных, зависящих лишь от координаты x , возмущений электронного потока. Подобные возмущения возникают в гиротронах и гироклистронах, где электронный пучок взаимодействует с волной, распространяющейся почти поперек потока, или модулируется входным сигналом с частотой, близкой к циклотронной частоте электронов. Кроме того, почти одномерными (с масштабом продольной неоднородности много больше ларморовского шага) являются возмущения, возникающие при взаимодействии электронов с волной, распространяющейся под произвольным углом к потоку, если их рассматривать в системе отсчета движущейся с групповой скоростью волны.

Как и в слабoreлятивистской задаче [5-7], разобьем электронный поток на подвижные плоские слои, состоящие из частиц с начальными фазами вращения, принадлежащими малому интервалу $(\varphi, \varphi + d\varphi)$ (рис. 1, а). Такому слою отвечают поверхностная плотность заряда

$$d\sigma = -\pi e N_0 a_0 d\varphi \quad (7)$$

и квазиэлектростатическое поле

$$dE_x = 2\pi d\sigma \operatorname{sign}(x - \bar{x}(t)), \quad (8)$$

где $\bar{x}(t)$ — координата в момент времени t .

При релятивистских скоростях частиц наряду с (8) необходимо учитывать также создаваемые слоем вихревые поля dE_y, dH_x и dE_z, dH_y , обусловленные наличием переменного поверхностного тока вдоль слоя и перемещением слоя поперек себя. Согласно [9], для этих компонент имеем

$$dE_z = -2\pi d\sigma \frac{\beta_z(t')}{1 - \beta_x(t') \cdot s(x, t)}, \quad (9)$$

$$dH_x = [x_0, dE_z] \cdot s(x, t), \quad (10)$$

где $\beta = v/c$ — нормированная скорость зарядов слоя; t' — запаздывающий момент времени, определяемый из уравнения

$$t - t' = \frac{1}{c} |x - \bar{x}(t')|, \quad (11)$$

$s(x, t) = \operatorname{sign}(x - \bar{x}(t))$.

Поля (9), (10) представляют собой волны, излучаемые нормально слою (в направлениях $\pm x$). В случае движения зарядов слоя по окружности со скоростью, близкой к скорости света, форма излучаемых волн существенно от-

личается от синусоидальной (рис. 2). В фиксированной точке наблюдается излучение на циклотронной частоте и ее гармониках. При этом амплитуды высших гармоник спектра убывают с номером n по закону $E_{yn} \sim J'_n(n\beta_{\perp})$ [9].

Полное собственное поле потока в произвольном сечении x определяется интегрированием (8)–(10) по всем слоям, что эквивалентно интегрированию по начальным фазам ψ .

При малой концентрации электронов, когда $\alpha \ll 1$, воздействие собственного поля потока на вращающуюся частицу приводит к медленным в масштабе циклотронного периода искажениям траектории. Для описания этих медленных изменений естественно усреднить уравнения движения электронов по циклотронному вращению. В результате получим следующую систему самосогласованных уравнений для компонент импульса и координаты ведущего центра (дрейф по оси Y несуществен):

$$\begin{aligned} \frac{dq_{\perp}}{d\tau} &= -\alpha \operatorname{Im} \{ (\mathcal{E}_+ - \beta_{\perp} \mathcal{H}_y) e^{-i\Theta} \}, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\alpha}{q_{\perp}} \times \\ &\times [\operatorname{Re} \{ (\mathcal{E}_+ - \beta_{\perp} \mathcal{H}_y) e^{-i\Theta} \} + \beta_{\perp} \mathcal{H}_z], \\ \frac{dq_{\parallel}}{d\tau} &= -\alpha \frac{\beta_{\perp 0}}{\beta_{\parallel 0}} (\mathcal{E}_{\parallel} - \beta_{\perp} \mathcal{H}_y \sin \Theta), \\ \frac{dX}{d\tau} &= \alpha (\mathcal{E}_y + \beta_{\perp} \mathcal{H}_z \sin \Theta). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь медленно меняющиеся безразмерные величины q_{\perp} , q_{\parallel} , θ и X определяются соотношениями

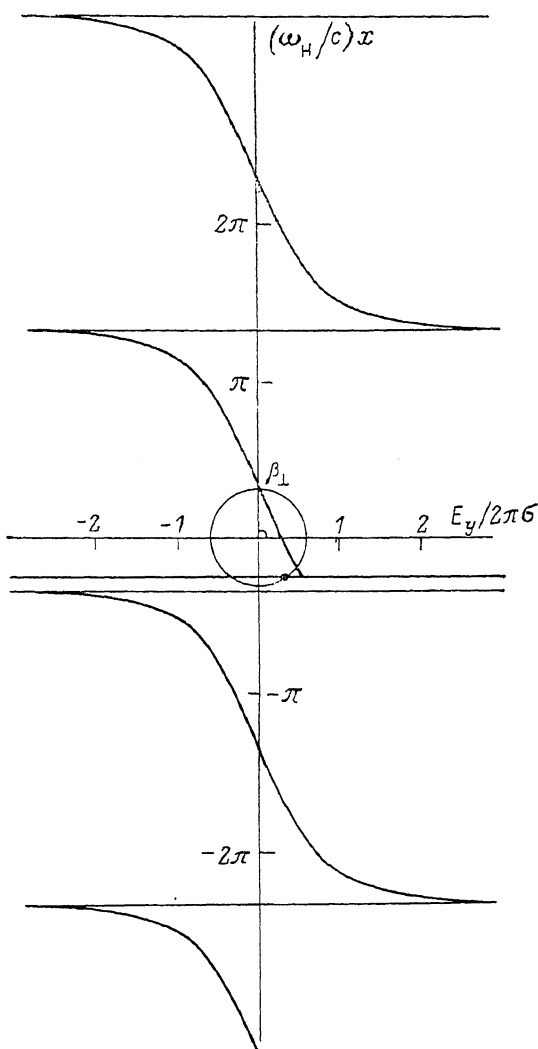


Рис. 2. Компонент E_y электрического поля плоскости, состоящей из синфазно вращающихся зарядов ($\gamma_{\perp} = 3$).

$$p_x + ip_y = ip_{\perp} q_{\perp} e^{i\Theta}, \quad p_{\parallel} = p_{\parallel 0} q_{\parallel},$$

$$x = a_0 (X + q_{\perp} \cos \Theta),$$

$$\Theta = \int_0^{\tau} \frac{1}{\gamma} d\tau + \vartheta, \quad \tau = \gamma_0 \omega_{H_0} t. \quad (13)$$

Безразмерные энергия и компоненты скорости электрона связаны с компонентами импульса соотношениями

$$\gamma = \sqrt{1 + \gamma_0^2 (\beta_{\perp 0}^2 q_{\perp}^2 + \beta_{\parallel 0}^2 q_{\parallel}^2)}, \quad \beta_{\perp, \parallel} = \frac{\gamma_0}{\gamma} \beta_{\perp, \parallel 0} q_{\perp, \parallel}. \quad (14)$$

Чертой в правых частях (12) обозначено усреднение по Θ . Входящие в (12) безразмерные поля

$$\mathcal{E} = \frac{E}{4\pi e N_{0a_0}}, \quad \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y, \quad \mathcal{H} = \frac{H - H_0}{4\pi e N_{0a_0}} \quad (15)$$

представляют собой суперпозицию полей, создаваемых слоями электронов с начальными фазами ψ (рис. 1, б)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= -\frac{i}{4} \int_0^{2\pi} s d\psi, & \mathcal{E}_y &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\beta}_\perp \cos \Theta^*}{d} d\psi, & \mathcal{E}_\parallel &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\beta}_\parallel}{d} d\psi - \frac{\pi}{2} \beta_{\parallel 0}, \\ \mathcal{H}_y &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\beta}_\parallel s}{d} d\psi, & \mathcal{H}_z &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\beta}_\perp \cos \Theta^* \cdot s}{d} d\psi, \end{aligned} \quad (16)$$

где значком \sim помечены величины, относящиеся к электрону с начальной фазой ψ ,

$$s = \text{sign} [X - \tilde{X} + q_\perp \cos \Theta - \tilde{q}_\perp \cos (\Theta - \Delta\varphi)],$$

$$d = 1 + s \cdot \tilde{\beta}_\perp \sin \Theta^*,$$

$$\Theta - \Theta^* - \Delta\varphi = \frac{\gamma_0}{\tilde{\gamma}} \beta_{\perp 0} |X - \tilde{X} + q_\perp \cos \Theta - \tilde{q}_\perp \cos \Theta^*|. \quad (17)$$

Начальные условия к уравнениям (12), соответствующие стационарному состоянию в кинематическом приближении, имеют вид

$$q_\perp(0, \varphi) = 1, \quad \vartheta(0, \varphi) = \varphi, \quad q_\parallel(0, \varphi) = 1, \quad X(0, \varphi) = 0, \quad (18)$$

где начальные фазы частиц φ равномерно распределены в интервале $[0, 2\pi)$.

Подставляя (18) в (16), (12), убеждаемся, что величины q_\perp, \parallel и \tilde{X} сохраняются во времени, а фазы электронов вследствие отличия частот обращения от циклотронной частоты в полном соответствии с (6) меняются по линейному закону

$$\vartheta(\tau, \varphi) = \varphi - \frac{2\alpha}{\pi} \tau (1 - \beta_{\parallel 0}^2 + \beta_{\perp 0}^2). \quad (19)$$

Усредненные уравнения (12) справедливы, пока разность фаз двух частиц

$$\Delta\varphi = \vartheta - \tilde{\vartheta} - \frac{\gamma - \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} (\Theta - \vartheta)$$

является медленной функцией Θ , что имеет место при малом относительном изменении энергий частиц

$$\left| \frac{\gamma - \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} \right| \ll 1. \quad (20)$$

Линейное приближение. Дисперсионное уравнение

Система нелинейных усредненных уравнений (12), (16) описывает развитие во времени одномерных возмущений плотности электронного потока, движущегося в свободном пространстве. При достаточно малой концентрации частиц основную роль в развитии возмущений играет инерционная группировка электронов, вызванная изменением их энергий и циклотронных частот. В такой ситуации, так же как и в слабoreлятивистском случае [7, 10], можно существенно упростить уравнение (12), пренебрегая дрейфом ведущих центров и отбрасывая переменные поля в правой части уравнений для фаз. Последнее означает учет лишь тех изменений в фазах, которые обусловлены изменением циклотронных частот электронов. Кроме того, в правых частях уравнений для импульсов электронов можно пренебречь отличием скоростей частиц от их начальных зна-

¹ Для постоянной поступательной скорости частиц формула (9) дает «лишнее» постоянное и однородное электрическое поле $\mathcal{E}_{\parallel 0} = (\pi/2) \beta_{\parallel 0}$, которое устранено в (16).

ний, считая, что переменное поле пространственного заряда возникает в основном за счет нарушения равномерного распределения электронов по фазам вращения. Это позволяет объединить два уравнения для проекций импульса в одно уравнение для энергии электронов. В результате получаем более простую систему уравнений

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -\alpha\beta_{\perp 0}\gamma_0[\beta_{\perp 0}(\bar{\mathcal{E}}_{\theta_k} + \bar{\mathcal{E}}_{\theta_b}) + \beta_{\parallel 0}\bar{\mathcal{E}}_{\parallel}],$$

$$\frac{d\Theta}{d\tau} - \frac{1}{\gamma} = -\frac{2\alpha}{\pi}(1 - \beta_{\parallel 0}^2 + \beta_{\perp 0}^2), \quad (21)$$

описывающую инерционную группировку электронов. Здесь в азимутальном компоненте электрического поля выделены кулоновская $\bar{\mathcal{E}}_{\theta_k} = \text{Im}(\bar{\mathcal{E}}_x e^{-i\Theta})$ и вихревая $\bar{\mathcal{E}}_{\theta_b} = \text{Re}(\bar{\mathcal{E}}_y e^{-i\Theta})$ части.

Рассмотрим вопрос об устойчивости стационарного состояния слоя по отношению к малым возмущениям энергий и фаз электронов, определяемым следующим образом:

$$\Theta = \frac{\tau}{\gamma_0} - \frac{2\alpha}{\pi}(1 - \beta_{\parallel 0}^2 + \beta_{\perp 0}^2)\tau + \varphi + \vartheta^{(1)}(\tau, \varphi), \quad (22)$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma^{(1)}(\tau, \varphi). \quad (23)$$

Для справедливости уравнений (21) необходимо выполнение следующих условий:

$$|\vartheta^{(1)}| \gg |q_{\perp, \parallel}^{(1)}|, \quad |X^{(1)}|, \quad (24)$$

$$\left| \frac{\gamma^{(1)}}{\gamma_0} \right| \gg \alpha\gamma_0 |\vartheta^{(1)}|, \quad (25)$$

где $q_{\perp, \parallel}^{(1)}$, $X^{(1)}$ — возмущения соответствующих величин, входящих в полные уравнения (12).

Линеаризуя уравнения (21), представим решение линейной системы в виде разложения в ряд Фурье по начальным фазам частиц

$$\frac{\gamma^{(1)}}{\gamma_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n(\tau) e^{in\varphi}, \quad \vartheta^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta_n(\tau) e^{in\varphi}. \quad (26)$$

Важно подчеркнуть, что n -му члену ряда Фурье (26) соответствует n -я гармоника частоты поля, создаваемого потоком электронов, вращающихся с частотой Ω . Например, вне потока ($|x| > a_0$) поле представляет собой убегающие волны, которые с помощью (16) и с учетом неравенства $\Theta_n \gg W_n$ можно представить в виде набора гармоник

$$\mathcal{E}_y = \frac{\pi}{2} \beta_{\perp 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Theta_n i^{-n} J'_n(n\beta_{\perp 0}) e^{-in\Omega\left(t - \frac{|x|}{c}\right)}, \quad (27)$$

$$\mathcal{E}_{\parallel} = \frac{\pi}{2} \beta_{\parallel 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \Theta_n i^{-n-1} J_n(n\beta_{\perp 0}) e^{-in\Omega\left(t - \frac{|x|}{c}\right)}, \quad (28)$$

где J_n и J'_n — соответственно функция Бесселя и ее производная, а амплитуды гармоник пропорциональны $n\Theta_n$.

Используя представление проекций усредненного электрического поля внутри потока ($|x| \leq a_0$) в виде рядов Фурье по разности фаз $\Delta\varphi$ (см. Приложение I), для коэффициентов W_n и Θ_n получим линейную систему

$$\frac{dW_n}{d\tau} = \alpha\beta_{\perp 0}^2 \Theta_n [-L_n + \beta_{\parallel 0}^2 P_n + \beta_{\perp 0} M_n],$$

$$\frac{d\Theta_n}{d\tau} = -\frac{1}{\gamma_0} W_n. \quad (29)$$

Представляя решение (29) в виде $e^{i\Gamma_n \tau}$, для корней дисперсионного уравнения получаем

$$\Gamma_n = \pm \beta_{\perp 0} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma_0}} \sqrt{-L_n + \beta_{\parallel 0}^2 P_n + \beta_{\perp 0} M_n}. \quad (30)$$

Выражение (30) определяет комплексные добавки к собственным частотам колебаний плотности потока и поля, создаваемого потоком

$$\omega_n = n\Omega + \omega_{H_0} \gamma_0 \Gamma_n. \quad (31)$$

Неустойчивости отвечает отрицательный знак мнимой части Γ_n .

Область параметров, при которых выполняются условия (24), (25) преобразования инерционной группировки электронов над силовой группировкой (считаем, что соотношение (24) выполнено в начальный момент времени), можно определить из системы (29). Учитывая асимптотическое поведение факторов $\beta_{\parallel 0}^2 P_n$ и $\beta_{\perp 0} M_n$ при слабых и ультрарелятивистских скоростях частиц (см. Приложение I, II), получим следующие соотношения:

$$\text{при } n \ll \gamma_{\perp}^3 \frac{\sqrt{\alpha} \gamma_0}{\beta_{\perp 0}} \ll 1, \quad (32)$$

$$\text{при } n \gg \gamma_{\perp}^3 \frac{\sqrt{\alpha} \gamma_0^{3/2} \gamma_1^{-1/2}}{\beta_{\perp 0}} \ll 1, \quad (33)$$

$$\text{где } \gamma_{\perp} = (1 - \beta_{\perp 0}^2)^{-1/2}.$$

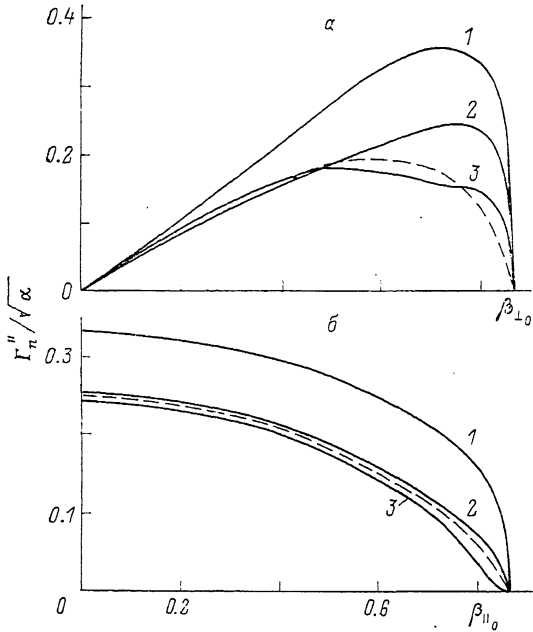


Рис. 3. Зависимость инкремента неустойчивости поля пространственного заряда от вращательной ($\beta_{\parallel 0} = 0.5$) (а), поступательной ($\beta_{\perp 0} = 0.5$) (б) скорости электронов (штриховой линией показана асимптотика при $n \gg \gamma_{\perp}^3$).

n : 1 — 1, 2 — 2, 3 — 5.

В отсутствие поступательной скорости электронов ($\beta_{\parallel 0} = 0$) и в слаборелятивистском пределе ($\beta_{\perp 0} \ll 1$) решение (30) переходит в соотношение

$$\Gamma_n = \pm \beta_{\perp 0} \sqrt{-\alpha L_n}, \quad (34)$$

выведенное в [7]. Поскольку коэффициенты L_n положительны (см. (I. 6)), то одно из решений (34) соответствует нарастанию флуктуации плотности потока и переменного кулоновского поля внутри потока. Кулоновское взаимодействие приводит к развитию неустойчивости отрицательной массы, механизм которой рассмотрен в [7].

Влияние поступательного движения электронов на инкремент неустойчивости отрицательной массы

В случае малой поперечной скорости электронов ($\beta_{\perp 0} \ll 1$) из (30) с учетом (1. 9) следует

$$\Gamma_n = \pm i \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma_0}} \beta_{\perp 0} \sqrt{(1 - \beta_{\parallel 0}^2) L_n}. \quad (35)$$

Таким образом, с возрастанием продольной скорости электронов инкремент уменьшается. Согласно расчетам, этот эффект имеет место также и при большой поперечной скорости (рис. 3, б).

Уменьшение инкремента при возрастании продольной скорости частиц можно объяснить следующим образом. Продольное вихревое электрическое поле, создаваемое плоскостью из синфазно вращающихся и движущихся с постоянной поступательной скоростью зарядов,

$$dE_{\parallel} = -2\pi d\tau \left(\frac{\beta_{\parallel 0}}{1 - \beta_x(t') \cdot s(x, t)} - \beta_{\parallel 0} \right) = -2\pi d\tau \frac{\beta_{\parallel 0} \beta_x(t') s(x, t)}{1 - \beta_x(t') \cdot s(x, t)} \quad (36)$$

при малой поперечной скорости ($\beta_x \ll 1$) имеет квазистатический характер

$$dE_{\parallel \text{ кв. ст.}} = -2\pi d\tau \beta_{\parallel 0} \beta_x(t) \cdot s(x, t) = -\beta_{\parallel 0} \beta_x dE_x \quad (37)$$

и обусловлено наличием переменного магнитного поля (током смещения и запаздыванием при $\beta_x \ll 1$ можно пренебречь). Появление фактора $(1 - \beta_{\parallel 0}^2)$ в инкременте (35) обусловлено не магнитной компенсацией электростатической силы, а частичной компенсацией работы электростатической силы работой продольного вихревого электрического поля, что ясно из выражения $(\beta \mathcal{E}) \approx \beta_x \mathcal{E}_x + \beta_{\parallel 0} \mathcal{E}_{\parallel}$ с учетом (37).

Следует отметить, что фактор $\gamma_0^{-1/2}$ в формуле (30) и связанное с ним уменьшение добавки к частоте $\omega_{H_0} \gamma_0 \Gamma_n$ по абсолютной величине при больших скоростях частиц обусловлены ослаблением зависимости циклотронной частоты от энергии с ростом энергии ($d\omega_{H_0}/d\gamma_0 = -(\omega_{H_0}/\gamma_0)$) и соответственно ослаблением эффективности инерционной группировки электронов.

Циклотронное излучение потока и влияние вихревых полей на неустойчивость отрицательной массы

В тонком потоке фазовая группировка электронов одновременно означает их группировку в пространстве. Пространственная группировка приводит к возникновению переменного кулоновского поля, которое не излучается и величина которого не зависит от скорости электронов. Вместе с тем возникающие флуктуации плотности и тока создают вихревое поле, амплитуда которого пропорциональна скорости электронов; часть этого поля соответствует волнам, убегающим от потока. Вихревое поле влияет на движение частиц, изменяя скорость нарастания флуктуации плотности потока и амплитуд излучаемых волн.

Как показывают расчеты (рис. 3) и асимптотические оценки (см. Приложение), инкремент $\Gamma_n'' = |\text{Im} \Gamma_n|$ отличен от нуля при произвольных скоростях частиц для любых номеров гармоник n ; максимальное значение он принимает на первой гармонике. При $n \geq 1$ величина Γ_n'' имеет максимум при значении $\beta_{\perp 0} \approx \sqrt{(2/3)(1 - \beta_{\parallel 0}^2)}$, определяемом главным образом фактором $\beta_{\perp 0} \gamma^{-1/2}$.

Действительная часть подкоренного выражения в (30) всегда отрицательна; основной вклад в нее дает величина $(-L_n)$, соответствующая кулоновскому полю. Действительная часть фактора P_n , соответствующего продольному вихревому полю, положительна при любых n и $\beta_{\perp 0}$, что отвечает указанному выше эффекту частичной компенсации работы кулоновского поля работой продольного поля; максимум P_n' достигается при $(1 - \beta_{\perp 0}) \sim n^{-1/3}$.

Действительная часть фактора M_n , соответствующего поперечному вихревому полю, отрицательна при $n=1$, а при $n \geq 3$ положительна для любых $\beta_{\perp 0}$; для $n \geq 2$ M_n' имеет максимум при $(1 - \beta_{\perp 0}) \sim n^{-1/3}$. При малой поперечной скорости электронов ($\beta_{\perp 0} \ll 1$) значение M_n' (см. (I.9)) соответствует квазистатической части поля dE_y , которую аналогично (37) можно выделить из полного поля

$$dE_{y \text{ кв. ст.}} = dE_y + 2\pi d\tau \beta_y \approx -2\pi d\tau \beta_y \beta_x \cdot s(x, t). \quad (38)$$

Поле (38) обусловлено переменным магнитным полем, и компенсация или усиление кулоновских сил магнитными означает компенсацию или усиление работы кулоновского поля работой квазистатического поля и соответственно уменьшение или увеличение инкремента неустойчивости. В отличие от магнитных сил обусловленных продольным движением и приводящих к взаимному

притяжению любых двух элементарных слоев, магнитные силы, обусловленные проекцией скорости v_y приводят к притяжению или отталкиванию слоев в зависимости от разности фаз $\Delta\Theta$ между ними. Так, плоскости, движущиеся в противофазе ($\Delta\Theta = \pi$), отталкиваются, а при $\Delta\Theta < \pi/2$ в среднем за период испытывают взаимное магнитное притяжение. Эти соображения позволяют понять, почему $M'_1 < 0$, а $M_{n \geq 2} > 0$ при $\beta_{\perp 0} \ll 1$. При большой поперечной скорости $(1 - \beta_{\perp 0}) \geq n^{-2/3}$ сказываются эффекты, связанные с запаздыванием и приводящие к уменьшению M'_n с ростом $\beta_{\perp 0}$ (при $\beta_{\perp 0} \geq 0.8$ $M'_2 < 0$).

Мнимая часть подкоренного выражения в (30), определяемая мнимой частью факторов P_n и M_n , всегда положительна (см. (I. 8)). Комбинация $\beta_{\parallel 0}^2 P_n'' + \beta_{\perp 0} M_n''$ определяет амплитуду волн, уносящих энергию от потока. Это видно, например, из выражения для относительных потерь кинетической энергии потока на излучение, которое можно получить из первого уравнения системы (21) во втором порядке по возмущению фазы

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{d\tau} &= -2\alpha\beta_{\perp 0}^2 \sum_{n=1}^{\infty} n |\Theta_n|^2 (\beta_{\parallel 0}^2 P_n'' + \beta_{\perp 0} M_n'') = \\ &= -\alpha\beta_{\perp 0} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\Theta_n|^2 \{ \beta_{\parallel 0}^2 J_n^2(n\beta_{\perp 0}) + \beta_{\perp 0}^2 J_n'^2(n\beta_{\perp 0}) \}. \end{aligned} \quad (39)$$

Добавление положительной мнимой части к отрицательной действительной в подкоренном выражении (30) увеличивает инкремент Γ_n'' . Таким образом, диссипативные потери, связанные с излучением, увеличивают инкремент. Подобный эффект известен в теории электронных колец, в которых излучательные потери также увеличивают инкремент азимутальной неустойчивости [11]. Отметим, что амплитуды гармоник волн, излучаемых плоской флуктуацией, пропорциональны факторам $J_n(n\beta_{\perp 0})$, $J_n'(n\beta_{\perp 0})$ и уменьшаются с увеличением номера n в отличие от излучения точечного заряда, в спектре которого при ультрарелятивистской скорости имеется максимум на высокой гармонике $n \sim \gamma^3$ [12].

На высокой гармонике циклотронной частоты ($n \gg 1$) возмущение рассматриваемого потока представляет собой набор большого числа тонких плоских сгустков, равномерно распределенных по фазам вращения. При относительно небольшой вращательной скорости электронов ($\gamma_1^3 \ll n$) амплитуды полей излучения быстро спадают с ростом n (см. Приложение (II.2)), а усредненная сила, действующая на электрон, в основном создается ближайшей к нему флуктуацией плотности. В соответствии с этим инкремент неустойчивости определяется разностью усредненных сил, действующих на опережающие и отстающие от флуктуации частицы.

При большой вращательной скорости частиц, когда $\gamma_1^3 \gg n$, амплитуды касательных к траектории электронов проекций полей внутри потока и полей излучения оказываются одинаковыми по порядку величины и спадают с ростом номера n (см. Приложение II). Инкремент неустойчивости медленно уменьшается пропорционально $n^{-1/6}$.

Таким образом, для плоского тонкого потока релятивистских электронов, движущихся в однородном магнитном поле в свободном пространстве, инкремент неустойчивости уменьшается с ростом поступательной скорости электронов. Инкремент определяется как «внутренними», так и излучаемыми полями. На высоких гармониках циклотронной частоты учет вихревого поля качественно изменяет зависимость инкремента от скорости частиц и номера гармоники.

Авторы благодарны Э. Б. Абубакирову, Э. А. Перельштейну и М. И. Петелину за полезные обсуждения результатов работы.

П р и л о ж е н и е I

Усредненные компоненты электрического поля

Касательные к траектории электронов проекции усредненного поля, входящие в уравнение для энергии электрона (21), в приближении преобладания

инерционной группировки частиц (в выражениях (16), (17) при этом полагается $X = \tilde{X} = 0$, $\beta_{\perp, \parallel} = \tilde{\beta}_{\perp, \parallel} = \beta_{\perp, \parallel}$) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{\theta_k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\Delta\varphi) d\psi, \\ \bar{\mathcal{E}}_{\theta_b} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\beta_{\perp_0}, \Delta\varphi) d\psi, \\ \bar{\mathcal{E}}_{\parallel} &= \frac{\beta_{\parallel_0}}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\beta_{\perp_0}, \Delta\varphi) d\psi, \end{aligned} \quad (\text{I. 1})$$

где $\Delta\varphi = \Theta(\tau, \varphi) - \Theta(\tau, \psi)$.

Функции F , G и R , определяющие соответствующие компоненты усредненного электрического поля, которое действует на электрон со стороны элементарного слоя, отстающего от него по фазе на $\Delta\varphi$ (рис. 1, б), являются периодическими по $\Delta\varphi$ с периодом 2π . Функция F , отвечающая кулоновскому полю, определяется выражением

$$F = -\cos \frac{\Delta\varphi}{2}; \quad 0 < \Delta\varphi < 2\pi. \quad (\text{I. 2})$$

Функции G и R , отвечающие вихревому полю, в соответствии с (16), (17) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} G &= \frac{\beta_{\perp_0}}{2} \int_{\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\pi + \frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{\cos \theta' \cos \theta}{1 - \beta_{\perp_0} \sin \theta'} d\theta, \\ R &= \frac{\beta_{\perp_0}}{2} \int_{\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\pi + \frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{\sin \theta'}{1 - \beta_{\perp_0} \sin \theta'} d\theta, \end{aligned} \quad (\text{I. 3})$$

где θ' как функция θ определяется из трансцендентного уравнения

$$\theta' + \beta_{\perp_0} \cos \theta' = \theta + \beta_{\perp_0} \cos \theta - \Delta\varphi. \quad (\text{I. 4})$$

Аналитически можно вычислить значения этих функций при $\Delta\varphi = +0$ и $\Delta\varphi = 2\pi - 0$, когда уравнение (I.4) легко разрешается: соответственно $\theta' = \theta$ и $\theta' = \theta - 2\pi$. Используя периодичность функций F , G и R , удобно представить их в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} F &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{n} e^{in\Delta\varphi}, \\ G &= -i\beta_{\perp_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{M_n}{n} e^{in\Delta\varphi}, \\ R &= -i\beta_{\perp_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n}{n} e^{in\Delta\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{I. 5})$$

где

$$L_n = \frac{1}{\pi} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}, \quad (\text{I. 6})$$

а коэффициенты M_n и P_n определяются через двойные интегралы

$$M_n = M'_n + iM''_n = \frac{in}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\theta \cos n\tau \cos n\theta \cos \tau \cos \theta e^{in\beta_{\perp 0}(\cos \tau - \cos \theta)} d\tau d\theta,$$

$$P_n = P'_n + iP''_n = \frac{in}{i\pi\beta_{\perp 0}} \int_0^\pi \int_0^\theta \cos n\tau \cos n\theta e^{in\beta_{\perp 0}(\cos \tau - \cos \theta)} d\tau d\theta. \quad (\text{I. 7})$$

Мнимые части M_n и P_n легко выразить через функции Бесселя

$$M''_n = \frac{\pi}{2} n J'_n{}^2(n\beta_{\perp 0}), \quad P''_n = \frac{\pi}{2\beta_{\perp 0}} n J_n^2(n\beta_{\perp 0}). \quad (\text{I. 8})$$

При малых поперечных скоростях частиц ($\beta_{\perp 0} \ll 1$) из (I. 7) получаем

$$P_n \approx L_n; \quad M_1 \approx -\frac{52}{45\pi} \beta_{\perp 0} + i\frac{\pi}{8}; \quad M_n \approx \frac{4n^2(4n^2+9)}{3\pi(4n^2-9)(4n^2-1)} \beta_{\perp 0}, \quad n \geq 2. \quad (\text{I. 9})$$

Приложение II

Инкремент на высоких гармониках циклотронной частоты

При $n \geq 1$ коэффициенты L_n (I. 6) в выражении (30) принимают постоянное значение $L_n \approx 1/\pi$. Используя известные асимптотические представления функции Бесселя и ее производной (см., например, [13]), получаем

$$\text{при } 1 \ll n \ll \gamma_{\perp}^3 \quad P''_n \approx \frac{1}{4\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{n}{6}\right)^{1/3}, \quad M''_n \approx \frac{1}{4\pi} \Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{n}{6}\right)^{-1/3}; \quad (\text{II. 1})$$

$$\text{при } n \gg \gamma_{\perp}^3 \quad P''_n \approx \frac{\gamma_{\perp}}{4} e^{-\frac{2n}{3\gamma_{\perp}^3}}, \quad M''_n \approx \frac{1}{4\gamma_{\perp}} e^{-\frac{2n}{3\gamma_{\perp}^3}}, \quad (\text{II. 2})$$

где Γ — гамма-функция, $\gamma_{\perp} = (1 - \beta_{\perp 0}^2)^{-1/2}$.

Асимптотическое поведение действительных частей P_n и M_n , выражающихся через двойные интегралы (I. 7), можно определить с помощью метода стационарной фазы [14]

$$\text{при } 1 \ll n \ll \gamma_{\perp}^3 \quad P'_n \approx \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{n}{6}\right)^{1/3}, \quad M'_n \approx \frac{1}{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{n}{6}\right)^{-1/3}; \quad (\text{II. 3})$$

$$\text{при } n \gg \gamma_{\perp}^3 \quad P'_n \approx \frac{\gamma_{\perp}}{\pi\beta_{\perp 0}} \arctg(\beta_{\perp 0}\gamma_{\perp}), \quad M'_n \approx \frac{1}{\pi\beta_{\perp 0}} \left[1 - \frac{1}{\gamma_{\perp}\beta_{\perp 0}} \arctg(\beta_{\perp 0}\gamma_{\perp})\right]. \quad (\text{II. 4})$$

В области $n \sim \gamma_{\perp}^3$ P'_n имеет максимум по n величиной порядка γ_{\perp} . При $\gamma_{\perp} \gg 1$ в области $n \sim \gamma_{\perp}^3$ P'_n и M'_n также имеют максимумы по n : $P'_{n \max} \geq \gamma_{\perp}/2$, $M'_{n \max} \geq 1/\pi$, а с ростом n в области $n \gg \gamma_{\perp}^3$ выходят на постоянные значения $\gamma_{\perp}/2$ и $1/\pi$ соответственно. Таким образом, в области $1 \ll n \ll \gamma_{\perp}^3$ с учетом неравенства

$$\beta_{\perp 0}^2 n^{1/3} < \gamma_{\perp}^{-2} n^{1/3} \ll n^{-1/3} \quad (\text{II. 5})$$

получаем

$$\Gamma''_n \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\pi\gamma_0}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\sqrt{3}+1}{4} n^{-1/3} \approx 0.52 \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma_0}} n^{-1/3}. \quad (\text{II. 6})$$

В области $n \gg \gamma_{\perp}^3$ (γ_{\perp} может быть при этом и величиной порядка единицы) получаем

$$\Gamma''_n \approx \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \gamma_0^{-3/2} \sqrt{\beta_{\perp 0}\gamma_{\perp} \arctg(\beta_{\perp 0}\gamma_{\perp})}. \quad (\text{II. 7})$$

При большой поперечной скорости ($\gamma_{\perp} \gg 1$) из (II. 7) следует

$$\Gamma''_n \approx \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \gamma_0^{-3/2} \gamma_{\perp}^{1/2}. \quad (\text{II. 8})$$

Если продольная скорость мала ($\beta_{\parallel 0}^2 \ll 1 - \beta_{\perp 0}^2$), то (II.8) переходит в выражение

$$\Gamma_n'' \approx \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \gamma_0^{-1}. \quad (\text{II.9})$$

Интересно отметить, что при $n \gg \gamma_{\perp}^3$ инкремент неустойчивости Γ_n'' определяется только разностью усредненных сил, действующих на электроны, движущиеся по разные стороны от вращающейся плоскости, т. е. разностью значений функций F , G и R в точках $\Delta\varphi = 2\pi - 0$ и $\Delta\varphi = +0$

$$\begin{aligned} -2\pi L_n &\approx F(+0) - F(2\pi - 0), \\ 2\pi\beta_{\perp 0} M_n &\approx G(\beta_{\perp 0}, +0) - G(\beta_{\perp 0}, 2\pi - 0), \\ 2\pi\beta_{\perp 0} P_n &\approx R(\beta_{\perp 0}, +0) - R(\beta_{\perp 0}, 2\pi - 0). \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Список литературы

- [1] Коломенский А. А., Лебедев А. Н. // Атомная энергия. 1959. Т. 7. № 6. С. 549—560.
- [2] Nielsen C., Sessler A. // Rev. Sci. Instrum. 1959. Vol. 30. N 2. P. 80.
- [3] Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлатов В. К. // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 9-10. С. 1414—1453.
- [4] Ковалев И. С., Кураев А. А., Колосов С. В., Слепян Г. Я. // ДАН БССР. 1973. Т. 17. № 5. С. 416—419.
- [5] Братман В. Л., Петелин М. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 10. С. 1538—1543.
- [6] Канавец В. И., Черепенин В. А. // РИЭ. 1975. Т. 20. № 12. С. 2539—2549.
- [7] Братман В. Л. // ЖТФ. 1976. Т. 16. Вып. 10. С. 2030—2036.
- [8] Кураев А. А. Мощные приборы СВЧ: Методы анализа и оптимизации параметров. М.: Радио и связь, 1986. 208 с.
- [9] Братман В. Л., Самсонов С. В. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 2. С. 189—191.
- [10] Братман В. Л., Пылин А. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 11. С. 1408—1416.
- [11] Саранцев В. П., Перельштейн Э. А. Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. М.: Атомиздат, 1979. 215 с.
- [12] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
- [13] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 344 с.
- [14] Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.

Институт прикладной физики АН СССР
Горький

Поступило в Редакцию
17 января 1990 г.