01; 03

Журнал технической физики, т. 61, в. 4, 1991

ВЛИЯНИЕ ФЛИККЕР-ШУМА НА СОЛИТОН УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА—ДЕ ФРИЗА

В. М. Логинов

1. К настоящему времени на основе большого количества экспериментальных исследований известно, что фликкер-шум появляется в материалах самой различной природы. Он возникает в полупроводниках и металлах, в веществах, обладающих магнитными свойствами, например в ферромагнетиках при процессах перемагничивания, в биологических системах, в частности биологических мембранах, и т. д. (см., например, [1-4]). Разнообразие проявлений, разнообразие физических механизмов возникновения фликкер-шумов, а также требования практики, в частности современной микроэлектроники, на создание малошумящих материалов — все это обусловливает неослабевающий интерес к изучению низкочастотных шумов, их свойств и особенностей.

В данной работе рассматривается трансформация солитона уравнения Кортевега—де Фриза в поле фликкер-шума. В работе [5] в рамках метода обратной задачи рассеяния получено точное односолитонное решение стохастического уравнения Кортевега—де Фриза (КДФ) с правой частью в виде гауссовского белого шума. Показано, что средняя огибающая солитона, несмотря на то что само уравнение КДФ является нелинейным, подчиняется линейному уравнению диффузии так, что на больших временах солитон трансформируется в гауссовский пакет.

2. Упомянутая линейность уравнения для средней огибающей солитона обусловлена структурой функциональной зависимости односолитонного решения от источника случайной силы. Чтобы увидеть это, сформулируем общую задачу о структуре уравнения, которому подчиняется среднее $\langle \Phi\,(z+w_t\,[\alpha])\rangle$, где $\Phi\,(z)$ — некоторая неслучайная функция, обладающая нужными свойствами гладкости; $w_t\,[\alpha]$ — функция t и запаздывающий функционал случайного процесса $\alpha\,(\tau)$ с $\tau < t$, который выступает как источник случайной силы; z — переменная, статистически несвязанная с α. Угловые скобки означают среднее по ансамблю реализаций процесса $\alpha\,(t)$. Применительно к задаче об усредненной эволюции солитона уравнения КДФ в поле случайной силы $\alpha\,(t)$ (α входит в правую часть уравнения КДФ) следует положить [5]

$$\Phi = w_t - 2k^2\,\mathrm{sech}^2\left[k\,(x-x_0) - 4k^3t + 6k\int\limits_0^t w_\tau d\tau\right],$$

где $w_t = \int\limits_0^t \alpha\,(\tau)\,d\tau$, k — параметр спектральной задачи, x_0 — положение солитона в начальный момент времени $t=0$.

Далее будем считать, что $\alpha\,(t)$ — гауссовский процесс с $\langle\alpha\,(t)\rangle=0$, но в отличие от [5] вид корреляционной зависимости $K\,(\tau)=\langle\alpha\,(t+\tau)\,\alpha\,(t)\rangle$ предполагается произвольным.

Установим структуру уравнения для среднего $\langle\Phi\,(z+w_t)\rangle$. Для этого разложим функцию $\Phi\,(z+w_t)$ в ряд Фурье и результат усредним по статистике $\alpha\,(t)$. В результате получим

$$\langle\Phi\,(z+w_t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ipz-\frac{p^2}{2}\int\int\limits_0^t \langle w_{\tau_1}w_{\tau_2}\rangle d\tau_1 d\tau_2}\,\tilde{\Phi}\,(p)\,dp,$$

где $\tilde{\Phi}\,(p)$ — фурье-образ функции $\Phi\,(z)$.

Дифференцирование обеих частей этого равенства по t дает

$$\frac{\partial\langle\Phi\rangle}{\partial t} = D\,(t)\,\frac{\partial^2\langle\Phi\rangle}{\partial z^2}, \tag{1}$$

где

$$D\,(t) = \int\limits_0^t \langle w_t w_\tau\rangle\,d\tau. \tag{2}$$

Оч евидно, что $\langle\Phi\rangle|_{t=0}=\Phi(z)$. Уравнение (1) представляет собой искомое уравнение, управляющее динамикой среднего общего вида $\langle\Phi\rangle$. Это уравнение является обычным уравнением диффузии, в котором, однако, коэффициент диффузии зависит от времени t. При выводе этого уравнения два обстоятельства являются существенными: линейность функциональной зависимости $w_t[\alpha]$ от процесса α и предположение о гауссовости процесса α. Сама же нелинейность функции Φ от аргумента z непринципиальна. Применительно к рассматриваемому случаю нелинейность функции Φ задается уравнением КДФ.

Отметим, что в ряде задач о трансформации солитонов в стохастической среде в качестве переменной t в уравнении (1) может выступать пространственная координата.

Коэффициент диффузии, как следует из выражения (2), существенно зависит от корреляционных свойств флуктуаций поля случайной силы $\alpha(t)$. Важно, что формула (2) напрямую связывает характеристики отклика динамической системы с характеристиками шумового воздействия. Результат (2) полезен также с точки зрения изучения параметров самого случайного воздействия.

В рассмотренном в работе [5] пределе белого шума, когда $K(\tau)=2D\delta(\tau)$, $D(t)=48k^2Dt^2$. Подчеркнем, что в [5] уравнение типа (1) с зависимостью $D(t)\sim t^2$ было установлено с использованием явного вида решения уравнения КДФ.

3. Применим общий результат (1), (2) к описанию трансформации солитона уравнения КДФ в поле гауссовского фликкер-шума. Положим [6]

$$K(\tau)=\frac{\gamma}{\tau^{1-\nu}},\quad 0\leqslant\nu<1,$$

где γ — некоторая постоянная, вид которой для дальнейшего непринципиален.

Спектральная интенсивность при этом имеет вид $S(\omega)\sim 1/\omega^{\nu}$. С учетом явного вида корреляционной функции $K(\tau)$ и того, что $w_t=\int\limits_0^t\alpha(\tau)\,d\tau$ из (2), получаем

$$D(t)=\frac{\gamma}{\nu(\nu+1)}\,t^{2+\nu}. \tag{3}$$

Видно, что временна́я зависимость коэффициента $D(t)$ при фликкер-шумовом воздействии отличается от результатов воздействия белого шума дополнительным слагаемым в показателе степени, т. е. с ростом t диффузия в поле фликкер-шума происходит более интенсивно.

Уравнение (1) с зависящим от времени коэффициентом диффузии с помощью очевидной замены $t\to\theta=\int\limits_0^t D(\tau)\,d\tau$ сводится к уравнению диффузии с постоянными коэффициентами. Его общее решение при начальном условии $\langle\Phi\rangle|_{t=0}=\Phi(z)$ имеет вид

$$\langle\Phi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(z-z')^2}{4\theta}}\Phi(z')\,dz'.$$

Для рассматриваемой задачи

$$\Phi(z)=-2k^2\operatorname{sech}^2 z,\quad z=k(x-x_0)-4k^3t,\quad \theta(t)=\frac{\gamma}{\nu(\nu+1)(\nu+3)}\,t^{3+\nu}.$$

При больших t соответственно и θ особенности начального профиля забываются и среднее $\langle\Phi\rangle$ эволюционирует к гауссовскому профилю

$$\langle\Phi\rangle=-\frac{4k^2}{\sqrt{\pi\theta(t)}}\,e^{-\frac{z^2}{4\theta(t)}}=-at^{-\frac{(3+\nu)}{2}}e^{-\frac{(x-x_0-4k^2t)^2}{bt^{(3+\nu)}}},$$

где

$$a=\sqrt{\frac{8\nu(\nu+1)(\nu+3)}{9\pi\gamma}},\quad b=\frac{18\gamma}{\nu(\nu+1)(\nu+3)}.$$

Ширина гауссовского пакета $h(t)$ растет с ростом t как $t^{3+\nu/2}$. Если воспользоваться логарифмическим масштабом, то для $\ln h(t)$ приходим к линейной зависимости (в общем случае, как это следует из уравнения (1), если $\theta\to\infty$ при $t\to\infty$, то $\ln h(t)=(1/2)\ln\int\limits_0^t D(\tau)\,d\tau$)

$$\ln h(t) = \mathrm{const} + \frac{\nu + 3}{2} \ln t. \quad (4)$$

Видно, что тангенс угла наклона прямой $\ln h$ к оси $\ln t$ определяется только параметром ν, характеризующим показатель в спектре фликкер-шума. Простая зависимость (4), связывающая ширину солитона с показателем спектра фликкер-шума, может быть использована для экспериментального измерения величины

Отметим, что приведенные выше результаты характеризуют эволюцию солитона уравнения КДФ в поле гауссовского фликкер-шума. Многочисленные эксперименты показывают [3], что гауссова статистика шума достаточно типична. Вид статистики шума зависит от природы материала, в котором генерируется шум. Например, проведенные в работе [7] эксперименты с пятью различными источниками шума показали, что с достоверностью три из них генерируют фликкер-шум гауссовой статистики. В этой связи представляется, что результат (4) будет полезен и для оценки степени отклонения распределения шума от гауссова. В заключение отметим, что динамика солитонов, описываемая уравнением КДФ, допускает [8] моделирование с помощью нелинейной линии передачи с дисперсией. Как правило, эта линия представляет собой цепочку нелинейных звеньев, элементами которых являются диоды с переменной емкостью или индуктивности с насыщающимися ферромагнитными сердечниками. Случайная сила, действующая на солитон уравнения КДФ, при этом может быть задана как случайная эдс на входе цепочки.

Список литературы

[1] *Букингем М.* Шумы в электронных системах. М.: Мир, 1986.
[2] *Колачевский Н. Н.* Флуктуационные процессы в ферромагнитных материалах. М.: Наука, 1985. 181 с.
[3] *Коган Ш. М.* // УФН. 1985. Т. 145. № 2. С. 285—328.
[4] Тез. докл. V Всесоюз. конф. «Флуктуационные явления в физических системах». Вильнюс, 1988. 240 с.
[5] *Wadati M. J.* // Phys. Soc. Jap. 1983. Vol. 52. N 8. P. 2642—2648.
[6] *Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1981. 640 с.
[7] *Voss R. F.* // Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 40. N 4. P. 913—916.
[8] *Лонгрен К.* // Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. М.: Мир, 1981. С. 138—162.

Тувинский комплексный отдел
СО АН СССР
Кызыл

Поступило в Редакцию
13 марта 1990 г.

09

Журнал технической физики, т. 61, в. 4, 1991

КОГЕРЕНТНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ НАД СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ СФЕРОЙ

А. С. Брюховецкий, Л. А. Пазынин

Задача о дифракции электромагнитных волн на сфере занимает центральное место в теории распространения радиоволн вдоль земной поверхности. Для гладкой сферы в однородной окружающей среде основные ее аспекты были рассмотрены к началу 50-х годов (Дж. Н. Ватсон, Х. Бреммер, Ван-дер-Поль, В. А. Фок, В. Франц, П. Бекманн, Дж. Уэйт и др.). Влияние шероховатостей реальной сферической поверхности до последнего времени не анализировалось, хотя для шероховатой плоскости начало его теоретического изучения было положено работами Е. Л. Фейнберга в середине 40-х годов. Лишь в 1980 г. появились работы этого плана для источника скалярных волн [1-3] над статистически неровной сферой.

Для электромагнитных волн подобный анализ отсутствует. Сложность его обусловлена некоммутативностью группы вращения сферы, теория представлений которой должна составлять основу математического аппарата для этого случая. Кроме того, необходимо, чтобы вся