

04

© 1991 г.

ТРАНСПОРТИРОВКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ В ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Г. Дорофеев, В. Б. Красовицкий, С. С. Моисеев, О. Ю. Нагуев

Найдено условие равновесия релятивистского электронного пучка, предварительно сформированного в виде сгустков в холодной плазме. Поле электромагнитной волны, возбуждаемой релятивистским пучком в плазме, компенсирует силу кулоновского расталкивания и градиент кинетического давления в сгустках, если частота модуляции пучка близка (но меньше) к плазменной частоте и резонансная гармоника доминирует в спектре излучения. Двумерное аксиально-симметричное решение получено для моноэнергетического пучка и пучка с конечной температурой электронов.

Введение

В работе [1] показано, что для глубоко промодулированного пучка в плотной плазме имеет место радиальная самофокусировка под действием поля волны плотности заряда, индуцируемой пучком. Эффект возникает в условиях, когда частота модуляции $\omega_m = 2\pi v/l$ (v — скорость пучка, l — расстояние между сгустками) меньше ленгмюровской частоты плазмы ω_p и отрицательная диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 1 - \omega_p^2/\omega_m^2$ изменяет знак силы кулоновского взаимодействия электронов в сгустках. Форма сфокусированных сгустков для различных режимов модуляции в зависимости от температуры и плотности пучков в плотной плазме определена в работах [2-4]. В условиях экспериментов самофокусировка наблюдалась в [5], где в плазму инжектировался электронный пучок, предварительно сформированный в виде сгустков.

В настоящей работе результаты [2-4], полученные для нерелятивистских пучков, обобщаются на релятивистский случай, когда излучение не является потенциальным и необходимо учитывать воздействие вихревого электромагнитного поля на сгустки. Показано, что система уравнений Максвелла для полей в плазме с релятивистским пучком может быть приведена к интегральному уравнению для потенциала $\Psi = \varphi - vA_z/c$, по форме совпадающему с аналогичным уравнением для скалярного потенциала φ в нерелятивистском пределе [2, 3]. В то же время наличие азимутального магнитного поля уменьшает силу кулоновского расталкивания электронов в сгустках и роль поляризационного поля, фокусирующего пучок при $\epsilon < 0$, возрастает.

Найдена форма сгустков, находящихся в больцмановском равновесии с полем [3], и сгустков с немаксвелловской функцией распределения электронов по скоростям [4]. В заключение работы в рамках одномерной модели пучка [2] проанализирована роль спутанной неустойчивости при распространении сфокусированного пучка в плазме. Найдены инкременты неустойчивости для различных режимов модуляции и проведена оценка максимальной амплитуды поля колебаний спутанных мод.

1. Интегральное уравнение

Для описания излучения электронного пучка с плотностью заряда $\rho(t, r)$, распространяющегося с постоянной скоростью v в однородной плотной плазме $\rho_p \gg \rho$, воспользуемся следующей системой уравнений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\rho_p \mathbf{v}_p + \rho \mathbf{v}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где $\rho_p \mathbf{v}$ — плотность тока электронов плазмы, индуцированного полем пучка.

Исключая в (1) магнитное поле, находим

$$\Delta \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v}, \quad (2)$$

где $\omega_p = (4\pi e \rho_p m^{-1})^{1/2}$ — ленгмюровская частота плазмы, Δ — оператор Лапласа.

Из (2) следуют волновые уравнения для потенциалов

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \left[\Delta - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \right] \varphi = -4\pi \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \mathbf{A} = -4\pi \frac{\mathbf{v}}{c} \rho, \quad (4)$$

удовлетворяющих калибровочному соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) \varphi = 0.$$

Плотность пучка, разбитого на сгустки, является периодической функцией $z' = z - vt$ и может быть представлена в виде ряда Фурье

$$\rho = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n(r) \exp \frac{2\pi i n z'}{l},$$

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(r) \exp \frac{2\pi i n z'}{l} \quad (5)$$

где r и z — цилиндрические координаты, $z \parallel \mathbf{v}$, l — расстояние между сгустками пучка.

Подставляя (5) в (3), после стандартных преобразований получим

$$\left(\Delta_r + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) \varphi = 4\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 l}{n^2 - \alpha^2} \rho_n(r) \exp \frac{2\pi i n z'}{l},$$

$$\rho_n(r) = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \rho(r, \xi) \exp \frac{-2\pi i n \xi}{l} d\xi, \quad (6)$$

где

$$\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

$$\gamma^{-2} = 1 - \beta^2, \quad \alpha = \omega_p / \omega_m, \quad \beta = v/c.$$

Выполняя суммирование в правой части (6) (аналогично [3, 4]), находим

$$\left(\Delta_r + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) \varphi = -4\pi \rho_{\text{эфф}}(r, z'),$$

$$\rho_{\text{эфф}}(r, z') = \rho(r, z') - \frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha} \langle \rho \cos \zeta \rangle,$$

$$\zeta = 2\pi \alpha (|\xi - z'|/l - 1/2), \quad \langle \dots \rangle = l^{-1} \int_{-l/2}^{l/2} \dots d\xi. \quad (7)$$

Ниже показано, что равновесная плотность пучка зависит от потенциала $\Psi = \varphi - \beta A_z$. Поэтому приведем уравнение для Ψ , следующее из формул (4) и (7),

$$\left(\Delta_r + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) \Psi = -4\pi \bar{\rho}_{\text{эфф}},$$

$$\bar{\rho}_{\text{эфф}} = \frac{\rho}{\gamma^2} - \frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha} \langle \rho \cos \zeta \rangle. \quad (8)$$

Отметим, что постоянная составляющая потенциала $\langle \varphi \rangle = \langle \rho \rangle = 0$ из-за экранировки постоянного поля пучка холодной плазмой на пространственном периоде пучка [3, 4]. В то же время нейтрализация по току не является полной и $\langle A_z \rangle = 0$. От соответствующих формул [3, 4] уравнение (8) отличается наличием множителя γ^{-2} и появлением дополнительного слагаемого $\omega_p^2 \Psi / c^2$, учитывающего дополнительную радиальную экранировку поля релятивистского пучка плазмой [6, 7].

2. Гидродинамическое (больцмановское) равновесие электронных сгустков

Физическим условием равновесия пучка в плазме является отсутствие сил, действующих на электроны в сгустках. В гидродинамическом приближении условия радиального и продольного равновесия имеют вид

$$e(E_r - \beta H_\varphi) - \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0,$$

$$eE_z = -\frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

где E_r , E_z , H_φ — компоненты электромагнитного поля пучка в плазме; T — температура электронов.

Переходя к потенциалам и учитывая равенство $\partial/\partial t = -v\partial/\partial z'$, можно представить (9) в виде формулы

$$\nabla' \left(\Psi + \frac{T}{e} \ln \rho \right) = 0, \quad \nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial r}; \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

не содержащей компоненты векторного потенциала A_r . После интегрирования получаем распределение Больцмана

$$\rho(r, z') = \rho_0 \exp\left(-\frac{e\Psi(r, z')}{T}\right),$$

определяющее совместно с (8) самосогласованный потенциал в плазме с пучком и форму равновесных сгустков.

Согласно [3], самофокусировка возникает, если второе слагаемое в правой части (8) превышает первое (поляризационное поле, возбуждаемое пучком в плазме, превосходит кулоновское поле сгустков). Появление дополнительного множителя γ^{-2} снижает роль силы кулоновского расталкивания электронов, и эффективность механизма фокусировки возрастает, так как условие малости параметра $\delta = 1 - \omega_m/\omega_p$ ослабевает в γ^2 раз по сравнению с нерелятивистским пучком. Однако в таком общем виде, когда волна потенциала не является монохроматической, задача является сложной для аналитического исследования. Поэтому, следуя [3], рассмотрим резонансный случай $|\sin \alpha \pi| = |1 - \alpha| \ll 1$, что позволяет упростить (8) к виду

$$\left(\Delta_r + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) \Psi = \frac{8\pi}{l\delta} \cos \frac{2\pi z'}{l} \int_0^{l/2} \rho(r, \xi) \cos \frac{2\pi \xi}{l} d\xi, \quad (10)$$

где $\rho(r, \xi) = \rho(r, -\xi)$, $\delta > 0$.

Будем искать вынужденное решение (10) в виде

$$\Psi(r, z') = \frac{T}{\epsilon} \Phi(r) \cos \frac{2\pi z'}{l},$$

$$\rho(r, z') = \rho_0 \exp\left(-\Phi_m + \Phi(r) \cos \frac{2\pi z'}{l}\right), \quad (11)$$

где $\rho_0 \equiv \rho(0, 0)$ — плотность в центре сгустка $z = r = 0$, $\Phi(0) = \Phi_m$.

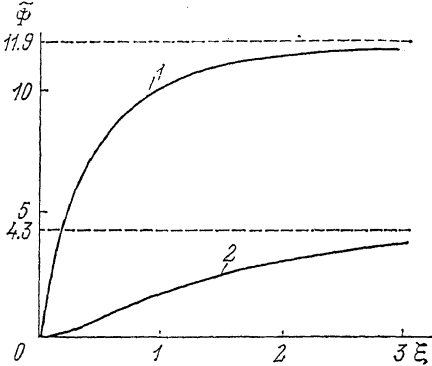


Рис. 1. Графики решений $\Phi = \Phi_m - \Phi(r)$ при $R_0/l = 0.0013$, $\Phi_m = 11.9$ (1) и $R_0/l = 0.017$, $\Phi_m = 4.3$ (2).

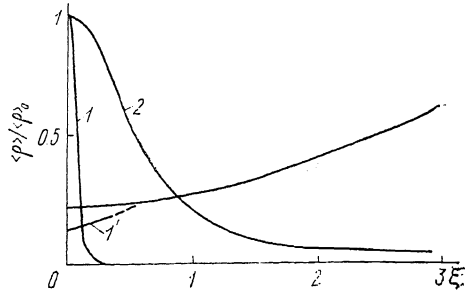


Рис. 2. Зависимость средней плотности сгустка $\langle \rho \rangle / \langle \rho \rangle_0$ (1, 2) и его ширины $a/l = \langle \rho(\xi, z) \rangle / \rho(\xi, 0)$ ($1'$, $2'$) от радиальной координаты $\xi = 2\pi r/l$ при разных R_0/l .

1, $1'$ — 0.0013; 2, $2'$ — 0.017.

Подставляя (11) в (10) и опуская в левой части слагаемое порядка $\delta \ll 1$, получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) - \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \Phi = -\frac{1}{R_0^2} I_1(\Phi) \exp(-\Phi_m),$$

где $R_0^2 = T\delta/4\pi\epsilon\rho_0$, $I_1(\Phi)$ — модифицированная функция Бесселя.

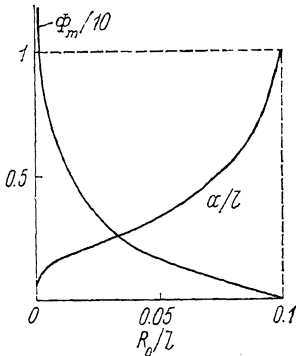


Рис. 3. Зависимость глубины потенциальной ямы Φ_m и ширины сгустка на оси пучка $a/l = \langle \rho \rangle_0 / \rho_0$ от параметра R_0/l .

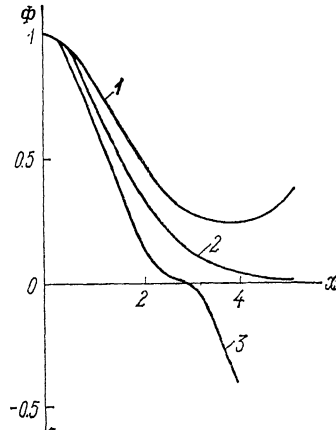


Рис. 4. Зависимость потенциала Φ от радиальной координаты $x = 2\pi r/l$ при разных q . 1 — 2, 2 — 2.4, 3 — 3.

Как показывают численные расчеты, уравнение имеет решение, удовлетворяющее условиям $\Phi(0) = \Phi_m$, $\Phi'(0) = 0$ и монотонно убывающее в области $\Phi \ll 1$,

$$\Phi \sim K_0(\sigma r), \quad \sigma^2 = \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 - \frac{1}{2R_0^2} \exp(-\Phi_m),$$

где $K_0(\sigma r)$ — функция Мальдональда.

Примеры таких решений для $R_0/l=0.0017$, $R_0/l=0.13$ представлены на рис. 1, 2. Зависимость глубины потенциальной ямы Φ_m от параметра R_0/l иллюстрирует рис. 3. При $R_0/l \rightarrow 0$ значение Φ_m неограниченно возрастает. Однако при этом нарушается условие линейности уравнения движения электронов плазмы

$$\Phi_m \ll \left(\frac{2\pi R_0}{l}\right)^2 \frac{mv^2}{T} \delta^{1/2}.$$

Отметим, что в условиях резонанса $\delta \ll 1$ учет релятивизма пучка не изменяет уравнения для потенциала (10), которое по форме совпадает с [3], так как поле излучения определяется в основном скалярным потенциалом $\varphi \simeq A_z/\delta \gg A_z$ и вклад вихревого поля в излучение пучка мал.

3. Модель захваченных частиц

Проведенное выше исследование показывает, что при $r \rightarrow \infty$ плотность пучка приближается к асимптотическому значению $\rho_m = \rho_0 \exp(-\Phi_m)$, т. е. не равна нулю. Этот недостаток найденного решения связан с использованием формулы Больцмана для описания электронов пучка, захваченных в потенциальную яму конечной глубины. Поэтому быстрые частицы, соответствующие «хвосту» максвелловского распределения по скоростям, не захватываются полем и определяют величину ρ_∞ .

Указанный выше недостаток можно устранить путем более корректного описания захваченных частиц. Поэтому, следуя [4], положим функцию распределения в системе отсчета пучка равной

$$f(v') = \rho'_0 \left(\frac{m}{\pi e \varphi'_{\max}}\right)^2 \left(\frac{2e\varphi'}{m} - v'^2\right)^{1/2},$$

где ρ'_0 — плотность электронов на дне потенциальной ямы φ'_m .

Интегрируя по скоростям, находим плотность

$$\rho' = \rho'_0 \left(\frac{\varphi'}{\varphi'_{\max}}\right)^2$$

в системе пучка. Выполняя преобразование Лоренца $\varphi' = \gamma(\varphi - \beta A_z) = \Psi$ для перехода в лабораторную систему, получаем

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{\Psi}{\Psi_{\max}}\right)^2, \quad (12)$$

где $\rho_0 = \gamma \rho'_0$.

Подстановка в уравнение (10) плотности (12) и выбор потенциала в виде

$$\Psi(r, z') = \Psi_{\max} \Phi(r) \cos \frac{2\pi z'}{l}$$

приводят к дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \Phi + q\Phi^2 &= 0, \\ x = \frac{2\pi r}{l} \quad q &= \frac{2\rho_0 l^2}{3\pi^2 \delta \Psi_{\max}}, \end{aligned} \quad (13)$$

полученному ранее для нерелятивистского пучка в [4]. Численное исследование показывает, что решение (13), удовлетворяющее граничным условиям $\Phi(0) = 1$, $\Phi(\infty) = 0$ и монотонно убывающее при $x \rightarrow \infty$, существует при $q = 2.4$ (рис. 4), а энергия электронов на дне потенциальной ямы равна

$$W \simeq e\Psi_{\max} = 0.028 \frac{\rho_0 e l^2}{\delta} \simeq 0.1 \frac{\rho_0 m v^2}{\rho_p \delta}.$$

Продольный и поперечный размеры электронных сгустков оказываются соответственно равными $l/2$ и $2l/\pi$ ($x=4$).

4. Моноскоростной пучок

Рассмотренные выше равновесные решения предполагают, что электроны пучка в потенциальных ямах излучения имеют достаточно большую энергию (температуру), препятствующую схлопыванию сгустков под действием поля. В моноскоростном пучке возникают колебания, которые могут быть описаны в гидродинамическом приближении. Одно из решений такого рода найдено ниже.

Будем считать, что плотность заряда пучка зависит от координат следующим образом:

$$\rho(r, z') = \begin{cases} \rho(r), & |z'| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \frac{a}{2} < |z'| \leq \frac{l}{2}. \end{cases} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (8) и вычисляя интеграл, находим

$$\frac{\tilde{\rho}_{\text{эфф}}(r, z)}{\rho(r)} = \begin{cases} \frac{\sin[\pi\alpha(1-\pi\alpha)] \cos \frac{2\pi z'}{l}}{\sin \pi\alpha} - \beta^2, & |z'| \leq \frac{a}{2}, \\ -\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{l}\right) \cos\left[2\pi\alpha\left(\frac{|z'|}{l} - \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin \pi\alpha}, & \frac{a}{2} < |z'| \leq \frac{l}{2}. \end{cases} \quad (15)$$

Если продольный размер удовлетворяет условию

$$a_n = l(1 - n\omega_m/\omega_p) \quad (16)$$

(n — целые числа), то каждый сгусток при $\rho = \text{const}$ находится в бессиловом равновесии, рассмотренном в работе [2] в нерелятивистском случае ($\beta^2 = 0$). Согласно (15), учет вихревого поля не нарушает этого равновесия.

В реальном случае ($\rho \neq \text{const}$) радиальная компонента электрического поля испытывает скачок на границах сгустков ($|z'| = a_n/2$) и в нерелятивистском случае не существует трехмерного аналога решений [3]. Этот скачок не устраняется и в релятивистском случае, так как из (15) при выполнении (16) следует

$$\frac{\tilde{\rho}_{\text{эфф}}(r, a_n/2)}{\rho(r)} = \begin{cases} \beta^2, & |z'| \leq \frac{a_n}{2}, \\ \cos\left[\frac{2\pi\alpha}{l}\left(|z'| - \frac{a_n}{2}\right)\right], & \frac{a_n}{2} < |z'| \leq \frac{l}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

Однако в ультрарелятивистском пределе $\gamma^2 \gg 1$, $\beta^2 \simeq 1$ существует асимптотическое решение, в условиях которого $E_r - \beta H_\varphi = -\partial\Psi/\partial r$ непрерывным образом продолжается через границу сгустка.

Таким образом, при выполнении условия (16) ультрарелятивистские электронные сгустки находятся в продольном равновесии, а по радиусу действует фокусирующая магнитная сила $F_r = -e\partial\Psi/\partial r$. Если начальный радиус пучка достаточно велик $R_0 \gg c/\omega_p$, то из (8) и (17) следует

$$F_r = \frac{mv^2}{\rho_p} \frac{\partial\rho}{\partial r}. \quad (18)$$

Система уравнений гидродинамики

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{F_r}{m\gamma}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r\rho) = 0, \quad (19)$$

описывающих радиальные колебания сгустков, имеет простое автомодельное решение

$$v_r = \frac{r}{R} \frac{dR}{dt}, \quad \rho = \rho_0 \begin{cases} \frac{R_0^3}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

где $R(t)$ — радиус сгустка, ρ_0 — начальная плотность электронов на оси пучка ($r=0$).

Из (18) и (19) следует нелинейное уравнение

$$\ddot{R} + \Omega_0^2 R_0^4 R^{-3} = 0, \quad \Omega_0^2 = \frac{2\rho_0 v^2}{\gamma \rho_p R_0^2},$$

оторое описывает радиальное схлопывание пучка

$$R(t) = R_0 (1 - \Omega_0^2 t^2)^{1/2} \quad (20)$$

а время $t_b = \Omega_0^{-1}$. Физически корректное решение, учитывающее наличие точек оворота в области $R \approx 0$ за счет всегда реально существующего градиента да-
вления, может быть получено путем периодического продолжения фор-
мулы (20) в область $t > t_b$.

Рассмотрим физический механизм возникновения эффекта электростатиче-
ской самофокусировки на простом случае одномерных решений (16). Пред-
положим, что $\delta \ll 1$ и коллективное взаимодействие с плазмой происходит в ос-
новном через поле этой моды $E(t, z)$. Из формул (5) и (16) находим поле первой
армоники

$$E(t, z) = E_0 \sin(kz - \omega_m t), \quad E_0 = \frac{8\rho_0}{k} \sin \frac{ka}{2}, \quad (21)$$

де $k = 2\pi l^{-1}$ и $\omega_m = kv$.

Под действием поля в плазме возникает волна поляризации [3]

$$\tilde{n}_p \approx \frac{E_0 \rho_p}{2m\omega_p \delta} \cos kz'; \quad z' = z - vt,$$

поле которой в $\delta^{-1} \gg 1$ раз превышает (21). Число электронов плазмы, вытес-
ненных из объема сгустков поляризационным полем, равно

$$N_e = \int_{-a/2}^{a/2} \tilde{n} dz' = \frac{2\rho_0}{\pi \delta k e} \sin^2 \frac{ka}{2}. \quad (22)$$

В результате электроны пучка оказываются в ионных потенциальных ямах,
вижущихся со скоростью v , и сила кулоновского расталкивания в сгустках
компенсируется зарядом ионов плазмы. Полная зарядовая нейтрализация
сгустков имеет место, если число электронов $N_b = \rho_0 a / e l$ равно числу свободных
ионов $N_1 = N_e$. Считая сгустки достаточно тонкими $a \ll l$, с помощью (22) на-
ходим равновесный продольный размер $a = \delta l$, что совпадает с (16) при $n=1$.
Заметим, что формула (16) является более общей, так как получена для дисков
произвольной толщины, когда вклад в волну поляризации дает целый спектр
армоник. Таким образом, в случае моноскоростного ультрарелятивистского
пучка самофокусировка сгустков является комбинированной, так как продоль-
ные размеры сгустков определяются только электростатическим полем (сильная
фокусировка), а поперечное сжатие происходит под действием магнитного поля
(слабая фокусировка) и не зависит от параметра δ . Последнее обстоятельство
значительно уменьшает величину поперечной температуры, необходимой для
уществования радиального равновесия релятивистского пучка в плазме при
произвольной толщине сгустков $a = \delta l$.

5. Сателлитная неустойчивость

Неустойчивость глубоко промодулированного электронного пучка в плазме
(сателлитная неустойчивость) была впервые рассмотрена в работе [8] для по-
следовательности заряженных электронных плоскостей, однако развитая в ней
теория не является корректной. Поэтому для оценки инкрементов мы будем
ориентироваться на дисперсионное уравнение, полученное в работе [9] для
релятивистского одномерного пучка. Для одномерных сгустков (14) в системе
отсчета пучка это соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} \cos \left[\left(k' + \frac{\omega'}{v} \right) \right] &= \cos \frac{\omega'_p a'}{v \varepsilon_b} \cos \left[\frac{\omega'_p}{v} (l' - a') \right] - \\ &- \frac{1}{2} (\varepsilon_b^{1/2} + \varepsilon_b^{-1/2}) \sin \frac{\omega'_p a'}{v \varepsilon_b} \sin \left[\frac{\omega'_p}{v} (l' - a') \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где ω' и k' — частота и волновое число возмущений, $\varepsilon_b = 1 - (\omega'_b{}^2/\omega^2)$, $\omega'_b = (4\pi e \rho'_b m^{-1})^{1/2}$, $\omega'_p = (4\pi e \rho'_p m^{-1})^{1/2}$, ρ'_0 и ρ'_p — плотность пучка и плазмы, l' — расстояние между сгустками, a' — толщина сгустков.

Выполняя преобразование Лоренца

$$\rho'_0 = \frac{\rho_0}{\gamma}, \quad \rho'_p = \gamma \rho_p, \quad l' = \gamma l, \quad a' = \gamma a,$$

преобразуем (23) в систему отсчета плазмы

$$\begin{aligned} \cos \frac{\omega l}{v} &= \cos \frac{\omega_p a}{v \varepsilon_b^{1/2}} \cos \left[\frac{\omega_p}{v} (l - a) \right] - \\ &- \frac{1}{2} (\varepsilon_b^{1/2} + \varepsilon_b^{-1/2}) \sin \frac{\omega_p a}{v \varepsilon_b^{1/2}} \sin \left[\frac{\omega_p}{v} (l - a) \right], \\ \omega_p^2 &= \frac{4\pi e \rho_0}{m \gamma^3}, \quad \varepsilon_b = 1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kv)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для равновесных сгустков $a = \delta l$ (см. (16)) из (24) следует

$$1 - \frac{a^2}{l^2} \frac{\omega_p^2}{(\omega - pv_m)^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kv)^2} = 0,$$

где p — целые числа.

В случае достаточно широких сгустков

$$\delta = \frac{a}{l} \gg v^{1/3}, \quad v = \frac{\langle \rho \rangle}{\gamma^3 \rho_p}, \quad \langle \rho \rangle = \rho_0 \frac{a}{l} \quad (25)$$

частота и максимальный инкремент равны

$$\begin{aligned} \omega_1 &= p \omega_m + \frac{a}{l} \omega_p + \Delta_1 = kv + \Delta_1, \\ \Delta_1 &= \frac{-1 \pm i 3^{1/2}}{2^{1/3}} v^{1/3} \omega_p. \end{aligned} \quad (26)$$

При выполнении неравенства, обратного (25), соответственно получаем

$$\begin{aligned} \omega_2 &= kv \pm \omega_b + \Delta_2 = p \omega_m + \Delta_2, \\ \Delta_2 &= \frac{-1 \pm i 3^{1/2}}{2^{1/3}} \delta^{1/2} v^{1/6} \omega_p, \quad \delta \ll v^{1/3}. \end{aligned} \quad (27)$$

Инкремент (26) совпадает с черенковским инкрементом сплошного пучка с плотностью $\langle \rho \rangle$ [6]. Для тонких сгустков инкремент (27) мал по сравнению с черенковским в отношении $\delta^{1/2}/v^{1/6} \ll 1$.

Нелинейное насыщение амплитуды сателлитной неустойчивости достигается, когда глубина модуляции сгустков ρ_b достигает значение ρ_0

$$\bar{\rho}_b \simeq \frac{E_{nl} k \rho_0}{m \gamma^3 (\omega - kv)^2} \simeq \rho_0.$$

Подставляя значения $\omega - kv$ и k из формул (26) и (27), находим

$$E_{nl} \sim \begin{cases} v^{2/3}, & \delta \gg v^{1/3}, \\ \frac{v}{\delta}, & \delta \ll v^{1/3}. \end{cases} \quad (28)$$

Согласно формуле (28), поле стационарной моды, удерживающей ступки, равно $E_p \sim \nu/\delta$ и при выполнении первого неравенства (28) оказывается меньшим E_{nt} , следовательно, развитие сателлитной неустойчивости сопровождается разрушением ступков за время $t_1 \simeq \nu^{-1/3} \omega_p^{-1}$.

Во втором предельном случае (28) поле $E_{nt} \simeq E_p$, а время раскочки колебаний $t_2 \simeq (\delta^{1/2} \nu^{1/6} \omega_p)^{-1}$. Поэтому существует возможность транспортировки пучка в виде тонких ступков $a/l \ll \nu^{1/3}$ в плазме на расстояние $L \simeq ct_2$.

6. Основные результаты

Разбитый на отдельные ступки релятивистский электронный пучок в плотной плазме находится в равновесии с электромагнитным излучением, если частота модуляции меньше плазменной частоты $\delta = 1 - \omega_n/\omega_p > 0$. В условиях резонанса $\delta \ll 1$ волна излучения близка к потенциальной и механизм самофокусировки аналогичен рассмотренному в работах [2-4] для нерелятивистских пучков с продольными размерами ступков $a \gg \delta l$. Объемная потенциальная яма с глубиной $W \simeq (m\nu^2 \rho_0)/(\rho_p \delta)$ удерживает от разлета электроны с температурой $T \sim W$, а радиус пучка и толщина ступков определяются из условия компенсации фокусирующей кулоновской силы градиентом кинетического давления в пучке. В ультрарелятивистском случае $\gamma^2 \gg 1$ для моноскоростного пучка существует равновесие, в условиях которого ступки имеют толщину $a = \delta l$ и находятся в бессиловом продольном равновесии, а радиальная фокусировка (схлопывание электронных дисков) происходит под действием силы Лоренца. Так как в этом случае потенциальная электромагнитная яма является анизотропной $W_{\parallel} \simeq (m\nu^2 \rho_0)/(\rho_p \delta)$ и $W_{\perp} \simeq \delta W_{\parallel}$, то наличие в пучке с $\delta \ll 1$ достаточно малого теплового разброса стабилизирует радиальное схлопывание ступков, не изменяя их толщины $a = \delta l$. Тем самым появляется возможность обеспечить равновесие пучков с малой температурой $T \ll W_{\parallel}$ и радиусом $R_0 \simeq (T/(4\pi e \rho_0))^{1/2}$, необходимым для транспортировки в плазме больших токов в пучках, разбитых на отдельные ступки,

$$I_b \ll \pi \left(\frac{c}{\omega_p} \right)^2 \langle \rho \rangle v \simeq I_a \gamma^2 \nu,$$

где $I_a = (mc^3 \beta \gamma)/e$ — ток Альфвена, $\nu = \langle \rho \rangle / (\rho_p \gamma^3)$.

Выполнение последнего условия позволяет уменьшить инкремент сателлитной неустойчивости при

$$\delta \ll \nu^{1/3} \simeq \left(\frac{I_b}{I_a \gamma^2} \right)^{1/3}$$

и увеличить длину L транспортировки пучка в плазме

$$L \simeq \frac{c}{\omega_p \delta^{1/2}} \left(\frac{I_a \gamma^2}{I_b} \right)^{1/6}.$$

Список литературы

- [1] Красовицкий В. Б. // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 9. Вып. 12. С. 679—683.
- [2] Косаленко В. П., Юшманов П. Н. // Физика плазмы. 1977. Т. 3. Вып. 6. С. 1284—1288.
- [3] Дорофеев В. Г., Красовицкий В. Б. // УФЖ. 1984. Т. 29. № 3. С. 395—405.
- [4] Дорофеев В. Г., Красовицкий В. Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. Вып. 8. С. 1043—1048.
- [5] Гладкий А. М., Коваленко В. П., Юшманов П. Н. // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 24. Вып. 10. С. 533—537.
- [6] Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. и др. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. 164 с.
- [7] Судан Р. Н. Основы физики плазмы / Под ред. А. А. Галеева, Р. Н. Судана М.: Энергоиздат, 1984. Доп. к Т. 2. 43 с.
- [8] Kruer W. L. // Phys. Rev. Lett. 1969. Vol. 23. N 15. P. 838—841.
- [9] Ахизер А. И., Демидов В. П., Половин Р. В. // Физика плазмы. 1977. Т. 3. № 5. С. 1079—1087.