01; 05



# ФРАКТАЛЬНАЯ ГРИФФИТСОВА ТРЕЩИНА

*А. Б. Мосолов*

Рассмотрено распространение фрактальной трещины в хрупком материале. При использовании критерия Гриффитса найдена зависимость коэффициента концентрации напряжений от нагрузки, среднего размера трещины и ее фрактальной размерности. Получены асимптотические законы, характеризующие изменение напряжений и раскрытие в окрестности кончика трещины.

Поверхность излома (или трещины), формирующаяся при разрушении большинства материалов, весьма нерегулярна и характеризуется наличием неровностей (долин, пиков, зазубрин и т. д.) самых различных размеров. Поэтому реальная трещина в мезомасштабе мало похожа на идеальные трещины с гладкими берегами, рассматриваемые обычно в теории разрушения. Важная особенность структуры поверхности трещин обнаружена в работах [1, 2], где установлено статистическое самоподобие микрорельефа поверхности разрушения. Следовательно, можно предположить, что структуру поверхности трещин можно моделировать фрактальными поверхностями. Такие модели предположены в работах [2-5], где также обсуждаются экспериментальные методы определения фрактальной размерности поверхности трещины.

Используя для моделирования трещин фрактальные поверхности, следует помнить, что с математической точки зрения фрактал бесконечно извилист, а фрактальная поверхность имеет бесконечную площадь. Извилистость трещины (как и ее площадь) конечны, поэтому существует естественный нижний предел $l_0$ применимости фрактальной модели. Размер $l_0$ связан обычно с микроструктурой среды, для металлов это может быть, например, размер зерна, субзерна или другого структурного элемента. С другой стороны, должен существовать и верхний предел применимости фрактальной модели $L_0$, связанный с геометрическими размерами тела, размером трещины, характерным масштабом неоднородности внешних полей и т. д. Таким образом, фрактальная модель применима для масштабов $r$, удовлетворяющих условию $l_0 \ll r \ll L_0$.

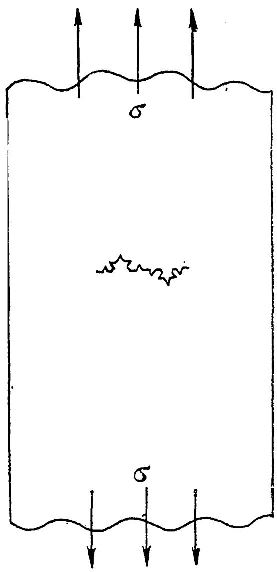
Причины и закономерности формирования фрактальной геометрии при разрушении в настоящее время изучены еще недостаточно, хотя имеются работы, в которых предложены модели, приводящие к фрактальной структуре поверхности трещин или очагов множественного разрушения [6-9]. В данной работе эти вопросы не рассматриваются, а основное внимание сосредоточено на следствиях, к которым приводит фрактальность поверхности трещины.

Ограничимся случаем хрупкого разрушения и будем сначала интересоваться развитием трещин в двумерной геометрии (плоские задачи). Рост трещины в твердом теле носит в значительной степени стохастический характер, нас же будут интересовать в основном характеристики, полученные в результате усреднения по реализациям.

Предположим, что в теле содержится трещина, представляющая собой стохастический фрактал размерности $D$ (с собственной топологической размерностью $d=1$). Будем считать, что «в среднем» трещина расположена и распространяется вдоль оси $x_1$ (это означает, что вдоль траектории трещины $\langle x_2 \rangle \sim 0$),

$R$ — ее текущий средний размер вдоль этой оси, $R_\perp$ — средний размер трещины вдоль оси $x_2$, $R_\perp \ll R$, а нагрузки приложены так, как показано на рисунке. На масштабах $r$, сравнимых с $R$, трещина будет «в среднем» выглядеть как обычный одномерный разрез, но при $l_0 \ll r \ll R$ становится существенной фрактальная геометрия и, в частности, «истинная» длина трещины $L$ связана с размером $R$ по фрактальному закону $L \sim R^D$.

Перейдем к рассмотрению вопроса о развитии трещины. Следуя критерию Гриффитса, будем считать, что в равновесном случае при увеличении размера трещины на $\Delta R$ величина высвобождающейся упругой энергии $\Delta U_e$ компенсируется приращением поверхностной энергии $\Delta U_s$ вновь образующегося разреза, т. е.



Пластинка с фрактальной трещиной.

$$\Delta U_e = \Delta U_s.$$

Очевидно, что

$$\Delta U_e \sim \frac{\sigma^2}{2E} R \Delta R, \quad \Delta U_s \sim \gamma D R^{D-1} \Delta R,$$

где $E$ — модуль упругости, $\sigma$ — величина приложенного напряжения, $\gamma$ — коэффициент поверхностной энергии.

Следовательно, в равновесном случае

$$D^{-1} \sigma^2 R^{2-D} \sim E\gamma.$$

Используя определение коэффициента интенсивности напряжений $K_I$ (см., например, [10]), получим, что для фрактальной трещины размерности $D$

$$K_I(D) = c \frac{\sigma R^\alpha}{\sqrt{D}}, \quad \alpha = \frac{2-D}{2}, \tag{1}$$

где $c$ — коэффициент, зависящий от деталей формы трещины и конкретного распределения внешних нагрузок.

Из формулы (1) следует, что для одномерного разреза ($D=1$), как и должно быть,

$$K_I \sim \sigma \sqrt{R},$$

а в случае $D=2$, когда трещина фактически представляет собой каверну, $K_I$ не зависит от размера $R$

$$K_I \sim \sigma,$$

что также согласуется с известными результатами.

Обозначая $K_{I0} \sim \sigma\sqrt{R}$ — коэффициент интенсивности напряжений для одномерного разреза, с точностью до мультипликативной константы порядка 1 получим

$$K_I(D) \sim K_{I0} R^{\frac{1-D}{2}}. \tag{2}$$

Таким образом, при учете фрактальной геометрии поверхности трещины в выражении для $K_I$ возникает необычный масштабный фактор, описываемый формулой (2). При возрастании $D$ (грубо говоря, при увеличении извилистости трещины) коэффициент интенсивности убывает, причем $\ln K_I$ линейно зависит от $D-1$. Последнее хорошо согласуется с экспериментальными наблюдениями работы [4].

Учитывая вид зависимости $K_I$ от $\sigma$, $R$ для фрактальной трещины (1), по аналогии с классическим случаем разреза можно заключить, что в окрестности вершины трещины напряжения будут характеризоваться асимптотическим поведением

$$\sigma_{ij} \sim r^{\frac{D-2}{2}}, \tag{3}$$

где $r$ — расстояние от вершины трещины.

Область применимости асимптотики (3), очевидно, $l_0 \ll r \ll R$.

Аналогично, для раскрытия в конце фрактальной трещины получим асимптотическую формулу

$$\delta \sim r^{D/2}. \tag{4}$$

Асимптотики (3), (4) достаточно очевидны, однако, их можно получить и более строгим образом. Воспользуемся подходом, применяемым в теории разрушения при построении инвариантного $J$ — интеграла [10].

Рассмотрим потенциальную энергию деформации тела с фрактальной трещиной, находящегося под действием заданных на поверхности $\Gamma_T$ нагрузок $T_i^0$,

$$P = \int_S W(\varepsilon_{mn}^0)\,ds - \int_{\Gamma_T} T_i^0 u_i^0 d\gamma,$$

где $S$ — площадь тела, $W$ — упругая энергия, $T_i^0 = \sigma_{ij}^0 n_j$, $u_i^0$ — смещения.

Найдем приращение потенциальной энергии $\Delta P$ при увеличении трещины на $\Delta\gamma$. В этом случае перемещения, деформации и напряжения получат соответственно приращения $\Delta u_i$, $\Delta\varepsilon_{ij}$, $\Delta\sigma_{ij}$. Повторяя практически дословно рассуждения работы [10], получим

$$\Delta P \sim \frac{1}{2}\int_{\Delta\gamma} T_i^0 \Delta u_i d\gamma. \tag{5}$$

Интеграл в формуле (5) берется вдоль «продолжения» трещины $\Delta\gamma$. Размер трещины вдоль направления $x_1$ увеличивается в среднем на некоторую величину $\Delta l$, а длина — соответственно на $\Delta s \sim (\Delta l)^D$.

Фактически же нас интересует не сама величина $\Delta P$, а среднее значение $\langle \Delta P \rangle$ по всем реализациям. Можно показать, что при принятых относительно развития фрактальной трещины предположениях

$$\langle \Delta P \rangle \sim \frac{1}{2}\int_{l}^{l+\Delta l} \sigma_{2i}(l)\left(u_i^+(l+\Delta l) - u_i^-(l+\Delta l)\right) dx_1,$$

где $\sigma_{2i}$ и $u_i^+$ — средние значения напряжений и смещений берегов для трещин размера $l$ и $l+\Delta l$ соответственно.

Полагая справедливыми асимптотические формулы $\sigma_{ij} \sim r^{-\alpha}$, $u_i^{\pm} \sim r^{1-\alpha}$, можно легко оценить величину $\langle \Delta P \rangle$

$$\langle \Delta P \rangle \sim \Delta l^{2-2\alpha}.$$

Но тогда

$$\frac{\langle \Delta P \rangle}{\Delta s} \sim \Delta l^{2-2\alpha-D}. \tag{6}$$

Величина $\langle \Delta P \rangle / \Delta s$ — это среднее приращение потенциальной энергии на единицу приращения длины трещины (или поток энергии в вершину трещины). Если, как это обычно принято в теории хрупкого разрушения, считать, что $\Delta P/\Delta s = J_c \simeq \mathrm{const}$ [10], то из (6) следует соотношение $2-2\alpha-D=0$, а значит, $\alpha=(2-D)/2$. Таким образом, получаем тот же показатель степени в асимптотических формулах, что и прежде.

Полученные результаты легко переносятся на случай трещин в трехмерных телах. Следует только помнить, что в трехмерном случае можно рассматривать различные модели трещин с фрактальной геометрией.

Например, можно представить себе приблизительно дискообразную в плане трещину размера $R$, поверхности которой будут фракталами размерности

$2 \leqslant D \leqslant 3$. Используя критерий Гриффитса, можно получить, что в этом случае

$$K_I \sim \sigma R^{\frac{3-D}{2}}.$$

Другая фрактальная модель получается, если считать поверхности трещины гладкими, а фронт трещины — фрактальной кривой размерности $1 \leqslant D \leqslant 2$. Для такой модели

$$K_I \sim \sigma R^{\frac{2-D}{2}}.$$

Автор выражает благодарность Р. В. Гольдштейну и Ф. М. Бородичу за полезные и стимулирующие обсуждения.

**Список литературы**


[1] *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. San Fransisco: Freeman, 1983.
[2] *Mandelbrot B. B., Passoja D. E., Paullay A. J.* // Nature. 1984. Vol. 308. N 4. P. 721—722.
[3] *Mecholsky J. J., Mackin T. J.* // J. Mater. Sci. Lett. 1988. Vol. 7. N 11. P. 1145—1147.
[4] *Mu Z. Q., Lung C. W.* // J. Phys. D. 1988. Vol. 21. N 5. P. 848—850.
[5] *Bessendorf M. H.* // Int. J. Engn. Sci. 1987. Vol. 25. N 6. P. 667—672.
[6] *Лунг Ч.* // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 260—265.
[7] *Meaking P., Li G., Sander L. M., Lonis E., Guinea F.* // J. Phys. A. 1989. Vol. 22. N 9. P. 1393—1403.
[8] *Herrmann H. J.* // Physica D. 1989. Vol. 38. N 1-3. P. 192—197.
[9] *Мосолов А. Б., Динариев О. Ю.* // Проблемы прочности. 1988. № 1. С. 3—7.
[10] *Райс Дж.* // Разрушение / Под ред. Г. Либовица. М., 1975. Т. 2. С. 204—335.


Институт проблем механики АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
5 октября 1990 г.