

10

© 1991 г.

## К ТЕОРИИ УСКОРЕНИЯ И ФОКУСИРОВКИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ КВАДРУПОЛЯМИ

Ю. А. Буданов

Исследуются вопросы динамики частиц в ускорителе с пространственно-периодической высокочастотной квадрупольной фокусировкой на стоячей волне типа  $\pi$ . Рассмотрен механизм формирования эффективности ускорения на оси многоэлектродного зазора с произвольным числом промежуточных электродов. Получено правило векторного сложения эффективностей отдельных зазоров. Основные соотношения для устойчивости поперечного движения получены для фокусировки произвольной кратности. Обсуждаются конкретные формулы для характеристического показателя уравнений движения с  $FD$ - и  $FFDD$ -фокусировками. Проведено сравнение полученных выражений с численным расчетом.

### Введение

Устойчивость движения частиц в линейном ускорителе можно обеспечить таким формированием геометрии ускоряющих зазоров, при котором поперечные компоненты ускоряющего поля могут быть использованы для создания высокочастотной квадрупольной фокусировки (ВЧКФ). Первоначальные исследования фокусировки такого типа [1-4] носили в основном теоретический характер, так как приводили либо к слабому фокусирующему эффекту, либо к недопустимо низкому темпу ускорения. Предложение В. А. Теплякова [5] о введении в ускоряющий период одного или в общем случае нескольких электродов под промежуточными потенциалами позволило существенно улучшить характеристики этой фокусировки. В дальнейшем в ИФВЭ был проведен комплекс разработок по созданию ускорителя с ВЧКФ в системе со стоячей волной типа  $\pi$ , реализованной на базе  $H$ -резонатора [6]. В настоящее время в ИФВЭ создан и находится в эксплуатации ускоритель такого типа на 30 МэВ [7] — инжектор в бустер протонного синхротрона ИФВЭ. На протяжении всего канала ускорения здесь осуществлена фокусировка высокочастотным квадрупольным полем, в начальной части (до 2 МэВ) это пространственно однородная фокусировка [8], а в основной части ускорителя реализован вариант пространственно-периодической фокусировки [7].

Исследованиям по пространственно однородной фокусировке посвящена обширная научная литература, проработка же теории пространственно-периодической фокусировки, которая в этом плане является, несомненно, более сложной и многообразной, далеко не столь подробна. В работе рассматриваются вопросы динамики частиц в ускорителе с пространственно-периодической ВЧКФ на стоячей волне типа  $\pi$ . Для продольного движения на периоде ускорения рассмотрено формирование эффективности на оси сложного многоэлектродного зазора с произвольным числом промежуточных электродов. Поперечное движение рассматривается при фокусировке произвольной кратности. Полученные общие соотношения обсуждаются и для конкретных систем.

Введем необходимые определения и исходные соотношения. Длину периода ускорения для  $\pi$ -систем естественно выбрать  $L = (\beta\lambda)/2$ ,  $\lambda$  — длина волны высокочастотного поля,  $\beta = v/c$  — средняя относительная скорость частицы на периоде. Вследствие малости прироста энергии  $\Delta W$  на  $L$  по сравнению с полной энергией

В будем полагать, как и обычно в теоретических выкладках [9], что на периоде ускорения частица имеет скорость  $\beta$ . В дальнейшем пространственная часть потенциала  $u(\mathbf{r})$  представлена в виде ряда Фурье в цилиндрической системе координат  $(z, r, \varphi)$  на длине периода фокусировки  $S=2NL$ ,  $N$  — кратность фокусировки (число периодов высокочастотного поля, за которое частица проходит период фокусировки),  $N=1$  для  $FD$ -фокусировки,  $N=2$  для  $FFDD$ , и т. д.

$$u(\mathbf{r}) = u \sum_{n=0}^{\infty} \cos 2n\varphi \varphi_n(z, r),$$

$$v_n(z, r) = c_{2n} (kr)^{2n} + \sum_{m=1}^{\infty} I_{2n}(kmr) [a_{2n,m} \cos kmz + b_{2n,m} \sin kmz], \quad (1)$$

где  $k=(2\pi)/S$ ,  $u$  — амплитудная разность потенциалов на ускоряющем периоде.

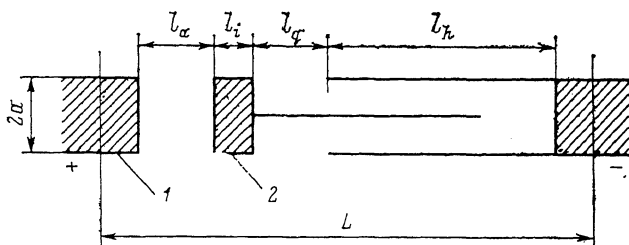


Рис. 1. Схема периода ускорения с одним промежуточным электродом.

1 — трубка дрейфа, 2 — промежуточный электрод.

Ориентацию системы координат можно представить по рис. 1, на котором представлена для примера схема периода ускорения с одним промежуточным электродом. Ось  $z$  совпадает с осью канала и направлена по движению частиц, азимутальный угол  $\varphi$  отсчитывается от направления на один из вытянутых электродов («рога»): например, для приведенной на рисунке системы от направления в плоскость рисунка. В системе на рис. 1 должно быть четыре «рога», а видны лишь три, так как два «рога», соответствующие азимута  $\varphi=0$ ,  $\varphi=\pi$ , на рисунке накладываются друг на друга. Необходимо отметить, что схема на рис. 1 построена таким образом, что на ней спроектированы на плоскости поверхности и линии касания электродами апертурного цилиндра. Это важно при сопоставлении размеров, используемых здесь, с размерами реальных электродов. Например, длина аксиального зазора  $l_d$ , используемая здесь, больше длины аксиального зазора, измеряемой от торца трубки дрейфа до торца промежуточного электрода, на величину радиуса скругления трубки дрейфа и радиуса скругления промежуточного электрода.

### Эффективность ускорения

Продольную компоненту поля  $E_z(\mathbf{r})$  по (1) представим в виде ряда

$$E_z(\mathbf{r}) = ku \sum_{n=0}^{\infty} \cos 2n\varphi \sum_{m=1}^{\infty} I_{2n}(kmr) [A_{2n,m} \cos kmz + B_{2n,m} \sin kmz],$$

$$A_{2n,m} = -mb_{2n,m}, \quad B_{2n,m} = ma_{2n,m}. \quad (2)$$

Поле на оси ускорителя  $E_z(z)$  в  $\pi$ -системе в соседних периодах противофазно, и для периодического продолжения используется условие

$$E_z(z + nL) = (-1)^n E_z(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Зафиксируем начало координат в произвольной точке периода ускорения и для задания начального условия положим фазу высокочастотного поля при положении частицы в начале координат  $\varphi_0$ . Тогда фаза в других точках периода

$$\varphi(z) = \varphi_0 + k_1 z, \quad k_1 = \frac{2\pi}{\beta\lambda}. \quad (4)$$

Прирост энергии на периоде

$$\Delta W = e \int_L E_z(z) \cos(\varphi_0 + k_1 z) dz. \quad (5)$$

В (5) и ряде последующих интегралов поставлены не пределы интегрирования, а длина участка интегрирования, так как для интегралов от периодических функций по периоду этих функций значения интегралов не зависят от положения начала интегрирования. Подставим (2) в (5) и, проведя интегрирование, получим

$$\Delta W = eu \frac{\pi}{2} \sqrt{a_{0,N}^2 + b_{0,N}^2} \cos(\varphi_0 + \psi),$$

$$\cos \psi = \frac{b_{0,N}}{\sqrt{a_{0,N}^2 + b_{0,N}^2}}, \quad \sin \psi = \frac{a_{0,N}}{\sqrt{a_{0,N}^2 + b_{0,N}^2}}. \quad (6)$$

Определим координату электрического центра  $z_s$  условием

$$\int_L E_z(z) \sin k_1(z - z_s) dz = 0 \quad (7)$$

и, раскрывая это условие с помощью (6), получим  $\psi = k_1 z_s$ , таким образом, фаза  $(\varphi_0 + \psi)$  в (6) является фазой в электрическом центре. Итак, формула для  $\Delta W$  приведена к известному виду

$$\Delta W = e v u \cos \varphi_s \quad (8)$$

с удобным для дальнейшего представлением эффективности ускорения

$$\theta = \frac{\pi}{2} \sqrt{a_{0,N}^2 + b_{0,N}^2}, \quad (9)$$

при котором положение начала координат не существенно, поскольку сумма квадратов амплитуд гармоник в (9) инвариантна относительно сдвига начала отсчета координат.

Рассмотрим теперь, как формируется  $\theta$  в зависимости от распределения продольной компоненты поля на поверхности апертурного цилиндра  $E_z(z, a, \varphi) = E_z(r) |_{r=a}$ . Из (2) следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{0,N} \\ b_{0,N} \end{array} \right\} = \frac{\pm 1}{2\pi^2 u I_0(k_1 a)} \int_{2L} dz \left\{ \begin{array}{l} \sin k_1 z \\ \cos k_1 z \end{array} \right\} \int_{2\pi} d\varphi E_z(z, a, \varphi). \quad (10)$$

На разных периодах ускорения на периоде фокусировки ориентация может быть различной из-за перемены местами фокусирующей и дефокусирующей плоскостей. Соответственно  $E_z$  на одинаковых азимутах в разных периодах ускорения могут различаться, однако интеграл от  $E_z(z, a, \varphi)$  по  $\varphi$  уже не зависит от ориентации квадрупольей, и поэтому в (10) промежуток интегрирования уменьшен с  $2NL$  до  $2L$ . Пусть на периоде ускорения между трубками дрейфа размещено  $K$  промежуточных электродов ( $K=0, 1, \dots$ ). Тогда поверхность апертурного цилиндра на каждом периоде ускорения разбивается на  $I=K+1$  зазоров — не связанных между собой поверхностей, разделенных участками касания апертуры трубками дрейфа или промежуточными электродами. На участках касания  $E_z(z, a, \varphi)=0$ . Введем теперь  $I$  функций  $E_z^{(i)}(z, a, \varphi)$   $i=1, \dots, I$ , каждая из которых совпадает с  $E_z(z, a, \varphi)$  на  $i$ -м зазоре и равна нулю на остальной части поверхности апертурного цилиндра на периоде ускорения. В итоге получаем следующее представление:

$$E_z(z, a, \varphi) = \sum_{i=1}^I E_z^{(i)}(z, a, \varphi), \quad (11)$$

причем

$$\int_L E_z^{(i)}(z, a, \varphi) dz = u_i, \quad (12)$$

где  $u_i$  — разность потенциалов на  $i$ -м зазоре и

$$\sum_{i=1}^I u_i = u. \quad (13)$$

В соответствии с (11) представим (10) в следующей форме:

$$\begin{Bmatrix} a_{0,N} \\ b_{0,N} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^I \varepsilon_i \begin{Bmatrix} a_{0,N}^{(i)} \\ b_{0,N}^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_i = u_i/u$ , а

$$\begin{Bmatrix} a_{0,N}^{(i)} \\ b_{0,N}^{(i)} \end{Bmatrix} = \frac{\pm 1}{2\pi^2 u_i I_0(k_1 a)} \int_{2L} dz \begin{Bmatrix} \sin k_1 z \\ \cos k_1 z \end{Bmatrix} \int_{2\pi} d\varphi E_z^{(i)}(z, a, \varphi). \quad (15)$$

Из (9), (14) следует, что для сложного периода ускорения

$$\theta = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^I \varepsilon_i a_{0,N}^{(i)}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^I \varepsilon_i b_{0,N}^{(i)}\right)^2}. \quad (16)$$

Заметим теперь, что если  $u(r)$  в (1) гармоническая в  $r < a$  функция, то и  $E_z(r)$  гармоническая в  $r < a$  функция, причем в силу принципа суперпозиции для гармонических функций справедливо следующее представление:

$$E_z(r) = \sum_{i=1}^I E_z^{(i)}(r), \quad (17)$$

где  $E_z^{(i)}(r)$  — поле в апертурном цилиндре, порождаемое граничным условием  $E_z^{(i)}(z, a, \varphi)$  для  $i$ -го зазора на каждом периоде ускорения.

Для полей  $E_z^{(i)}(r)$   $i=1, 2, \dots, I$  можно, дословно повторив выкладки, проделанные здесь для  $E_z(r)$ , получить аналоги формул (6), (9)

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} \sqrt{a_{0,N}^{(i)2} + b_{0,N}^{(i)2}}, \quad \cos k_1 z_s^{(i)} = -\frac{\pi}{2\theta_i} b_{0,N}^{(i)}, \quad \sin k_1 z_s^{(i)} = \frac{\pi}{2\theta_i} a_{0,N}^{(i)}. \quad (18)$$

Подставим теперь значения  $a_{0,N}^{(i)}$ ,  $b_{0,N}^{(i)}$  из (18) в (16), возведем в квадрат обе суммы в (16) и получим

$$\theta = \sqrt{\sum_{i,j}^{I,I} \varepsilon_i \varepsilon_j \theta_i \theta_j \cos k_1 (z_s^{(i)} - z_s^{(j)})}. \quad (19)$$

Суммирование в (19) ведется независимо по  $i$  и  $j$  по всем зазорам  $i=1, 2, \dots, I$ ;  $j=1, 2, \dots, I$ . Формулу (19) можно преобразовать, выделив при суммировании члены с одинаковыми значениями индексов  $i$  и  $j$ , тогда

$$\theta = \sqrt{\sum_{i=1}^I \varepsilon_i^2 \theta_i^2 + \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j \theta_i \theta_j \cos k_1 (z_s^{(i)} - z_s^{(j)})}. \quad (20)$$

Для электрического центра периода ускорения, выраженного через значения электрических центров  $z_s^{(i)}$  зазоров, нетрудно получить

$$\sin k_1 z_s = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^I \varepsilon_i \theta_i \sin k_1 z_s^{(i)}, \quad \cos k_1 z_s = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^I \varepsilon_i \theta_i \cos k_1 z_s^{(i)}. \quad (21)$$

Полученные формулы суммирования (16), (19), (20) свидетельствуют о векторном характере сложения эффективностей зазоров  $\theta_j$ ,  $j=1, 2, \dots, I$ . Кратко

выразить полученные соотношения можно, введя понятие комплексной эффективности  $\bar{\theta}$ , в котором органически связаны понятия собственно эффективности и электрического центра. Модуль  $\bar{\theta}$  равен эффективности, а фаза комплексной эффективности равна  $k_1 z_s$ , т. е.

$$\bar{\theta} = \theta e^{ik_1 z_s}. \quad (22)$$

Тогда полученные ранее формулы суммирования (19)—(21) эквивалентны следующей основной формуле:

$$\bar{\theta} = \sum_{j=1}^l \varepsilon_j \bar{\theta}_j, \quad (23)$$

где  $\bar{\theta}_j = \theta_j \exp(ik_1 z_s^{(j)})$  — комплексная эффективность  $j$ -го зазора.

Таким образом, комплексная эффективность периода ускорения равна сумме комплексных эффективностей зазоров данного периода, взятой с весами, равными отношениям напряжений на соответствующих зазорах к сумме напряжений на всех зазорах периода.

Изложенный метод суммирования может быть использован при численных расчетах, а также является хорошим источником многих аналитических формул. Кратко рассмотрим здесь несколько простых примеров оценки эффективности составного периода ускорения с применением полученного правила суммирования. При ступенчатой аппроксимации граничных полей  $E_z^{(i)}(z, a, \varphi)$  на азимутах  $\varphi = 0, \pi/2$  и учете в (2) аксиально-симметричной и квадрупольной

Рис. 2. Примеры построений периода ускорения.  $a$  — период с одним промежуточным электродом,  $b$  — с двумя.

$n=0, 1$  гармоник можно получить, используя (9), эффективности аксиально-симметричного  $\theta_a$  и квадрупольного  $\theta_q$  зазоров

$$\theta_a = \frac{2 \sin k_1 \frac{l_a}{2}}{k_1 l_a I_0(k_1 a)}, \quad \theta_q = \frac{2 \sin k_1 \frac{l_q}{2} \cos k_1 \frac{l_h}{2}}{k_1 l_q I_0(k_1 a)}. \quad (24)$$

Выражение для  $\theta_a$  хорошо известно [9]. Величины  $\theta_a, \theta_q$  могут служить теми «элементарными» слагаемыми, из которых получается эффективность периода с произвольным количеством зазоров. В дальнейших примерах обозначим через  $\varepsilon_a = u_a/u$  долю от напряжения на периоде ускорения, приложенную к каждому аксиально-симметричному зазору, а через  $\varepsilon_q = u_q/u$  аналогичную величину для каждого квадрупольного зазора. Для периода ускорения, показанного на рис. 1, по (20) получим

$$\theta_{aq} = \sqrt{\varepsilon_a^2 \theta_a^2 + \varepsilon_q^2 \theta_q^2 + 2\varepsilon_a \varepsilon_q \theta_a \theta_q \cos k_1 \left( l_i + \frac{l_a + l_h + l_q}{2} \right)}. \quad (25)$$

Для другой возможной конфигурации периода с одним промежуточным электродом — двух квадрупольных зазоров (рис. 2,  $a$ ) получим

$$\theta_{qq} = 2\varepsilon_q \theta_q \cos k_1 \left( \frac{l_i + l_h + l_q}{2} \right). \quad (26)$$

Конфигурации  $\theta_{aq}, \theta_{qq}$  периода использованы в действующем ускорителе [7]. Ноль скоро речь шла о произвольном числе электродов, то приведем еще при-

мер эффективности периода с двумя промежуточными электродами, например для  $\theta_{aqq}$  (рис. 2, б)

$$\theta_{aqq} = \sqrt{\varepsilon_a^2 \theta_a^2 + \theta_{qq}^2 + 2\varepsilon_a \theta_a \theta_{qq} \cos k_1 \left( l_h + l_q + \frac{l_a + 3l_i}{2} \right)}. \quad (27)$$

Аналогичные соотношения можно получить для  $\theta_{qaq}$ ,  $\theta_{aqa}$ ,  $\theta_{qqq}$  и т. д. Формулы для эффективности и полученные далее характеристики поперечного движения интересно сопоставить с численным расчетом, не опирающимся на сделанные здесь предположения. В дальнейшем по продольному и поперечному движению проведем сравнение с периодом ускорения и фокусировки, соответствующими началу канала ускорения инжектора в бустер ИФВЭ [7]. Схема периода ускорения приведена на рис. 1. Перечислим численные значения параметров:  $L=66.83$  мм,  $a=9.5$  мм,  $l_i=0.5$  мм,  $l_a=14$  мм,  $l_q=16.34$  мм,  $l_h=29.26$  мм, при этом толщина стенки трубки дрейфа 3 мм, радиус скругления промежуточного электрода 1.5 мм и толщин «рога» 7.68 мм,  $\varepsilon_a = \varepsilon_q = 0.5$ . Используя (24), (25), получим  $\theta_{aqq} = 0.629$ . Численный расчет  $\theta_{aqq}$  был проведен по (9) с вычислением гармоник  $a_{0,2}$ ,  $b_{0,2}$ . Для этого аналогично [10] находились значения потенциала (1) на оси, а затем по Фурье-анализу и значения гармоник. Полученное значение  $\theta_{aqq} = 0.630$ . Аналогичные расчеты были проделаны для различных вариантов размеров и сопоставление показало хорошую работоспособность полученных соотношений.

### Фокусировка

Фокусировку  $N$ -й кратности высокочастотным квадрупольным полем исследуем в рамках теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В присоединенной области для одной из поперечных координат уравнение движения

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + Q(\tau)x = 0, \quad Q(\tau + 1) = Q(\tau), \quad (28)$$

где  $\tau = (c/(N\lambda))t$  — безразмерная переменная, изменяющаяся на единицу на периоде фокусировки, и

$$Q(\tau) = \frac{e\lambda^2 N^2}{\varepsilon_0 \gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} \cos(\varphi_0 + 2\pi N\tau), \quad (29)$$

$\varepsilon_0 = mc^2$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ,  $\varphi_0$  — фаза частицы в начале координат.

Зависимость правой части (29) от продольной координаты  $z$  выражена через временную переменную  $kz = 2\pi\tau$ . Используя (1), (29), представим теперь  $Q(\tau)$  как произведение двух рядов Фурье: одного, обусловленного пространственным изменением поля, а другого — изменением во времени

$$Q(\tau) = \left[ \frac{q_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos 2\pi m\tau + p_m \sin 2\pi m\tau \right] \times \\ \times [\cos \varphi_0 \cos 2\pi N\tau - \sin \varphi_0 \sin 2\pi N\tau], \quad (30)$$

$$\begin{cases} q_m \\ p_m \end{cases} = \frac{4\pi^2 e u}{\varepsilon_0 \gamma \beta^2} m^2 \left( \frac{1}{2} \begin{cases} a_{0,m} \\ b_{0,m} \end{cases} + \frac{1}{4} \begin{cases} a_{2,m} \\ b_{2,m} \end{cases} \right), \quad q_0 = \frac{16\pi^2 e u}{\varepsilon_0 \gamma \beta^2} c_2. \quad (31)$$

Произведение рядов Фурье (30) с одинаковым периодом разложения есть снова тригонометрический ряд с тем же периодом

$$Q(\tau) = \frac{Q_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \cos 2\pi m\tau + P_m \sin 2\pi m\tau \quad (32)$$

коэффициентами [11] произведения рядов

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= q_N \cos \varphi_0 - p_N \sin \varphi_0, \\
 Q_1 &= \frac{1}{2} \cos \varphi_0 (q_{N+1} + q_{N-1}) - \frac{1}{2} \sin \varphi_0 (p_{N+1} + p_{N-1}), \\
 P_1 &= \frac{1}{2} \cos \varphi_0 (p_{N+1} - p_{N-1}) + \frac{1}{2} \sin \varphi_0 (q_{N+1} - q_{N-1}), \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{33}$$

При представлении  $Q(\tau)$  в виде ряда Фурье в гладком приближении [9] для  $\mu$  (набега фазы поперечных колебаний на периоде фокусировки) можно получить

$$\mu^2 = \frac{Q_0}{2} + \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n^2 + P_n^2}{n^2}. \tag{34}$$

Симметрии поля позволяют упростить выражения для коэффициентов (31). При прохождении середины периода фокусировки фокусирующая и дефокусирующая плоскости меняются местами, с учетом этого

$$a_{2,N}^{(N)} = 0, \quad b_{2,N}^{(N)} = 0, \quad N = 1, 2, \dots \tag{35}$$

Дополнительный верхний индекс здесь и в дальнейшем будет при необходимости отмечать кратность фокусировки. Условие противофазности полей в соседних периодах ускорения в  $\pi$ -системе и синфазности в периодах через один приводит к соотношениям

$$a_{0,N\pm 1}^{(N)} = 0, \quad b_{0,N\pm 1}^{(N)} = 0, \quad N = 1, 2, \dots \tag{36}$$

Рассмотрим теперь подробнее соотношения в (34). Первое слагаемое обусловлено дефокусирующим действием ускоряющего поля. Преобразуя (33) с учетом (35), получим

$$\frac{Q_0}{2} = \frac{\pi^2 e u}{\delta_0 \gamma \beta^2} N^2 \sqrt{a_{0,N}^2 + b_{0,N}^2} \sin(\psi + \varphi_0), \tag{37}$$

причем выражение для  $\psi$  тождественно совпадает с соотношениями для  $\psi$  в (6), т. е.  $\psi = k_1 z_s$ . Сопоставление (37) с (9) дает

$$Q_0 = -\mu_z^2, \tag{38}$$

где в рассматриваемом приближении  $\mu_z$  — набег фазы малых продольных колебаний на периоде фокусировки.

Фокусировку в представлении (34) для  $\mu$  описывает ряд с быстро убывающими членами. Подавляющее воздействие в нем обусловлено гармониками  $Q_1, P_1$ , что подтверждается последующими численными расчетами. Рассмотрим величину

$$\mu_f^2 = \frac{1}{8\pi^2} (Q_1^2 + P_1^2). \tag{39}$$

Для ВЧКФ  $Q_1, P_1$  получены в (33). Подстановка их в (39) и последующие преобразования с обозначением  $J_{N\pm 1} = \sqrt{q_{N\pm 1}^2 + p_{N\pm 1}^2}$  приводят к

$$\mu_f^2 = \frac{1}{32\pi^2} [J_{N-1}^2 + J_{N+1}^2 + 2J_{N-1}J_{N+1} \cos(2\varphi_0 + \psi_q)], \tag{40}$$

где  $\psi_q$  определено следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 J_{N-1} J_{N+1} \sin \psi_q &= q_{N-1} p_{N+1} + q_{N+1} p_{N-1}, \\
 J_{N-1} J_{N+1} \cos \psi_q &= q_{N-1} q_{N+1} - p_{N-1} p_{N+1}.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Таким образом, из (40), (41), (36) следует, что фокусировка в системе с ВЧКФ в основном обеспечивается «боковыми» квадрупольными гармониками потенциала (1). Фокусирующие гармоники — «боковые» из-за кратности, которая у них больше или меньше на единицу в сравнении с «основными» аксиально-симметричными ускоряющими гармониками кратности  $N$ .

Определим теперь центр фокусировки как точку, при прохождении которой в момент максимума поля значение  $\mu_f^2$  максимально. Понятие это при рассмотрении поперечного движения аналогично понятию электрического центра, вводимого для продольного движения. Получим координату центра фокусировки. Если начало отсчета находится в центре фокусировки, то  $\varphi_0 = 0$  соответствует максимуму поля. Тогда по (40) максимум  $\mu_f^2$  достигается при

$$\psi'_q = \pm 2\pi j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (42)$$

штрихованные величины соответствуют сдвинутой в центр фокусировки системе координат. Величина  $Q_1^2 + P_1^2$  не зависит от начала отсчета  $\tau$  в (32). Это означает,

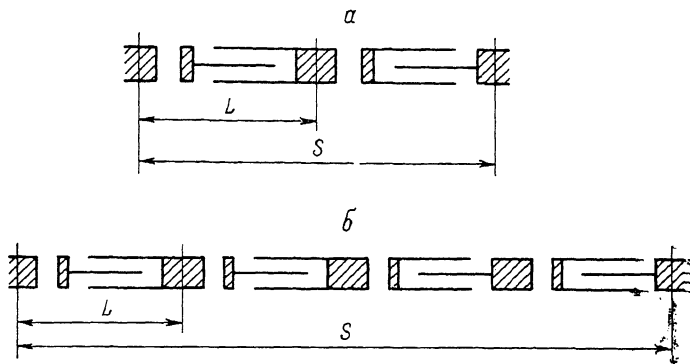


Рис. 3. Примеры построений периодов фокусировки.

$a$  —  $FD$ -фокусировка,  $b$  —  $FFDD$ -фокусировка.

что при сдвиге координат на неизвестную пока величину  $z_q$  с одновременным изменением  $\varphi'_0 = \varphi_0 + k_1 z_q$  значение  $\mu_f^2$  в (40) не изменится. Но и  $J_{N \pm 1}$  не изменяются при сдвиге начала отсчета. Тогда инвариантна и совокупность  $(2\varphi_0 + \psi_q)$ , т. е.

$$2\varphi_0 + \psi_q = 2\varphi'_0 + \psi'_q. \quad (43)$$

Положим теперь в (43)  $\psi'_q = \pm 2\pi j$  из (42) и, подставив  $\varphi'_0$ , найдем координату центра фокусировки

$$z_q = \frac{1}{2k_1} \psi_q \pm Lj, \quad j = 0, 1, \dots. \quad (44)$$

В (44) указано множество  $j=0, 1, \dots$  значений  $z_q$ , в дальнейшем будем иметь в виду значение  $z_q$ , расположенное в рассматриваемом периоде. Из (43), (42) следует, что  $2\varphi_0 + \psi_q$  — просто удвоенная фаза частицы в центре фокусировки  $2\varphi_q$ , а поскольку для ускорителя обычно задается синхронная фаза  $\varphi_s$ , то для  $\varphi_q$  удобно следующее представление:

$$\varphi_q = \varphi_s + k_1(z_q - z_s). \quad (45)$$

В принятом здесь приближении

$$\mu^2 = -\frac{1}{2} \mu_x^2 + \mu_f^2. \quad (46)$$

Для оценки  $\mu_x^2$  можно использовать (24), (25) и т. п. Приведем теперь конкретные формулы и для  $\mu_f^2$ . Введем обозначения

$$\sigma_{2n,0} = |c_{2n}|, \quad \sigma_{2n,m} = \sqrt{a_{2n,m}^2 + b_{2n,m}^2}, \quad n = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots. \quad (47)$$



Для фокусировки  $FD$  ( $N=1$ ) из (40) следует, что

$$\mu_f^2 = \left( \frac{\pi e u}{\epsilon_0 \gamma \beta^2} \right)^2 \left[ 8\sigma_{2,0}^2 + \frac{\sigma_{2,2}^2}{2} + 4\sigma_{2,0}\sigma_{2,2} \cos(2\varphi_q) \right]. \quad (48)$$

В случае одного промежуточного электрода (рис. 3, а) и кусочно-линейной аппроксимации потенциала для  $\sigma_{2,0}$ ,  $\sigma_{2,2}$  получаем

$$\sigma_{2,0} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{u_q}{u} \right) \frac{l_h L}{a^2},$$

$$\sigma_{2,2} = \frac{L}{\pi^2 I_2 (2k_1 a) l_q} \left( \frac{u_q}{u} \right) \sin k_1 l_q \sin k_1 l_h, \quad (49)$$

$u_q$  — напряжение на квадрупольном зазоре.

Центр фокусировки находится в центре квадруполья.

Для  $FFDD$ -фокусировки ( $N=2$ )

$$\mu_f^2 = \frac{1}{32} \left( \frac{\pi e u}{\epsilon_0 \gamma \beta^2} \right)^2 [\sigma_{2,1}^2 + 81\sigma_{2,3}^2 + 18\sigma_{2,1}\sigma_{2,3} \cos(2\varphi_q)]. \quad (50)$$

Для одного промежуточного электрода на периоде ускорения (рис. 3, б)

$$\sigma_{2,1} = \frac{8\sqrt{2}L}{\pi^2 I_2 \left( k_1 \frac{a}{2} \right) l_q} \left( \frac{u_q}{u} \right) \sin \left( k_1 \frac{l_q}{4} \right) \sin \left( k_1 \frac{l_h}{4} \right),$$

$$\sigma_{2,3} = \frac{8\sqrt{2}L}{9\pi^2 I_2 \left( \frac{3}{2} k_1 a \right) l_q} \left( \frac{u_q}{u} \right) \sin \left( \frac{3}{4} k_1 l_q \right) \sin \left( \frac{3}{4} k_1 l_h \right). \quad (51)$$

И в этом случае можно показать, что центр фокусировки находится в центре квадруполья. Приведем численный пример. Значения размеров в (51) подставим те же, что и в примере вычисления эффективности, а  $u=304.5$ ,  $u_q=0.5u$ . Вычисления с этими данными по (46), (50) дают  $\mu=1.51$ , а при численном расчете  $\mu=1.52$ .

Аналогичным образом можно рассмотреть ВЧКФ не только для  $\pi$ -систем. Например, для  $2\pi$ -систем выводы по векторному сложению эффективностей в многоэлектродном зазоре сохраняются практически дословно. Сохраняется в целом и описанная методика исследования поперечного движения.

Аналитический вид полученных характеристик позволяет проводить как исследования зависимостей от параметров канала с уже определенной структурой, так и анализировать различные варианты построений периодов ускорения и фокусировки.

В заключение хочу выразить признательность В. А. Теплякову за поддержку в работе и А. П. Мальцеву за обсуждения затронутых здесь вопросов.

#### Список литературы

- [1] Владимирский В. В. // ПТЭ. 1956. № 3. С. 35—37.
- [2] Анисимов Г. М., Тепляков В. А. // ПТЭ. 1963. № 1. С. 21—22.
- [3] Мальцев П. А., Зотова Э. А., Тепляков В. А. // ПТЭ. 1964. № 4. С. 20—23.
- [4] Fer F., Lapostolle P., Viteh C. et al. // Тр. Междунар. конф. по ускорителям. М.: Госатомиздат, 1964. С. 513—510.
- [5] Тепляков В. А. // ПТЭ. 1964. № 6. С. 24—27.
- [6] Тепляков В. А., Степанов В. А. // РИЭ. 1968. Т. 13. № 11. С. 1965—1975.
- [7] Егоров А. А., Зелин В. А., Ильевский С. А. и др. // ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 8. С. 1643—1647.
- [8] Капчинский И. М., Тепляков В. А. // ПТЭ. 1970. № 2. С. 19—22.
- [9] Капчинский И. М. Теория линейных резонансных ускорителей: Динамика частиц. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
- [10] Жеребцов А. В., Мальцев А. П. Препринт ИФВЭ. № 80-47. Серпухов, 1980. 8 с.
- [11] Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 384 с.

Поступило в Редакцию  
3 апреля 1990 г.  
В окончательной редакции  
19 октября 1990 г.