10

О ФОКУСИРОВКЕ ЧАСТИЦ МАГНЕТИКОВ ПЕРЕМЕННЫХ МАСС МАГНИТНЫМИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Н. И. Штепа

Исследуется фокусирующее действие осесимметричных постоянных магнитных полей на пучок мелких (10^{-2}—10^{-4} см) магнетиков переменных масс, движущихся в вязкой среде. Установлены возможности фокусировки и преобразования пучка в параксиальном приближении.

В работах [1-5] проанализированы возможности фокусировки, преобразований и особенностей управления движением мелких частиц магнетиков постоянных масс магнитными полями ряда конфигураций. Однако при движении частиц возможно изменение их масс вследствие испарения, конденсации, коагуляции и по другим причинам.

В настоящей работе исследуются фокусировка и преобразование пучка мелких (10^{-2}—10^{-4} см) частиц магнетиков переменных масс, движущихся в жидкости (газе), постоянными осесимметричными магнитными полями в параксиальном приближении. Предполагается, что частицы однородны, изотропны, сферической формы, малы настолько, что изменение управляющего поля на протяжении частицы незначительно, в то же время они и достаточно большие, чтобы пренебречь сугубо флюктуационными эффектами. Скорости движения частицы в вязкой среде ограничиваются применимостью закона Стокса. Предполагается, что изменение массы частицы происходит вследствие испарения, конденсации и коагуляции по следующим законам: при испарении оно пропорционально площади поверхности частиц и времени,

$$dm = -\alpha 4\pi R^2 dt, \tag{1}$$

α — постоянный коэффициент испарения ($\alpha > 0$), R — радиус частицы; при конденсации, как и испарении,

$$dm = \beta 4\pi R^2 dt, \tag{2}$$

β — постоянный коэффициент конденсации ($\beta > 0$); при коагуляции — пропорционально площади поперечного сечения частицы и пройденному пути dl,

$$dm = \delta\pi R^2 dl, \tag{3}$$

δ — постоянный коэффициент коагуляции ($\delta > 0$).

Дифференциальное уравнение движения частицы запишем в форме Мещерского,

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_P, \tag{4}$$

m — масса частицы; $\mathbf{v}$ — ее скорость; $\mathbf{F}_M$ — сила, обусловленная действием магнитного поля; $\mathbf{F}_C$ — сила стоксовского сопротивления движению; $\mathbf{F}_T$ — сила тяжести, $\mathbf{F}_A$ — архимедова подъемная сила, $\mathbf{F}_P$ — реактивная сила.

Как и в [1],

$$\mathbf{F}_M = \left(\frac{4}{3}\pi\frac{J_0}{|H|} + \frac{\mu-1}{\mu+2}\right)R^3(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}, \tag{5}$$

J_0 — модуль остаточной намагниченности частицы, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, $\mu=\mu_2/\mu_c$, μ_r — магнитная проницаемость частицы, μ_c — магнитная проницаемость среды;

$$\mathbf{F}_C = 6\pi\eta R(\mathbf{v}_c - \mathbf{v}), \tag{6}$$

η — коэффициент вязкости, $\mathbf{v}_c$ — скорость среды;

$$\mathbf{F}_T = \frac{4}{3}\pi R^3\mathbf{g}, \tag{7}$$

ρ — плотность частицы, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести;

$$\mathbf{F}_A = -\frac{4}{3}\pi R^3\rho_c\mathbf{g}, \tag{8}$$

ρ_c — плотность среды.

Реактивная сила

$$\mathbf{F}_P = -\mathbf{U}\frac{dm}{dt} \tag{9}$$

($\mathbf{U}$ — относительная скорость присоединяемой к частице массы) в случае испарения ($\mathbf{U}=0$) будет

$$\mathbf{F}_P = 0, \tag{10}$$

при конденсации

$$\mathbf{F}_P = (\mathbf{v}_c - \mathbf{v})\beta 4\pi R^2, \tag{11}$$

а в случае коагуляции

$$\mathbf{F}_P = (\mathbf{v}_c - \mathbf{v})\delta\pi R^2. \tag{12}$$

При этом конденсируемые и коагулируемые массы считаем покоящимися относительно среды. В дальнейшем изложении полагаем $\mathbf{g}$ и $\mathbf{v}_c$ направленными по оси симметрии магнитного поля в сторону основного движения частицы.

В цилиндрической системе координат (z, r, ϑ), ось z которой совпадает с осью симметрии поля, дифференциальные уравнения движения частицы в неподвижной ($u_c=0$) жидкости (газе) запишутся

$$\ddot{z} = \left(a + \frac{b}{|H|}\right)\left(H_r\frac{\partial H_z}{\partial r} + H_z\frac{\partial H_z}{\partial z}\right) - (\lambda + qv^\nu)\dot{z} + kg, \tag{13}$$

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = \left(a + \frac{b}{|H|}\right)\left(H_r\frac{\partial H_r}{\partial r} + H_z\frac{\partial H_r}{\partial z}\right) - (\lambda + qv^\nu)\dot{r}, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) = -(\lambda + qv^\nu)r^2\dot{\vartheta}, \tag{15}$$

где

$$a = \frac{3(\mu-1)}{4\pi(\mu+2)\rho}, \quad b = \frac{J_0}{\rho}, \tag{16), (17}$$

$$\lambda = \frac{9\eta}{2R^2\rho}, \quad k = 1 - \frac{\rho_c}{\rho} \tag{18), (19}$$

при испарении $q=0$, при конденсации $\nu=0$ и

$$q = \frac{3\beta}{R\rho}, \tag{20}$$

при коагуляции $\nu=1$ и

$$q = \frac{3\delta}{4R\rho}. \tag{21}$$

Составляющие напряженности осесимметричного магнитного поля в приосевой области, как известно [6], можно представить в виде рядов

$$H_r = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)\,!} H^{(2n+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}, \tag{22}$$

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} H^{(2n)} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}, \tag{23}$$

где

$$H^{(n)} = \frac{d^n H(z)}{dz^n},$$

$H(z)$ — напряженность на оси симметрии.

Уравнения (13)—(15) с учетом (22), (23) в приосевой области с точностью до членов высшего порядка малости приводятся к

$$\ddot{z} = \left(a + \frac{b}{|H|}\right) HH' - (\lambda + q\dot{z}^{\nu})\,\dot{z} + kg, \tag{24}$$

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = \left(a + \frac{b}{|H|}\right)\left(\frac{H'^2}{4} - \frac{HH''}{2}\right) r - (\lambda + q\dot{z}^{\nu})\,\dot{r}, \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) = -(\lambda + q\dot{z}^{\nu})\, r^2\dot{\vartheta} \tag{26}$$

(штрихами обозначены производные по z).

Преобразуем (24) к виду

$$(\dot{z})'\,\dot{z} = \left(a + \frac{b}{|H|}\right) HH' - (\lambda + q\dot{z}^{\nu})\,\dot{z} + kg, \tag{27}$$

а (1)—(3) в уравнения

$$R' = -\frac{\alpha}{\rho\dot{z}}, \tag{28}$$

$$R' = \frac{\beta}{\rho\dot{z}}, \tag{29}$$

$$R' = \frac{\delta}{4\rho}. \tag{30}$$

Решая уравнения (27) вместе с соответствующим уравнением из (28)—(30), находим $\dot{z}$ и R как функции z. Параметром в решения войдет R_0 — начальный радиус частицы при $z=z_0$, т. е.

$$\dot{z} = \dot{z}(z,\ R_0), \tag{31}$$

$$R = R(z,\ R_0). \tag{32}$$

Уравнения (25) и (26) с помощью комплексной переменной

$$U = re^{i\vartheta} \tag{33}$$

сводятся к одному комплексному

$$U'' + \left[\left(a + \frac{b}{|H|}\right) HH' + kg\right]\frac{U'}{\dot{z}^2} + \frac{1}{2}\left[\left(a + \frac{b}{|H|}\right)\left(HH'' - \frac{H'^2}{2}\right)\right]\frac{U}{\dot{z}^2} = 0, \tag{34}$$

описывающему параксиальные траектории частиц пучка. Существенно, что с учетом (31) и (32) это уравнение линейное, однородное, второго порядка с коэффициентами функциями z. Из его общего вида, как и в электронной оптике [7], приходим к выводу о возможности существования изображения, т. е. траектории всех частиц с одинаковыми a, b, k, $\dot{z}_0$ и R_0, вышедшие из одной и той же предметной точки, пересекутся в одной точке изображения (действительной или мнимой).

Как и для частиц постоянных масс [1], наличие диссипативной силы $\mathbf{F}_C$ существенно осложняет фокусировку. Общее условие существования изображения сводится к существованию частного решения уравнения (34), обладающего не меньше чем двумя нулями в области конечных действительных значений z. Вопрос о существовании изображения в каждой конкретной задаче поэтому необходимо решать отдельно.

Рассмотрим преобразование параксиального пучка частиц магнетиков переменных масс с помощью тонкой слабой магнитной линзы. Как и в [1], пусть частица захватывается стационарным потоком жидкости (газа), движущимся вдоль оси линзы с постоянной скоростью $v_c = \mathrm{const}$. При этом уравнение (24) заменится уравнением

$$\ddot{z} = \left(a + \frac{b}{|H|}\right) HH' - \lambda(\dot{z} - v_c) - q(\dot{z} - v_c)^{\nu+1} + kg. \tag{35}$$

Скорость $\dot{z}$ установившегося движения частицы будет при испарении

$$\dot{z} = v_c + \frac{kg}{\lambda}, \tag{36}$$

при конденсации

$$\dot{z} = v_c + \frac{kg}{\lambda + q}, \tag{37}$$

при коагуляции

$$\dot{z} = v_c - \frac{\lambda}{2q} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2q}\right)^2 + \frac{kg}{q}}. \tag{38}$$

Ограничимся скоростями v_c, при которых $\Delta\dot{z}$, обусловленное действием линзы, удовлетворяет условию $|\Delta\dot{z}| \ll \dot{z}$. Осевую скорость в принятом приближении можно считать постоянной. Это упрощает задачу интегрирования дифференциального уравнения траектории частицы

$$r'' + \frac{1}{\dot{z}}(\lambda + q\dot{z}^{\nu}) r' = \frac{1}{2\dot{z}^2}\left(a + \frac{b}{|H|}\right)\left(\frac{H'^2}{2} - HH''\right) r. \tag{39}$$

Заменим его в поле линзы ($z_1 < z < z_2$) приближенным

$$r'' + \frac{1}{\dot{z}}(\lambda + q\dot{z}^{\nu}) r' = \frac{1}{2\dot{z}^2}\left(a + \frac{b}{|H|}\right)\left(\frac{H'^2}{2} - HH''\right) r_1, \tag{40}$$

положив в правой части $r \approx r_1$ (r_1 — значение координаты r при входе в линзу). Интегрируя (40) методом вариации произвольной постоянной, находим наклон траектории частицы при выходе из линзы

$$r_2' = \frac{r_1}{\dot{z}^2} N, \tag{41}$$

где

$$N = -\frac{1}{2}\int_{z_1}^{z_2} e^{\frac{1}{\dot{z}}(\lambda + q\dot{z}^{\nu})(z - z_2)}\left(a + \frac{b}{|H|}\right)\left(HH'' - \frac{H'^2}{2}\right) dz. \tag{42}$$

Затем по r_2' и $r_2 \approx r_1$ рассчитываем траекторию частицы за линзой ($z > z_2$)

$$r = r_1\left[1 + \frac{N}{\dot{z}(\lambda + q\dot{z}^{\nu})}\left(1 - e^{-\frac{1}{\dot{z}}(\lambda + q\dot{z}^{\nu})(z - z_2)}\right)\right]. \tag{43}$$

После линзы траектория асимптотически приближается к

$$r_\infty = r_1\left(1 + \frac{N}{\dot{z}(\lambda + q\dot{z}^{\nu})}\right) \tag{44}$$

и на достаточном расстоянии от линзы, когда

$$e^{-\frac{1}{\dot{z}}(\lambda+q\dot{z}^{\nu})(z-z_2)} \ll 1, \tag{45}$$

практически становится параллельной оси с $r=r_\infty$. В итоге пучок частиц, движущихся параллельно оси до линзы, преобразуется последней в ему подобный сжатый или расширенный. Коэффициент поперечного преобразования пучка

$$\gamma = \frac{r_\infty}{r_1} \tag{46}$$

выражается

$$\gamma = 1 + \frac{N}{\dot{z}(\lambda + q\dot{z}^{\nu})}. \tag{47}$$

В частности, при преобразовании пучка по постоянной намагниченности частиц [1] в (47) следует положить $a=0$, а при индуцированной — $b=0$. Пучок расширяется, если $|\gamma| > 1$, сжимается при $|\gamma| < 1$.

Если $\gamma < 0$, то происходит «перевернутое» преобразование пучка. В случае когда в поле линзы

$$e^{-\frac{1}{\dot{z}}(\lambda+q\dot{z}^{\nu})(z-z_2)} \approx 1 \tag{48}$$

(что справедливо при больших скоростях $\dot{z}$ и малой вязкости среды), коэффициент преобразования пучка по постоянной намагниченности частиц

$$\gamma = 1 + \frac{b}{4\dot{z}(\lambda + q\dot{z}^{\nu})} \int_{z_1}^{z_2} \frac{H'^2}{|H|}\, dz, \tag{49}$$

по индуцированной

$$\gamma = 1 + \frac{a}{4\dot{z}(\lambda + q\dot{z}^{\nu})} \int_{z_1}^{z_2} H'^2 dz. \tag{50}$$

Из (49), (50) следует, что при преобразовании по постоянной намагниченность всегда $\gamma > 1$, поскольку $b > 0$. При преобразовании по индуцированной намагниченности $\gamma > 1$ для $\mu > 1$ и $\gamma < 1$ для $\mu < 1$. В последнем случае (при $\mu < 1$) возможно и $\gamma < 0$.

Расстояние от линзы S формирования пучка при преобразовании определяем соотношением

$$\left| \frac{r_\infty - r_1}{r_\infty - r(S)} \right| = e \tag{51}$$

(e — неперово число), из которого следует, что для тонкой слабой линзы

$$S = \frac{\dot{z}}{\lambda + q\dot{z}^{\nu}}. \tag{52}$$

В заключение отметим, что проведенный в работе анализ установил возможность фокусировки и преобразования пучка однородных частиц переменных масс, движущихся в вязкой среде, с помощью постоянных осесимметричных магнитных полей.

Список литературы

[1] *Штепа Н. И.* // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 9. С. 1839—1845.
[2] *Штепа Н. И.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 4. С. 729—734.
[3] *Штепа Н. И.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 4. С. 659—663.
[4] *Штепа Н. И.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 10. С. 1967—1972.
[5] *Штепа Н. И.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 7. С. 1393—1398.
[6] *Рустерхольц А.* Электронная оптика. М.: ИЛ, 1962. 69 с.
[7] *Кельман В. М., Явор С. Я.* Электронная оптика. М.: Л., 1959. 120 с.

Черниговский государственный
педагогический институт
им. Т. Г. Шевченко

Поступило в Редакцию
20 июля 1990 г.