01

О ПОЛЕ НЕОДНОРОДНО ЗАРЯЖЕННОГО НЕОДНОРОДНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭЛЛИПСОИДА

Р. З. Муратов

Дано строгое решение электростатической задачи о двухслойном (с софокусными границами слоев) диэлектрическом эллипсоиде, у которого внутри каждого слоя диэлектрическая проницаемость и плотность заряда имеют постоянные значения. Точная формула, описывающая потенциал вторичного поля снаружи эллипсоида, выражена через квадрупольный момент, создаваемый объемными и поверхностными распределениями поляризационного заряда.

Введение

Предлагаемая работа посвящена точному решению конкретной и, на первый взгляд, довольно экзотической электростатической задачи о поле заряженного двухслойного диэлектрического эллипсоида, у которого и плотность заряда, и диэлектрическая проницаемость имеют в пределах каждого слоя некоторые заданные постоянные значения. С прикладной точки зрения эта задача представляет интерес в связи с проблемой ускорения макрочастиц (см., например, [1, 2]), в качестве которых испытываются и полые (слоистость!), и жидкие (несферичность!) объекты, несущие электрический заряд. С физической точки зрения особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что в заряженном диэлектрике поляризационный (индуцированный) заряд создается не только на границах раздела диэлектрика, но и в его толще, так что источниками вторичного поля являются одновременно и поверхностные, и объемные плотности поляризационного заряда. Решение задачи достигается методом, построенным в [3] и опирающимся на интегральные уравнения электростатики (ср. [4, 5])

1. Интегральные уравнения

Расcмотрим двухслойное диэлектрическое тело, состоящее из однородного ядра и окружающей его однородной оболочки. Величины, относящиеся к области ядра и оболочки, будем отмечать индексами 1 и 2 соответственно. Так, ε_k — диэлектрическая постоянная k-го слоя ($k=1, 2$), S_k — его внешняя ограничивающая поверхность, $\mathbf{n}_k$ — единичный вектор нормали к ней, V_k — объем слоя.

Пусть Φ_0 — заданный внешний (вакуумный) потенциал поля в отсутствие диэлектрического тела. В нашем случае этот потенциал создается источниками плотности $\rho_0(\mathbf{r})$, заполняющими объем V_1+V_2, и равен

$$\Phi_0 = \int\limits_{V_1+V_2} \frac{\rho_0 dV}{R}. \tag{1}$$

Если Φ — потенциал полного поля, то вектор поляризации в k-м слое равен

$$\mathbf{P}_k = \frac{1-\varepsilon_k}{4\pi} \nabla\Phi \quad (k=1,\ 2). \tag{2}$$

Векторам (2) соответствуют поляризационные объемные $\tilde{\rho}_k$ и поверхностные $\tilde{\sigma}_k$ заряды плотности

$$\tilde{\rho}_k = -\operatorname{div} \mathbf{P}_k = \frac{1-\varepsilon_k}{\varepsilon_k} \rho_0(r) \text{ в } V_k, \tag{3}$$

$$\tilde{\sigma}_1 = (\mathbf{n}_1, \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \text{ на } S_1, \tag{4}$$

$$\tilde{\sigma}_2 = (\mathbf{n}_2 \mathbf{P}_2) = \frac{1-\varepsilon_2}{4\pi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} \text{ на } S_2. \tag{5}$$

Мы считаем, что на границах диэлектрических слоев тела нет свободных поверхностных зарядов. Поэтому на S_1 соблюдается граничное условие $\varepsilon_1 (\partial \Phi_1 / \partial n_1) = \varepsilon_2 (\partial \Phi_2 / \partial n_1)$, позволяющее представить $\tilde{\sigma}_1$ в виде [1]

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1}. \tag{6}$$

По законам электростатики

$$\Phi = \Phi_0 + \int_{V_1} \frac{\tilde{\rho}_1}{R} dV + \int_{V_2} \frac{\tilde{\rho}_2}{R} dV + \oint_{S_1} \frac{\tilde{\sigma}_1}{R} dS + \oint_{S_2} \frac{\tilde{\sigma}_2}{R} dS. \tag{7}$$

Подставляя в (7) выражения (3), (5), (6) и (1), приходим к интегральному уравнению

$$\Phi + \frac{\mu}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} \frac{dS}{R} + \frac{\nu}{4\pi} \oint_{S_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} \frac{dS}{R} = \Psi, \tag{8}$$

где

$$\mu = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/\varepsilon_2, \quad \nu = \varepsilon_2 - 1, \tag{9}$$

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{V_1} \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{R} dV + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_{V_2} \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{R} dV. \tag{10}$$

Мы получили интегральное уравнение (8) такого же вида, что и в [3], но в отличие от ситуации в [3] внашем случае правая часть уравнения, описываемая функцией Ψ, уже не является в области $V_1 + V_2$ гармонической функцией, как, впрочем, и потенциал полного поля Φ. Нетрудно видеть, однако, что замена

$$\Phi = \Psi + \overline{\Phi} \tag{11}$$

переводит (8) в уравнение того же типа

$$\overline{\Phi} + \frac{\mu}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial n_1} \frac{dS}{R} + \frac{\nu}{4\pi} \oint_{S_2} \frac{\partial \overline{\Phi}_2}{\partial n_2} \frac{dS}{R} = \overline{\Phi}_0, \tag{12}$$

но с гармоническими «потенциалами» $\overline{\Phi}$ и

$$\overline{\Phi}_0 = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial n_1} \frac{dS}{R} - \frac{\nu}{4\pi} \oint_{S_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial n_2} \frac{dS}{R} \tag{13}$$

в области $V_1 + V_2$.

2. Поле внутри двухслойного эллипсоида

Будем считать теперь, что поверхности S_1 и S_2 двухслойного диэлектрика эллипсоидальны и даются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{\bar{a}^2} + \frac{y^2}{\bar{b}^2} + \frac{z^2}{\bar{c}^2} = 1 \tag{14), (15}$$

---

[1] Поскольку значения нормальных производных потенциала Ф различаются по разные стороны от границ S_1 и S_2, то приходится, как это сделано в формулах (5), (6) и других необходимых случаях, снабжать потенциал индексом принадлежности к соответствующему слою.

соответственно. Единичные векторы внешних нормалей к S_1 и S_2, очевидно, равны

$$\mathbf{n}_1 = \{(x/a^2)\,p,\quad (y/b^2)\,p,\quad (z/c^2)\,p\},$$
$$\mathbf{n}_2 = \{x/\bar{a}^2)\,\bar{p},\quad (y/\bar{b}^2)\,\bar{p},\quad (z/\bar{c}^2)\,\bar{p}\},$$

где $p = \langle x^2/a^4\rangle^{-1/2}$, $\bar{p} = \langle x^2/\bar{a}^4\rangle^{-1/2}$.

Здесь и всюду далее угловые скобки обозначают сумму трех членов циклической перестановки.

Метод решения интегрального уравнения вида (12) (точнее, системы двух уравнений относительно Φ_1 и Φ_2) во внутренней области двухслойного эллипсоида детально изложен в [3], где, в частности, показано, что точное решение достигается лишь при софокусности поверхностей S_1 и S_2, т. е. при выполнении соотношений

$$\bar{a}^2 = a^2 + \xi_0,\quad \bar{b}^2 = b^2 + \xi_0,\quad \bar{c}^2 = c^2 + \xi_0 \qquad (16)$$

для полуосей эллипсоидов. Здесь ξ_0 — значение эллипсоидальной координаты ξ, соответствующее поверхности (15). Сама же эллипсоидальная координата ξ определяется как неотрицательный корень кубического уравнения $\langle x^2/(a^2+\xi)\rangle = 1$. Для получения точного решения наряду с (16) требуется также, чтобы плотность $\rho_0(\mathbf{r})$ источников в пределах каждого из слоев V_1 и V_2 эллипсоида описывалась полиномиальной функцией декартовых координат. В частности, в данной работе рассматривается случай ступенчатой функции

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_1 = \mathrm{const}_1 & \mathbf{r} \in V_1, \\ \rho_2 = \mathrm{const}_2 & \mathbf{r} \in V_2. \end{cases} \qquad (17)$$

При решении уравнения (12) удобно пользоваться полученными на основе результатов Феррерса [6] явными представлениями [7] ньютоновых объемных и поверхностных потенциалов эллипсоида, плотности источников которых являются степенными функциями декартовых координат.

Вычислим входящие в (12) функции $\Psi(\mathbf{r})$ и $\bar{\Phi}_0(\mathbf{r})$, соответствующие распределению (17). Переписывая (10) в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = \delta \int\limits_{V_1} \frac{dV}{R} + (\rho_2/\varepsilon_2) \int\limits_{V_1+V_2} \frac{dV}{R}, \qquad (18)$$

где

$$\delta = \rho_1/\varepsilon_1 - \rho_2/\varepsilon_2,$$

находим

$$\Psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \Psi_1 = 2\pi\,[\delta\,(M_{000} - \langle M_{100}x^2\rangle) + (\rho_2/\varepsilon_2)\,(\bar{M}_{000} - \langle\bar{M}_{100}x^2\rangle)] \quad \mathbf{r} \in V_1, & (19) \\ \Psi_2 = 2\pi\left\{\delta\,[\mathcal{M}_{000}(\xi) - \langle\mathcal{M}_{100}(\xi)\,x^2\rangle] + \frac{\rho_2}{\varepsilon_2}\,(\bar{M}_{000} - \langle\bar{M}_{100}x^2\rangle)\right\} \quad \mathbf{r} \in V_2, & (20) \\ \Psi^{(e)} = 2\pi\Gamma_0\,[\bar{\mathcal{M}}_{000}(\lambda) - \langle\bar{\mathcal{M}}_{100}(\lambda)\,x^2\rangle] \quad \mathbf{r} \,\bar{\in}\, (V_1 + V_2). & (21) \end{cases}$$

Здесь M_{lmn} — внутренние и $\mathcal{M}_{lmn}(\xi)$ — внешние потенциальные факторы эллипсоида (14), $\bar{M}_{lmn}$ — внутренние и $\bar{\mathcal{M}}_{lmn}(\lambda)$ — внешние потенциальные факторы эллипсоида (15),

$$\lambda = \xi - \xi_0, \qquad (22)$$

$$\Gamma_0 = g\delta + \rho_2/\varepsilon_2, \qquad (23)$$

$$g = \frac{abc}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}. \qquad (24)$$

При выводе формулы (21) использовалось являющееся следствием софокусности S_1 и S_2 соотношение [3]

$$\mathcal{M}_{lmn}(\xi) = g\bar{\mathcal{M}}_{lmn}(\lambda). \qquad (25)$$

Подстановка (19) в (20) и (13) дает для $\bar{\Phi}_0$ выражение

$$\bar{\Phi}_0 = \mu \left\langle \Gamma_a \oint_{S_1} \frac{x^2}{a^2} \frac{p\,dS}{R} \right\rangle + \nu \Gamma_0 \left\langle M_{100} \oint_{S_2} \frac{x^2}{\bar{a}^2} \frac{I\,dS}{R} \right\rangle, \tag{26}$$

где

$$\Gamma_a = \delta M_{100} + (\rho_2/\varepsilon_2)\,\bar{M}_{100}. \tag{27}$$

В результате вычисления интегралов в (26) получаем

$$\bar{\Phi}_0 = \begin{cases} 2\pi (A_0 + \langle A_a x^2 \rangle) & \mathbf{r} \in V_1, \quad (28) \\ 2\pi [\mathscr{A}_0(\xi) + \langle \mathscr{A}_a(\xi)\, x^2 \rangle] & \mathbf{r} \in V_2, \quad (29) \end{cases}$$

где

$$A_0 = \mu\,[(\rho_1/\varepsilon_1)\,M_{000} - \langle \Gamma_a a^2 M_{100} \rangle] + \nu \Gamma_0 (\bar{M}_{000} - \langle \bar{a}^2 \bar{M}_{100}^2 \rangle),$$

$$A_a = -\mu \left(\frac{\rho_1}{\varepsilon_1} M_{100} - \Gamma_a a^2 M_{200} - \Gamma_b b^2 M_{110} - \Gamma_c c^2 M_{101} \right) -$$

$$- \nu \Gamma_0 \left(\bar{M}_{100} - \bar{a}^2 \bar{M}_{100} \bar{M}_{200} - \bar{b}^2 \bar{M}_{010} \bar{M}_{110} - \bar{c}^2 \bar{M}_{001} \bar{M}_{101} \right),$$

$$\mathscr{A}_0(\xi) = A_0 - \mu\,[(\rho_1/\varepsilon_1)\,\mathscr{R}_{000}(\xi) - \langle \Gamma_a a^2 \mathscr{R}_{100}(\xi) \rangle],$$

$$\mathscr{A}_a(\xi) = A_a + \mu\,[(\rho_1/\varepsilon_1)\,\mathscr{R}_{100}(\xi) - \Gamma_a a^2 \mathscr{R}_{200}(\xi) - \Gamma_b b^2 \mathscr{R}_{110}(\xi) - \Gamma_c c^2 \mathscr{R}_{101}(\xi)],$$

$$\mathscr{R}_{lmn}(\xi) = M_{lm} - \mathscr{M}_{lmn}(\xi).$$

В соответствии с видом «потенциала» $\bar{\Phi}_0(\mathbf{r})$ будем считать, что искомый «потенциал» $\bar{\Phi}(\mathbf{r})$ в объеме V_1 имеет вид

$$\bar{\Phi}_1 = 2\pi (\langle \alpha_{200} x^2 \rangle + \alpha_{000}), \tag{30}$$

а в объеме V_2

$$\bar{\Phi}_2 = 2\pi\,[\langle \beta_{200}(\xi)\, x^2 \rangle + \beta_{000}(\xi)]. \tag{31}$$

Заметим, что из гармоничности $\bar{\Phi}$ следует, в частности, что

$$\langle \alpha_{200} \rangle = 0. \tag{32}$$

Подставляя (30), (31) в (12) и выполняя интегрирование, получаем для $\mathbf{r} \in V_1$

$$\langle \alpha_{200} x^2 \rangle + \alpha_{000} - \mu \langle \alpha_{200}\,[a^2 M_{100} + (M_{100} - a^2 M_{200})\,x^2 + (M_{010} - a^2 M_{110})\,y^2 +$$
$$+ (M_{001} - a^2 M_{101})\,z^2 \rangle = T, \tag{33}$$

а для $\mathbf{r} \in V_2$

$$\langle \beta_{200}(\xi)\,x^2 \rangle + \beta_{000}(\xi) - \mu \langle \alpha_{200}\,[a^2 \mathscr{M}_{100} + (\mathscr{M}_{100} - a^2 \mathscr{M}_{200})\,x^2 + (\mathscr{M}_{010} - a^2 \mathscr{M}_{110})\,y^2 +$$
$$+ (\mathscr{M}_{001} - a^2 \mathscr{M}_{101})\,z^2] \rangle + \mu\,[(\rho_1/\varepsilon_1)\,\mathscr{R}_{000}(\xi) - \langle \Gamma_a a^2 \mathscr{R}_{100}(\xi) \rangle] -$$
$$- \mu \langle [(\rho_1/\varepsilon_1)\,\mathscr{R}_{100}(\xi) - \Gamma_a a^2 \mathscr{R}_{200}(\xi) - \Gamma_b b^2 \mathscr{R}_{110}(\xi) - \Gamma_c c^2 \mathscr{R}_{101}(\xi)]\,x^2 \rangle = T, \tag{34}$$

где

$$T = A_0 + \langle A_a x^2 \rangle - \frac{\nu}{2} \langle \bar{a}^2 \varphi_{200}(\xi_0)\,[\bar{M}_{000} - \bar{a}^2 \bar{M}_{100} - (\bar{M}_{100} - \bar{a}^2 \bar{M}_{200})\,x^2 -$$
$$- (\bar{M}_{010} - \bar{a}^2 \bar{M}_{110})\,y^2 - (\bar{M}_{001} - \bar{a}^2 \bar{M}_{101})\,z^2] \rangle - 2\nu \beta'_{000}(\xi_0)\,\bar{M}_{000}, \tag{35}$$

$$\varphi_{lmn}(\xi_0) \equiv \left(\frac{l}{\bar{a}^2} + \frac{m}{\bar{b}^2} + \frac{n}{\bar{c}^2} \right) \beta_{lmn}(\xi_0) + 2\beta'_{lmn}(\xi_0). \tag{36}$$

Приравнивание в каждом из уравнений (33) и (34) коэффициентов при x^2 приводит к двум уравнениям для трех неизвестных констант α_{200}, α_{020}, α_{002} и трех неизвестных функций $\beta_{200}(\xi)$, $\beta_{020}(\xi)$ и $\beta_{002}(\xi)$

$$\alpha_{200} + \mu\,(a^2 M_{200} \alpha_{200} + b^2 M_{110} \alpha_{020} + c^2 M_{101} \alpha_{002}) = T_a, \tag{37}$$

$$\beta_{200}(\xi) + \mu\,[a^2 \mathscr{M}_{200}(\xi)\,\alpha_{200} + b^2 \mathscr{M}_{110}(\xi)\,\alpha_{020} + c^2 \mathscr{M}_{101}(\xi)\,\alpha_{002}] -$$
$$- \mu\,[(\rho_1/\varepsilon_1)\,\mathscr{R}_{100}(\xi) - \Gamma_a a^2 \mathscr{R}_{200}(\xi) - \Gamma_b b^2 \mathscr{R}_{110}(\xi) - \Gamma_c c^2 \mathscr{R}_{101}(\xi)] = T_a, \tag{38}$$

где

$$T_a = A_a + \frac{\nu}{2}\bar{M}_{100}\langle \bar{a}^2\varphi_{200}(\xi_0)\rangle - \frac{\nu}{2}[\bar{a}^4\varphi_{200}(\xi_0)\bar{M}_{200} + \bar{b}^4\varphi_{020}(\xi_0)\bar{M}_{110} + \bar{c}^4\varphi_{002}(\xi_0)\bar{M}_{101}]. \tag{39}$$

Недостающие четыре уравнения типа (37), (38) получаются из последних с помощью циклической перестановки и поэтому не приводятся. Из (37) и (38) с учетом (32) находим, что

$$\beta_{200}(\xi) = \alpha_{200} + \mu[a^2\alpha_{200}\mathscr{R}_{200}(\xi) + b^2\alpha_{020}\mathscr{R}_{110}(\xi) + c^2\alpha_{002}\mathscr{R}_{101}(\xi)] + \\ + \mu[(\rho_1/\varepsilon_1)\mathscr{R}_{100}(\xi) - \Gamma_a a^2\mathscr{R}_{200}(\xi) - \Gamma_b b^2\mathscr{R}_{110}(\xi) - \Gamma_c c^2\mathscr{R}_{101}(\xi)], \tag{40}$$

$$\frac{1}{2}\bar{a}^2\varphi_{200}(\xi_0) = \alpha_{200} + \mu\Big[(\rho_1/\varepsilon_1)\Big(R_{100} + \frac{g}{2}\Big) + a^2(\alpha_{200} - \Gamma_a)R_{200} + b^2(\alpha_{020} - \Gamma_b)R_{110} + \\ + c^2(\alpha_{002} - \Gamma_c)R_{101}\Big] + \mu g\frac{a^2}{\bar{a}^2}(\alpha_{200} - \Gamma_a) + \frac{\mu g}{2}\Big\langle\frac{a^2}{\bar{a}^2}(\alpha_{200} - \Gamma_a)\Big\rangle, \tag{41}$$

где

$$R_{lmn} \equiv \mathscr{R}_{lmn}(\xi_0) = M_{lmn} - g\bar{M}_{lmn}.$$

Подставляя (41) в (37) и используя циклическую перестановку, приходим к системе линейных алгебраических уравнений [2]

$$q_{300}\alpha_{200} + q_{120}\alpha_{020} + q_{102}\alpha_{002} = A_{200}, \tag{42}$$

в которой

$$A_{200} = \mu\Big(-\frac{\rho_1}{\varepsilon_1}M_{100} + a^2\Gamma_a M_{200} + b^2\Gamma_b M_{110} + c^2\Gamma_c M_{101}\Big) + \\ + \mu\nu g\Big(-\frac{\rho_1}{\varepsilon_1}\bar{M}_{100} + a^2\Gamma_a\bar{M}_{200} + b^2\Gamma_b\bar{M}_{110} + c^2\Gamma_c\bar{M}_{101}\Big) + \\ + \nu\Gamma_0(-\bar{M}_{100} + \bar{a}^2\bar{M}_{100}\bar{M}_{200} + \bar{b}^2\bar{M}_{010}\bar{M}_{110} + \bar{c}^2\bar{M}_{001}\bar{M}_{101}) - \\ - \mu\nu\frac{\rho_1}{\varepsilon_1}(\bar{a}^2R_{100}\bar{M}_{200} + \bar{b}^2R_{010}\bar{M}_{110} + \bar{c}^2R_{001}\bar{M}_{101}) + \mu\nu\bar{a}^2\bar{M}_{200}(a^2\Gamma_a R_{200} + b^2\Gamma_b R_{110} + \\ + c^2\Gamma_c R_{101}) + \mu\nu\bar{b}^2\bar{M}_{110}(a^2\Gamma_a R_{110} + b^2\Gamma_b R_{020} + c^2\Gamma_c R_{011}) + \\ + \mu\nu\bar{c}^2\bar{M}_{101}(a^2\Gamma_a R_{101} + b^2\Gamma_b R_{011} + c^2\Gamma_c R_{002}),$$

$$q_{210} = \mu a^2M_{110} + \nu\bar{a}^2\bar{M}_{110} + \mu\nu a^2(g\bar{M}_{110} + \bar{a}^2\bar{M}_{110}R_{200} + \bar{b}^2\bar{M}_{020}R_{110} + \bar{c}^2\bar{M}_{011}R_{101}),$$

$$q_{300} = \varepsilon_1 - q_{210} - q_{201}.$$

Нетрудно проверить, что $\langle A_{200}\rangle = 0$. Таким образом, система уравнений (42) является частным случаем (для конкретизированного A_{200}) алгебраической системы, решение которой дано в [3] и имеет вид

$$\alpha_{200} = -\Delta^{-1}[A_{020}(\varepsilon_1 - q_{102} - q_{012} - q_{021}) + A_{002}(\varepsilon_1 - q_{120} - q_{012} - q_{021})],$$

$$\Delta = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\langle q_{120} + q_{102}\rangle + \langle q_{120}q_{201} + q_{102}q_{021} + q_{021}q_{201}\rangle.$$

Приравнивание свободных членов в каждом из уравнений (33) и (34) приводит к системе уравнений для неизвестных α_{000} и $\beta_{000}(\xi)$

$$\alpha_{000} - \mu\langle a^2M_{100}\alpha_{200}\rangle = T_0, \tag{43}$$

$$\beta_{000}(\xi) - \mu\langle a^2\mathscr{M}_{100}(\xi)\alpha_{200}\rangle + \mu\Big[\frac{\rho_1}{\varepsilon_1}\mathscr{R}_{000}(\xi) - \langle\Gamma_a a^2\mathscr{R}_{100}(\xi)\rangle\Big] = T_0, \tag{44}$$

где

$$T_0 = A_0 - \frac{\nu}{2}\langle\bar{a}^2\varphi_{200}(\xi_0)(\bar{M}_{000} - \bar{a}^2\bar{M}_{100})\rangle - 2\nu\beta'_{000}(\xi_0)\bar{M}_{000}.$$

---

[2] Как обычно, мы приводим лишь одно уравнение или выражение, если остальные получаются из приведенного с помощью циклической или взаимной перестановок.

Из (43), (44) следует, что

$$\beta_{000}(\xi)=\alpha_{000}-\mu\left[(\rho_1/\varepsilon_1)\mathscr{R}_{000}(\xi)+\langle(\alpha_{200}-\Gamma_a)a^2\mathscr{R}_{100}(\xi)\rangle\right],$$

$$2\beta'_{000}(\xi_0)=-\mu g\left[\rho_1/\varepsilon_1+\langle(a/\bar a)^2(\alpha_{200}-\Gamma_a)\rangle\right],$$

$$3\alpha_{000}=2\left(\mu\frac{\rho_1}{\varepsilon_1}M_{000}+\nu\Gamma_0\bar M_{000}+\mu\nu g\frac{\rho_1}{\varepsilon_1}M_{000}\right)-\langle\bar a^2\alpha_{200}\rangle.$$

Таким образом, потенциалы $\Phi_1(\mathbf{r})$ и $\Phi_2(\mathbf{r})$ полного электростатического поля внутри заряженного двухслойного диэлектрического эллипсоида определены.

3. Поле вне эллипсоида

Согласно формулам (5) и (6), найденным потенциалам Φ_1 и Φ_2 соответствуют поверхностные плотности поляризационных зарядов

$$\tilde\sigma_1=-\mu\left\langle(\alpha_{200}-\Gamma_a)\frac{x^2}{a^2}\right\rangle p,$$

$$\tilde\sigma_2=-\nu\left\{\left\langle\left[\frac{1}{2}\bar a^2\varphi_{200}(\xi_0)-\Gamma_0\bar M_{100}\right]\frac{x^2}{\bar a^2}\right\rangle+\beta'_{000}(\xi_0)\right\}\bar p.$$

Поскольку известны (см. формулы (3) и (17)) и плотности объемного поляризационного заряда, то становится возможным, обращаясь к (7), определить потенциал $\Phi_{\text{инд}}=\Phi^{(e)}-\Phi_0^{(e)}$ индуцированного поля снаружи двухслойного эллипсоида. Здесь наружный потенциал первичного поля

$$\Phi_0^{(e)}=\int\limits_{V_1}\frac{\rho_1-\rho_2}{R}dV+\iiint\limits_{V_1+V_2}\frac{\rho_2}{R}dV=\frac{3}{2}\frac{Q}{\bar a\bar b\bar c}\left[\bar{\mathscr{M}}_{000}(\lambda)-\langle\bar{\mathscr{M}}_{100}(\lambda)x^2\rangle\right], \qquad (45)$$

где Q — полный заряд.

Непосредственное вычисление интегралов, входящих в (7), приводит к весьма громоздкой формуле для $\Phi_{\text{инд}}$. Удобнее использовать мультипольное представление для $\Phi_{\text{инд}}$, позволяющее «упрятать» многочисленные геометрические (a, b, c, $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$) и физические (ε_1, ε_2, ρ_1, ρ_2) параметры задачи в мультипольные моменты. В соответствии с общей теорией [8, 9] мультипольного представления потенциалов эллипсоида потенциалы, создаваемые поверхностной плотностью источников, имеющей вид однородного полинома 2-й степени, и постоянной объемной плотностью источников, выражаются через полный заряд и тензор полного квадрупольного момента эллипсоида. Так как полный поляризационный заряд всегда равен нулю и, кроме того, в нашем случае равны нулю (это очевидно из соображений симметрии) недиагональные компоненты квадрупольного момента, то будем иметь

$$\Phi_{\text{инд}}=-\frac{5}{4\bar a\bar b\bar c}\langle D_{xx}\left[\bar{\mathscr{M}}_{100}(\lambda)-\bar{\mathscr{M}}_{200}(\lambda)x^2-\bar{\mathscr{M}}_{110}(\lambda)y^2-\bar{\mathscr{M}}_{101}(\lambda)z^2\right]\rangle, \qquad (46)$$

где компонента D_{xx} тензора квадрупольного момента поляризационных зарядов эллипсоида равна

$$D_{xx}=D_{xx}^{(\sigma)}+\bar D_{xx}^{(\sigma)}+D_{xx}^{(\rho)}+\bar D_{xx}^{(\rho)},$$

$$D_{xx}^{(\sigma)}=\oint\limits_{S_1}(3x^2-\langle x^2\rangle)\tilde\sigma_1 dS=\frac{1}{5}\mu V_1\{(\rho_1/\varepsilon_1)(3a^2-\langle a^2\rangle)+$$

$$+2\left[3a^2\Gamma_a-\delta M_{000}-(\rho_2/\varepsilon_2)(\bar M_{000}-\xi_0)-3a^2\alpha_{200}+\langle a^2\alpha_{200}\rangle\right]\},$$

$$\bar D_{xx}^{(\sigma)}=\oint\limits_{S_2}(3x^2-\langle x^2\rangle)\tilde\sigma_2 dS=\frac{1}{5}\nu(V_1+V_2)\left\{(3\bar a^2-\langle\bar a^2\rangle)\left[\Gamma_0-5\beta'_{000}(\xi_0)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\langle\bar a^2\varphi_{200}(\xi_0)\rangle\right]+2\Gamma_0(3\bar a^2\bar M_{100}-\bar M_{000})-3\bar a^4\varphi_{200}(\xi_0)+\langle\bar a^4\varphi_{200}(\xi_0)\rangle\right\},$$

$$D_{xx}^{(\rho)}=\int\limits_{V_1}(3x^2-\langle x^2\rangle)\tilde\rho_1 dV=-\frac{\varepsilon_1-1}{5\varepsilon_1}\rho_1 V_1(3a^2-\langle a^2\rangle).$$

$$\bar D_{xx}^{(\rho)}=\int\limits_{V_2}(3x^2-\langle x^2\rangle)\tilde\rho_2 dV=-\frac{\varepsilon_2-1}{5\varepsilon^2}\rho_2 V_2(3\bar a^2-\langle\bar a^2\rangle).$$

При выводе последнего равенства использовано тождество $3\bar{a}^2-\langle\bar{a}^2\rangle=3a^2-\langle a^2\rangle$, являющееся следствием соотношений (16).

Присутствие в формулах (45) и (46) отношений $\bar{\mathscr{M}}_{lmn}(\lambda)/\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ не означает зависимости этих формул от реальных размеров эллипсоида, поскольку для фиксированной точки наблюдения (x, y, z) отношение $\bar{\mathscr{M}}_{lmn}(\lambda)/\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ инвариантно при переходе от одного эллипсоида к любому другому, софокусному с первым.

Заключение

Очевидно, что обобщение интегральных уравнений электростатики в форме (7), (8) или (12) на случай N-слойного диэлектрика не представляет труда. Столь же очевидно, что использованный здесь метод точного решения принципиально пригоден и для случая многослойного (с софокусными границами слоев) диэлектрического эллипсоида, у которого внутри каждого слоя диэлектрическая проницаемость имеет постоянное значение, а плотность заряда является полиномиальной функцией декартовых координат.

Полученное в данной работе решение охватывает различные физические ситуации, характеризуемые конкретным набором параметров $\{\rho_1,\ \varepsilon_1;\ \rho_2,\ \varepsilon_2\}$. Отметим некоторые из относящихся сюда случаев: однородно заряженный однородный диэлектрический эллипсоид[3] $\{\rho,\ \varepsilon;\ \rho,\ \varepsilon\}$ или $\{\rho,\ \varepsilon;\ 0,\ 1\}$; разноименно заряженный двухслойный диэлектрик с нулевым полным зарядом $\{\rho,\ \varepsilon_1;\ -((\rho g)/(1-g),\ \varepsilon_2\}$; заряженное проводящее ядро в заряженной $\{\rho_1,\ \infty;\ \rho_2,\ \varepsilon\}$ или нейтральной $\{\rho,\ \infty;\ 0,\ \varepsilon\}$ диэлектрической оболочке; полый заряженный диэлектрик $\{0,\ 1;\ \rho,\ \varepsilon\}$.

Принцип суперпозиции полей позволяет из решений, построенных в [3] и данной работе, скомбинировать решение более общей задачи о неоднородно заряженном двухслойном диэлектрическом эллипсоиде в неоднородном поле наружных источников.

Автор признателен М. Л. Левину и В. Д. Селезневу за поддержку данной работы.

Список литературы

[1] *Синкевич О. А., Тимохин А. Д., Шишов В. В.* // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 2. С. 77—79.
[2] *Григорьев В. А., Кестельман В. Н., Королев Е. Е., Шишов В. В.* // Тр. МЭИ. 1983. № 615/1. С. 128—162.
[3] *Муратов Р. З.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 11. С. 2097—2104.
[4] *Хижняк Н. А.* // ЖТФ. 1958. Т. 28. Вып. 7. С. 1592—1609.
[5] *Хижняк Н. А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 279 с.
[6] *Ferrers N. M.* // Quart. J. Pure and Appl. Math. 1877. Vol. 14. N 53. P. 1—22.
[7] *Муратов Р. З.* Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976. 144 с.
[8] *Ефимов С. П., Муратов Р. З.* // Астрон. журн. 1990. Т. 67. № 2. С. 302—313.
[9] *Ефимов С. П., Муратов Р. З.* // Астрон. журн. 1990. Т. 67. № 2. С. 314—325.
[10] *Левин М. Л., Муратов Р. З.* // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 12. С. 2464—2471.

Московский радиотехнический институт
АН СССР

Поступило в Редакцию
23 апреля 1990 г.

[3] Мы упоминаем этот случай в связи с тем, что в разделе 5 работы [10], где он рассматривался ранее, указан, к сожалению, неправильный рецепт получения решения алгебраических уравнений, связанных с внутренней задачей.