1991 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 61, в. 8
1991 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 61, N 8

01



# КИНЕТИКА ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ В УЗДП В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

*А. И. Морозов*

Найден класс точных стационарных одномерных решений системы из кинетического уравнения для ионов и гидродинамического для нейтралов, связанных процессом ионизации.

## Введение

В настоящее время нет замкнутого корректного описания совокупности процессов в плазменных ускорителях типа УЗДП. Имеются лишь отдельные, хотя и весьма существенные фрагменты будущей теории [1-3]. Это объясняется тем, что не только тяжелые (ионная и нейтральная), но и электронная компоненты в УЗДП требуют кинетического описания. При этом реальные процессы в этом ускорителе по крайней мере двумерны и часто нестационарны. Даже численное моделирование их оказывается слишком сложным, хотя здесь удалось достаточно далеко продвинуться с помощью приближения заданного термализованного потенциала [4, 5]

$$\Phi = \Phi_*(\gamma) + N(n). \tag{1}$$

Здесь $\Phi$ — электрический потенциал, $\Phi^*$ — «термализованный потенциал», $\gamma$ — индекс магнитной силовой линии, $N(n)$ — известная функция плотности плазмы. Прогресс в численном моделировании не снимает проблему аналитических моделей, хотя бы при далеко идущих допущениях. Это объясняется рядом причин. Аналитические модели более четко выявляют связь между различными факторами, они более наглядны, их можно использовать как тесты при численном моделировании и т. д.

В данной работе мы рассмотрим только одномерно-кинетическую модель УЗДП, но зато укажем метод построения весьма широкого класса ее точных решений.

## Особенности одномерной кинетической модели процессов в УЗДП

В одномерном случае ситуация несравненно более простая, чем в двумерном. Это объясняется рядом причин.

1. Если ионизация отсутствует, то стационарное кинетическое уравнение динамики ионов

$$\mathbf{v}\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{M}\mathbf{E}\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{2}$$

в двумерном случае имеет своим решением функцию, зависящую от трех интегралов движения

$$f_i = F(\mathcal{E}, I_2, I_3). \tag{3}$$

Здесь

$$\mathscr{E} \equiv I_1 = \frac{Mv^2}{2} + e\Phi \tag{4}$$

— полная энергия частицы.

Вид этого интеграла не зависит от конкретных особенностей $\Phi(\mathbf{x})$. В то же время вид $I_{2,3}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ зависит от конкретного вида $\Phi(\mathbf{x})$.

В одномерном случае функция распределения зависит только от $\mathscr{E}$

$$f_i = F(\mathscr{E}), \tag{5}$$

т. е. является одноаргументной функцией.

2. При наличии ионизации [1] система уравнений кинетики тяжелых частиц имеет вид

$$\mathbf{v}\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{M}\mathbf{E}\frac{\partial f_i}{\partial v} = \beta f_0 n_e, \tag{6a}$$

$$\mathbf{v}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{x}} = -\beta f_0 n_e. \tag{6б}$$

Здесь

$$n_e\beta \equiv \langle \sigma_{\text{ион}} v\rangle\, n_e = \int \sigma_{\text{ион}} |\mathbf{v}| f_e d\mathbf{v}. \tag{7}$$

Если известна структура зависимости

$$f_e = f_e(\mathbf{v}, \gamma, \Phi), \tag{8}$$

то величина $n_e\beta$ может быть найдена как функция $\Phi$ и $\gamma$

$$n_e\beta = A(\Phi, \gamma). \tag{9}$$

Примером зависимости типа (8) могут служить функции распределения электронов, полученные в [6, 7]. Однако в зоне интенсивной ионизации УЗДП аппроксимации типа (8) неточны и здесь требуются более хитрые выражения. Чтобы упростить задачу, в ряде случаев можно прямо из тех или иных соображений задавать зависимость

$$\beta = \beta(\mathbf{x}), \tag{10}$$

учитывая квазинейтральность исключить $n_e$, полагая в (7)

$$n_e \approx n_i = \int f_i d\mathbf{v}. \tag{11}$$

Сложность решения двумерной системы уравнений (6) при условии (9) или (10) и (11) совместно с заданным распределением потенциала (например, с помощью условия (1), вытекающего из (8)) очевидна.

Другое дело в одномерном случае. Здесь не только существенно уменьшится размерность задачи, но можно упростить и сам характер уравнений (6). Действительно, в реальных условиях УЗДП характерные скорости нейтральной компоненты $\bar{v}_0$ почти на два порядка меньше характерных скоростей ионов $\bar{v}_i$. Это позволяет в уравнении для ионов положить

$$f_0 = n_0(x)\,\delta(v),$$

а проинтегрировав по $v$ уравнение (6б) для нейтралов, получить уравнение непрерывности гидродинамического типа для $n_0(x)$.

В результате получаем

$$v\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{eE}{M}\frac{\partial f_i}{\partial v} = \beta n_0(x)\,\delta(v)\int f_i dv, \tag{12a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} n_0 v_0 = -\beta n_0 \int f_i dv. \tag{12б}$$

---

[1] Ионизация является самым интенсивным столкновительным процессом.

Сюда входит величина $v_0(x)$ — средняя скорость нейтралов. В одномерном случае ее можно считать, например, постоянной.[2] Из (12) следует закон сохранения полного числа тяжелых частиц

$$v_0(x)\, n_0(x) + \int v f_i dv = \mathrm{const} \equiv n_{00} v_{00}. \tag{13}$$

Исключая с помощью (13) из (12а) плотность нейтралов, получаем одно уравнение для $f_i$

$$v \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{e}{M} E \frac{\partial f_i}{\partial v} = \beta(x)\, \delta(v) \left( \frac{n_{00} v_{00} - \int v f_i dv}{v_0(x)} \right) \int f_i dv. \tag{14}$$

Отсюда видно, что в правую часть входит некая «априорная» функция

$$S(x) \equiv \beta(x)/v_0(x).$$

3. В двумерном случае с оговоркой относительно зоны интенсивной ионизации для многих целей приемлемо описание электрического поля с помощью термализованного потенциала (1), для введения которого требуется изодрейфовость электронной компоненты [8], т. е., грубо говоря, пропорциональность

$$|\mathbf{E}(\mathbf{x})| \sim |\mathbf{H}(\mathbf{x})|. \tag{15}$$

Известно, что изодрейфовость достаточно хорошо реализуется в эксперименте.

В одномерном случае распределение электрического поля можно считать либо просто заданным, либо «легко создаваемым». Это можно сделать в силу изодрейфовости, подбирая соответствующий профиль $H(\mathbf{x})$,[3] либо более сложно, поставив на диэлектрических стенках систему эмиттирующих колец — фиксаторов потенциала.

## Методы решения уравнения (14)

Кроме тех достоинств аналитических моделей, которые были указаны во введении, имеются еще два важных обстоятельства в пользу сформулированной одномерной модели (14). Во-первых, совершенствование УЗДП с точки зрения увеличения его КПД с необходимостью будет идти по пути приближения структуры потока к одномерной, тем более что зона ионизации в существующих УЗДП достаточно тонка по сравнению с шириной канала и есть все основания думать, что такая ситуация сохранится и в будущем. Во-вторых, строго одномерные решения могут послужить основой для создания более реалистичных «квазидвумерных» моделей.

После этих замечаний перейдем к построению и анализу решений уравнения (14). Первое решение этого уравнения было получено давно в [1, 7]. Оно было построено при очень жестких допущениях, а именно при условии, что «выгоранием» нейтралов можно принебречь, т. е. плотность нейтралов не изменяется по длине канала и, кроме того, величины $E$, $v_0$, $\beta$ являются постоянными. В таком случае уравнение (14) становится линейным интегродифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$v \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{eE}{M} \frac{\partial f_i}{\partial v} = \beta n_0 \delta(v) \int f_i dv, \tag{16}$$

которое имеет простое решение в виде «обрубленной экспоненты»

$$f_i = N \begin{Bmatrix} e^{-\mathcal{E}/\mathcal{E}_0}, & v > 0 \\ 0, & v < 0 \end{Bmatrix} = N e^{-\mathcal{E}/\mathcal{E}_0} \theta(v). \tag{17}$$

---

[2] В двумерном случае априорное задание $v_0(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$ становится слишком субъективным.

[3] Этого в общем случае нельзя сделать в двумерном случае, так как необходимо удовлетворить уравнению $\Delta \mathbf{H} = 0$.

Здесь $N$ — нормировочный множитель, который в этой модели остается неопределенным,

$$\mathscr{E}=\frac{mv^2}{2}-eEx; \quad \mathscr{E}_0=\frac{2}{\pi M}\left(\frac{eE}{\beta n_0}\right)^2, \tag{18}$$

$\theta(v)$ — единичная функция Хевисайда.

Важной особенностью этого решения является наличие конечного скачка $f_i(vx)$ при $v=0$. Именно производная от скачка и приводит к появлению в правой части (16) $\delta$-функции. Величина $\mathscr{E}_0$ характеризует эффективную ширину энергетического спектра. Предположение о постоянстве нейтрального фона $n_0$ приводит к экспоненциальному росту величины $f_i$ с увеличением $x$. Решение (17) можно пытаться обобщить на случай переменных $n_0(x)$, $E(x)$, $\beta(x)$. Но для этого параметры должны быть связаны достаточно жестким условием

$$\frac{\beta(x)\, n_0(x)}{E(x)}=\text{const}.$$

Мы не будем останавливаться на этом тривиальном обобщении и перейдем к нашей основной задаче — нахождению достаточно общего метода решения уравнения (14).

Очевидно, если в этом уравнении считать $E$, $\beta$, $v_0$ заданными функциями $x$, то найти его решение будет трудно. Поэтому мы пойдем по другому пути, а именно будем искать его решение, считая заданным вид зависимости функции распределения от энергии

$$f_i=\begin{cases}F(\mathscr{E}) & v>0\\ 0 & v<0\end{cases}; \quad \mathscr{E}=\frac{Mv^2}{2}+e\Phi, \tag{19}$$

а функцию $\Phi(x)$ — искомой.[4] Точнее, искомой будет функция $\Phi(\xi)$, где

$$d\xi=\frac{v_0(x)}{\beta(x)}dx\equiv S(x)\,dx. \tag{20}$$

Зная $f(\mathscr{E})$, нетрудно вычислить стоящие в правой части (14) интегралы

$$n=\int f_i dv=n(\Phi); \quad \nu\equiv\int vf_i dv=\nu(\Phi). \tag{21}$$

Учитывая, что при $v=0$ уравнение (14) имеет вид

$$-\frac{e}{M}\frac{d\Phi}{dx}F(e\Phi)=\frac{\beta(x)}{v_0(x)}(n_{00}v_{00}-\nu(\Phi))\,n(\Phi), \tag{22}$$

находим искомые выражения для $\Phi$

$$\int\frac{F(e\Phi)}{n(\Phi)}\frac{d\Phi}{(n_{00}v_{00}-\nu(\Phi))}=-\frac{M}{e}\int\frac{\beta(x)}{v_0(x)}dx=-\frac{M}{e}\xi. \tag{23}$$

Проиллюстрируем найденное решение несколькими примерами.

1. Рассмотрим с помощью (23) описанный выше слабоионизованный поток с функцией распределения заданной формулой (17). Тогда $\nu(\Phi)\approx 0$, $v_{00}=v_0=$ $=\text{const}$, $\beta=\text{const}$

$$n(\Phi)=N\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2\mathscr{E}_0}{M}}\,e^{-e\Phi/\mathscr{E}_0}. \tag{24}$$

Подставляя эти выражения в (23), получаем, как и следовало ожидать,

$$-\frac{d\Phi}{dx}=\text{const}\equiv E, \quad \Phi=-Ex.$$

---

[4] Реально такая постановка задачи означает, что мы, зная энергетический спектр ионов на выходе системы, ищем условия, при которых он реализуется. Фактически такой подход полезен для диагностики.

2. Сохраняя по-прежнему $f_i$ в виде (17) и постоянство $v_0$ и $\beta$, учтем теперь выгорание нейтралов. Тогда

$$\nu = \int_0^\infty v f_i dv = N \frac{\mathscr{E}_0}{M} e^{-e\Phi/\mathscr{E}_0} \tag{25}$$

и, предполагая, что при $x \to \infty$ все нейтралы выгорают, т. е.

$$\nu \to n_{00} v_{00}, \tag{26}$$

получаем при $\mathscr{E}_0$, определяемой (18),

$$e^{\frac{e\Phi}{\mathscr{E}_0}} = 1 + e^{-\frac{eE}{\mathscr{E}_0}(x+C)}, \tag{27}$$

где $C$ — постоянная, которую можно определить, задав величину потенциала $\Phi=\Phi_0$ при $x=0$. Например, $C=0$, если $\Phi_0=(\mathscr{E}_0/e)\ln 2$. Из формулы (27) следует

$$\Phi \to \begin{cases} -(x+C)E, & x \to -\infty, \\ 0, & x \to +\infty. \end{cases}$$

Заметим, что нормировочный коэффициент в (17), который не определялся в линейной модели (16), теперь однозначно определяется на основе (25) и (26)

$$N = \frac{n_{00} v_{00} M}{\mathscr{E}_0}. \tag{28}$$

Только что рассмотренные примеры имеют ряд недостатков, если говорить об их соответствии реальной ситуации.

Прежде всего здесь есть частицы с неограниченной энергией (хотя их бесконечно мало). В то же время реально перепад потенциала в пределах ускорителя всегда конечен. Поэтому для построения моделей кинетики ионов с ионизацией надо брать обрезанные при $\mathscr{E} > \mathscr{E}_M$ функции распределения. Весьма удобным для расчетов является линейный сплайн Бугровой [8]. Однако если мы возьмем обрезанную функцию $F(\mathscr{E})$, плавно подходящую к нулю при $\mathscr{E} \to \mathscr{E}_M$, то, как видно из (23), при этом $x \to -\infty$. Поэтому для моделирования «реальной» ситуации задаваемую функцию $F(\mathscr{E})$ надо скачкообразно обрезать при $\mathscr{E}=\mathscr{E}_M$, что соответствует введению в канал затравочного ионизирующего потока.

Далее нетрудно видеть, что при

$$n_0 = \frac{n_{00} v_{00} - \nu}{v_0} \to 0$$

соотношение (23) приводит к $x \to +\infty$. Физически этот результат вполне понятен п отражает вероятностный характер ионизации. Ясно, что реально поток тяжелых частиц выходит из канала не полностью ионизированным.

В заключение автор благодарит А. И. Бугрову, А. П. Шубина и С. А. Якунина за полезное обсуждение данной работы.

### Список литературы


[1] *Морозов А. И.* // Плазменные ускорители. М.: Машиностроение, 1973. С. 85—92.
[2] *Морозов А. И., Бугрова А. И.* // Плазменные ускорители и ионные инжекторы. М.: Наука, 1984. С. 189—199.
[3] *Морозов А. И., Шубин А. П.* // Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1984. С. 178—260.
[4] *Морозов А. И., Меликов И. В.* // ЖТФ. 1974. Т. 44. Вып. 3. С. 544—548.
[5] *Волков Б. И., Морозов А. И., Свешников А. Г.* и др. Препринт ИАЭ. № 2545. М., 1978. 18 с.
[6] *Бугрова А. И.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 9. С. 1852—1854.
[7] *Бугрова А. И., Морозов А. И.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 10. С. 1995—1997.
[8] *Морозов А. И.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 3. С. 650—655.
[9] *Морозов А. И.* Физические основы космических электрореактивных двигателей. Т. 1. М.: Атомиздат, 1978. 326 с.


Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова
Москва

Поступило в Редакцию
2 августа 1990 г.