1991 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 61, N 9

04



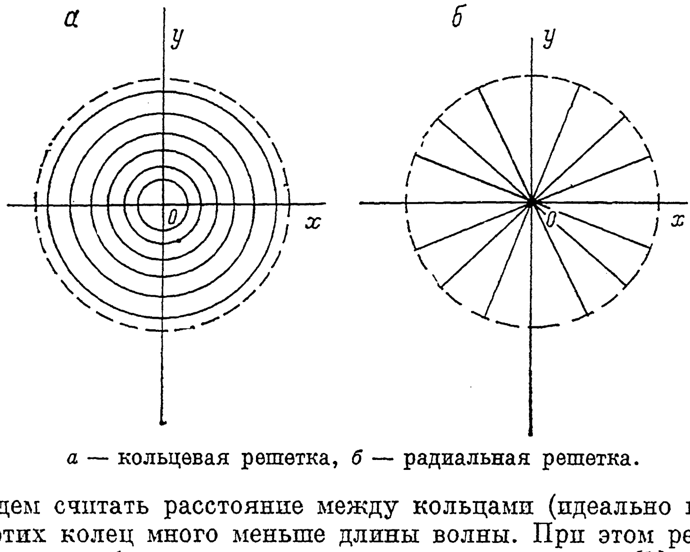
# ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НА КОЛЬЦЕВОЙ РЕШЕТКЕ

*И. И. Каликинский*

На основании найденного способа решения однородного векторного волнового уравнения в цилиндрических координатах решена задача о переходном излучении на кольцевой и радиальной решетках в дипольном случае. Найдено поле излучения, его энергия, спектр и поляризация. Показано, что случай кольцевой и радиальной решеток отличаются между собой только поляризацией излучения. Высказаны соображения для ультрарелятивистского случая, в котором кольцевая и радиальная решетки резко отличаются, кроме поляризации, также и интенсивностью. Предложено использовать кольцевую решетку для регистрации магнитных зарядов.

## Переходное излучение на кольцевой решетке

В работе [1] исследованы особенности переходного излучения на решетке, состоящей из параллельных прутьев. Мы рассмотрим этот вопрос для случая, когда решетка образована концентрическими кольцами, расположенными в плоскости $z \approx 0$. При этом изучим длинноволновую часть спектра излучения




*а* — кольцевая решетка, *б* — радиальная решетка.

заряда и будем считать расстояние между кольцами (идеально проводящими) и толщину этих колец много меньше длины волны. При этом решетку можно рассматривать в приближении односторонней проводимости [1], т. е. проводимость вдоль колец бесконечная, а проводимость вдоль радиусов нулевая. Сопряженной к кольцевой решетке является радиальная решетка, у которой проводимость вдоль радиусов бесконечная, а вдоль окружностей нулевая. В обоих случаях мы имеем дело с анизотропно проводящей плоскостью, причем анизотропия полярная, в том смысле, что она проявляет себя в направлении координатных линий полярной системы координат в плоскости $xOy$ (см. рисунок).

Рассмотрим сначала кольцевую решетку. Наличие анизотропии означает, что имеет место граничное условие

$$E_\varphi \big|_{z=0} = 0. \tag{1}$$

Перейдем к постановке задачи. Параллельно оси $z$ (решетка занимает плоскость $z=0$) движется точечный заряд $q$, пересекающий плоскость $xOy$ в точке $M_0$ $(x_0, y_0)$. Равномерно движущийся заряд создает ток с плотностью $\mathbf{j}$ $(0, 0, j)$, где

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v}\delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)\,\delta(z - vt), \tag{2}$$

где $\mathbf{v} = \text{const}$.

Обозначим радиус-вектор точки $M_0$ через $\mathbf{r}_0$, а радиус-вектор точки $M(x, y)$ через $\mathbf{r}$. Угол между этими векторами обозначим через $\varphi$ и по теореме косинусов запишем модуль вектора $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$

$$r' = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\varphi}. \tag{3}$$

Разлагая $\delta$-функции в интеграл Фурье—Бесселя, получим

$$\mathbf{j} = \frac{q\mathbf{v}_0}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)}\,d\omega\int\limits_0^{\infty}\lambda J_0(\lambda r')\,d\lambda. \tag{4}$$

Применим теперь теорему сложения бесселевых функций [2]

$$J_0(\lambda r') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_0)\,J_m(\lambda r)\cdot e^{im\varphi}. \tag{5}$$

Тогда формула (4) примет вид

$$\mathbf{j} = \frac{q\mathbf{v}_0}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)}\,d\omega\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int\limits_0^{\infty} J_m(\lambda r_0)\,J_m(\lambda r)\,\lambda d\lambda, \tag{6}$$

где $\mathbf{v}_0$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{v}$, т. е. оси $z$.

При отыскании поля, создаваемого зарадом $q$, будем исходить из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{7}$$

Разложим все величины в интеграл Фурье по времени и введем электрический вектор Герца

$$\mathbf{\Pi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{\Pi}_\omega e^{-i\omega z}\,d\omega. \tag{8}$$

Фурье-компоненты полей выражаются через $\mathbf{\Pi}_\omega$ по формулам

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\omega &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{\Pi}_\omega,\\ \mathbf{H}_\omega &= -i\,\frac{\omega}{c}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_\omega.\end{aligned} \tag{9}$$

При этом вектор $\mathbf{\Pi}_\omega$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{\Pi}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{\Pi}_\omega = -\frac{4\pi i}{\omega}\,\mathbf{j}_\omega. \tag{10}$$

Граничные условия в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned}&[E_\varphi^{(0)} + \tilde{E}_\varphi^{(1)}]_{z=0} = 0,\quad \tilde{E}_r^{(1)}|_{z=0} = \tilde{\tilde{E}}_r^{(1)}|_{z=0},\\ &[E_\varphi^{(0)} + \tilde{\tilde{E}}_\varphi^{(1)}]_{z=0} = 0,\quad \tilde{H}_\varphi^{(1)}|_{z=0} = \tilde{\tilde{E}}_\varphi^{(1)}|_{z=0},\end{aligned} \tag{11}$$

где нулевой индекс соответствует полю заряда, а единичный — полю излучения.

На больших расстояниях поле излучения должно носить характер расходящихся волн. Волна сверху соответствует полю при $z>0$, а две волны — полю при $z<0$.

Вектор Герца $\Pi_\omega$ также представим в виде

$$\Pi_\omega = \Pi_\omega^{(0)} + \Pi_\omega^{(1)}, \tag{12}$$

где вектор $\Pi_\omega^{(0)}(0,\ 0,\ \Pi_\omega^{(0)})$ описывает поле заряда [3]

$$\Pi_\omega^{(0)} = \frac{iq}{\pi\omega} e^{i\frac{\omega}{v}z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \frac{J_m(\lambda r_0)\, J_m(\lambda r)}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1-\beta^2)} \lambda d\lambda, \tag{13}$$

а $\Pi_\omega^{(1)}(\Pi_{\omega r}^{(1)},\ \Pi_{\omega\varphi}^{(1)},\ \Pi_{\omega z}^{(1)})$ — поле излучения.

Этот вектор удовлетворяет однородным уравнениям

$$(\Delta\Pi_\omega^{(1)})_r + \frac{\omega^2}{c^2}\Pi_{\omega r}^{(1)} = 0,$$

$$(\Delta\Pi_\omega^{(1)})_\varphi + \frac{\omega^2}{c^2}\Pi_{\omega\varphi}^{(1)} = 0,$$

$$\Delta\Pi_{\omega z}^{(1)} + \frac{\omega^2}{c^2}\Pi_{\omega z}^{(1)} = 0. \tag{14}$$

Последнее из уравнений (14) хорошо изучено и известны его решения

$$\Pi_{\omega z}^{(1)} = e^{im\varphi + i\varkappa z} J_m\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2}\, r\right), \tag{15}$$

где $m$ — целое число.

Что касается первых двух уравнений (14), то при их решении пользовались тем, что решения этих уравнений можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot}\mathbf{f},\ \ \mathbf{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{f}, \tag{16}$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{e}_z \Pi_{\omega z}$, а $\Pi_{\omega z}$ суть функции (15).

В нашей работе система первых двух уравнений (14) решается непосредственно, что в свою очередь дает возможность решать задачи этого класса естественным образом (разложением по найденным решениям системы уравнений (14)). Первые два уравнения системы (14) имеют вид [4]

$$\Delta\Pi_{\omega r}^{(1)} - \frac{\Pi_{\omega r}^{(1)}}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Pi_{\omega\varphi}^{(1)}}{\partial\varphi} + \frac{\omega^2}{c^2}\Pi_{\omega r}^{(1)} = 0,$$

$$\Delta\Pi_{\omega\varphi}^{(1)} - \frac{\Pi_{\omega\varphi}^{(1)}}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Pi_{\omega r}^{(1)}}{\partial\varphi} + \frac{\omega^2}{c^2}\Pi_{\omega\varphi}^{(1)} = 0. \tag{17}$$

Они образуют систему дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Решение этой системы ищем в виде

$$\Pi_{\omega r}^{(1)} = F_r(r)\, e^{im\varphi + i\varkappa z}, \tag{18}$$

$$\Pi_{\omega\varphi}^{(1)} = F_\varphi(r)\, e^{im\varphi + i\varkappa z}. \tag{19}$$

Для функций $F_r(r)$ и $F_\varphi(r)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2F_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_r}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2 - \frac{m^2+1}{r^2}\right)F_r - \frac{2im}{r^2}F_\varphi = 0,$$

$$\frac{d^2F_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_\varphi}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2 - \frac{m^2+1}{r^2}\right)F_\varphi + \frac{2im}{r^2}F_r = 0. \tag{20}$$

Легко видеть, что решениями системы уравнений (20) являются

$$F_\varphi = Z_{m+1}(x),\ F_r = iZ_{m+1}(x), \tag{21}$$
$$F_\varphi = Z_{m-1}(x),\ F_r = -iZ_{m-1}(x), \tag{22}$$

где $Z_{m-1}$, $Z_{m+1}$ — цилиндрические функции, а $x = \sqrt{(\omega^2/c^2) - \varkappa^2}\, r$.

Учитывая это, решение задачи о переходном излучении на кольцевой решетке ищем в виде

$$\tilde{\Pi}_{\omega z}^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \left\{ \begin{matrix} \tilde{A}_m(\lambda) J_m(\lambda r) \\ \tilde{B}_m(\lambda) H_m^{(1)}(\lambda r) + \tilde{C}_m(\lambda) H_m^{(2)}(\lambda r) \end{matrix} \right\} e^{i\varkappa z} d\lambda, \tag{23}$$

где верхняя строка соответствует $r < r_0$, а нижняя — $r > r_0$

$$\tilde{\Pi}_{\omega\varphi}^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \left\{ \begin{matrix} \tilde{D}_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) + \\ \tilde{M}_m(\lambda) H_{m+1}^{(1)}(\lambda r) + \tilde{N}_m(\lambda) H_{m-1}^{(1)}(\lambda r) + \end{matrix} \right.$$
$$\left. \begin{matrix} + \tilde{E}_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r) \\ + \tilde{P}_m(\lambda) H_{m+1}^{(2)}(\lambda r) + \tilde{Q}_m(\lambda) H_{m-1}^{(2)}(\lambda r) \end{matrix} \right\} e^{i\varkappa z} \lambda d\lambda, \tag{24}$$

$$\Pi_{\omega r}^{(1)} = i \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^\infty \left\{ \begin{matrix} \tilde{D}_m(\lambda) J_{m+1}(\lambda r) - \\ \tilde{M}_m(\lambda) H_{m+1}^{(1)}(\lambda r) - \tilde{N}_m(\lambda) H_{m-1}^{(1)}(\lambda r) + \end{matrix} \right.$$
$$\left. \begin{matrix} - \tilde{E}_m(\lambda) J_{m-1}(\lambda r) \\ + \tilde{P}_m(\lambda) H_{m+1}^{(2)}(\lambda r) - \tilde{Q}_m(\lambda) H_{m-1}^{(2)}(\lambda r) \end{matrix} \right\} e^{i\varkappa z} \lambda d\lambda. \tag{25}$$

При этом уравнения (14) удовлетворяются. При $z < 0$ волну заменяем на две волны, функцию $e^{i\varkappa z}$ на $e^{-i\varkappa z}$. Здесь

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2}, \quad Jm\varkappa > 0. \tag{26}$$

К граничным условиям (11) надо еще присоединить условие

$$\operatorname{div} \Pi_\omega^{(1)} = 0 \tag{27}$$

и потребовать непрерывность поля излучения при $r = r_0$. Последнее приводит к формулам

$$\tilde{B}_m(\lambda) = \tilde{C}_m(\lambda) [= B_m(\lambda)],$$
$$\tilde{A}_m(\lambda) = 2B_m(\lambda). \tag{28}$$

Аналогично

$$\tilde{M}_m(\lambda) = \tilde{N}_m(\chi) = \tilde{P}_m(\lambda) = \tilde{Q}_m(\lambda) [= M_m(\lambda)],$$
$$\tilde{D}_m(\lambda) = \tilde{E}_m(\lambda) = 2M_m(\lambda). \tag{29}$$

Из других условий получаем

$$\tilde{\tilde{B}}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{C}}_m(\lambda) = -B_m(\lambda), \tag{30}$$
$$\tilde{D}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{D}}_m(\lambda) = \tilde{E}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{E}}_m(\lambda) [= D_m(\lambda)], \tag{31}$$
$$\tilde{A}_m(\lambda) = -\tilde{\tilde{A}}_m(\lambda) = -\frac{2\lambda}{\varkappa} D_m(\lambda), \tag{32}$$

$$\tilde{M}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{M}}_m(\lambda) = \tilde{N}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{N}}_m(\lambda) = \tilde{P}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{P}}_m(\lambda) = \tilde{Q}_m(\lambda) = \tilde{\tilde{Q}}_m(\lambda). \tag{33}$$

Условие $[E_\varphi^{(0)} + E_\varphi^{(1)}]_{z=0} = 0$ дает

$$D_m(\lambda) = \frac{iqc^2}{2\pi v \omega^2} \frac{J_m(\lambda r_0) \cdot \lambda}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - \beta^2)}. \tag{34}$$

При этом формулы (23)—(25) имеют одинаковый вид при $r < r_0$ и $r > r_0$.

Задача еще состоит в том, чтобы удовлетворить условиям излучения. Для этого рассмотрим поле в волновой зоне $(\omega/c) R \gg 1$ (при $z > 0$). Используя формулы обхода [2]

$$H_m^{(2)}(-z) = -(-1)^m H_m^{(1)}(z)$$

и условие

$$B_m(-\lambda) = (-1)^m B_m(\lambda),$$

получим

$$\tilde{\Pi}_{\omega z m}^{(1)} = e^{im\varphi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_m(\lambda) H_m^{(1)}(\lambda r) e^{i\varkappa z} \lambda d\lambda. \tag{35}$$

Применим далее асимптотику функций Ханкеля [2] и метод перевала [5] (преобразование $\lambda = (\omega/c)\cos\tau$, $\varkappa = (\omega/c)\sin\tau$; $z = R\cos\theta$, $r = R\sin\theta$; точка перевала $\tau_0 = (\pi/2) - \theta$, направление линии перевала $\alpha_0 = -(3/4)$), получим

$$\tilde{\Pi}_{\omega z m}^{(1)} = \frac{qv}{\pi\omega^2} e^{im\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - i\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta}{1 - \beta^2\cos^2\theta} J_m\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta \cdot r_0\right) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}, \tag{36}$$

$\tilde{\Pi}_{\omega\varphi m}^{(1)}$ не дает вклада в излучение, а

$$\tilde{\Pi}_{\omega r m}^{(1)} = -\frac{qv}{\pi\omega^2} e^{im\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta}{1 - \beta^2\cos^2\theta} J_m\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta r_0\right) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}. \tag{37}$$

Здесь $R$ и $\theta$ — сферические координаты. Для полей в волновой зоне $(\omega/c) R \gg 1$ получаем

$$\tilde{H}_{\omega\varphi m}^{(1)} = \tilde{E}_{\omega\theta m}^{(1)} = -\frac{qv}{\pi c^2} e^{im\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} J_m\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta r_0\right) \frac{\sin\theta}{1 - \beta^2\cos^2\theta} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}, \tag{38}$$

а $\tilde{H}_{\omega\theta m}^{(1)} = \tilde{E}_{\omega\varphi m}^{(1)}$ не дают вклада в излучение, так как зависят от $R$ как $e^{i(\omega/c)R}/R$. Здесь $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Таким образом, поле в волновой зоне линейно поляризовано, причем электрический вектор лежит в плоскости, проходящей через луч и ось $z$. Полученные выражения полей позволяют найти энергию излучения на частоте $\omega$. Получаем

$$W_{\omega m} = c\,|E_{\omega\theta m}|^2 = \frac{q^2v^2}{\pi^2c^3}\cos^2 m\varphi J_m^2\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta r_0\right)\frac{\sin^2\theta}{(1 - \beta^2\cos^2\theta)^2}, \tag{39}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Для $m = 0$ из формулы (39) получаем

$$W_{\omega 0} = \frac{q^2v^2}{\pi^2c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1 - \beta^2\cos^2\theta)^2}, \tag{40}$$

что совпадает с формулой, полученной в работе [6], для энергии переходного излучения заряда $q$ на сплошной идеально проводящей плоскости.

Если заряд движется по оси $z$ ($r_0 = 0$), то вся энергия излучения совпадает с (40) и это дает основание утверждать, что медленно движущийся по оси $z$ заряд (дипольное излучение) не «чувствует» анизотропии плоскости $xOy$.

### Переходное излучение заряда на радиальной решетке

В случае радиальной решетки все расчеты проводятся аналогично. Вместо граничного условия (1) теперь будет условие

$$E_r\big|_{z=0} = 0, \tag{41}$$

а в условиях (12) значки $r$ и $\varphi$ у $E$ и $H$ поменяются местами. Эти изменения в граничных условиях приводят, однако, к тем же коэффициентам (с отмеченной заменой у $E$ и $H$ $\varphi$ на $r$ и наоборот). Так, при движении заряда по оси $z$ энергия излучения дается той же формулой (40), т. е. еще раз подтверждается отсутствие влияния анизотропии плоскости $xOy$ на энергию и направленность излучения. Отличие случая кольцевой решетки от радиальной проявляется только в поляризации излучения.

## Заключение

Таким образом, в случае дипольного излучения заряда кольцевая и радиальная решетки дают одинаковую интенсивность и направленность излучения (различна только поляризация), совпадающие с интенсивностью и направленностью переходного излучения заряда на сплошной плоскости.

Теперь можно рассмотреть излучение магнитного заряда [7]. Как отмечено в работе [8], для получения соответствующих формул нет необходимости проводить расчеты, дополнительные к теории переходного излучения электрического заряда $q$. Результат можно получить сразу, пользуясь симметрией уравнений Максвелла и заменяя $q$ на $g$ и вектор **E** на **H**. В волновой зоне векторы **E** и **H** одинаковы по величине и меняются местами при замене $q$ на $g$ ($g$ — величина магнитного заряда). Поэтому изменится поляризация излучения (и его интенсивность) в $(g/q)^2$ раз.

Наибольший интерес представляет, однако, случай ультрарелятивистский $v=c$). В этом случае поле электрического заряда расположено в плоскости $z=vt$ и его силовые линии образуют «радиальную решетку». Если в плоскости $z=0$ расположена металлическая радиальная решетка, то при достижении зарядом $q$ начала координат поле возбуждает в радиальной решетке токи такие же, как и в сплошной решетке, и возникает излучение, поляризация, интенсивность и направленность которого такие же, как и для сплошной плоскости. Если же в плоскости $z=0$ расположена кольцевая решетка, то силовые линии (линии **E**) заряда ортогональны кольцам и не будут возбуждать в них ток. Это в свою очередь будет означать, что ультрарелятивистский заряд $q$ будет давать на кольцевой решетке только дипольную часть излучения, а основное излучение (вперед по линии движения) будет отсутствовать. Для ультрарелятивистского магнитного заряда $g$ картина противоположная. На кольцевой решетке такой заряд будет давать излучение вперед, которое в $(g/q)^2$ раз интенсивнее излучения электрического заряда на сплошной плоскости и отличается от него поляризацией.

Приведенные выше соображения позволяют надеяться на использование кольцевой решетки для поисков магнитных зарядов. Если имеется пучок, содержащий электрические и магнитные заряды ($v=c$), то, поставив на его пути кольцевую решетку, надо следить за наличием излучения на пути движения пучка (вперед). Если в этом направлении будет зарегистрировано излучение, то из этого следует, что в пучке есть магнитные заряды. Если такого излучения нет, то пучок целиком состоит из электрических зарядов.

Заметим, в конце, что полученные для бесконечной решетки результаты будут верны и для решетки конечных размеров (радиуса $R_0$), если выполнено неравенство $a \ll \lambda \ll R_0$, где $a$ — расстояние между прутьями (и толщина прутьев), $\lambda$ — длина волны, т. е. бесконечность решетки не носит принципиального характера.

Указанное двойное неравенство относится и к дипольному излучению. Для ультрарелятивистского случая $\lambda \ll a \ll R_0$, так что всегда можно выбрать $R_0$ достаточно большим, но конечным.

Отметим, что кольца решетки можно сделать из кусков проволоки различной длины, согнув их в окружности-кольца, и расположить в одной плоскости с помощью какого-либо диэлектрического клея.

В заключение выражаю благодарность К. А. Барсукову и Б. М. Болотовскому за интерес к работе, а также рецензенту, замечания которого во многом способствовали ее улучшению.

## Список литературы

[1] *Барсуков К. А., Нарышкина Л. Г.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1965. Т. 8. № 5. С. 936—941.

[2] *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963. 1100 с.

[3] *Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В.* // УФН. 1966. Т. 88. № 2. С. 209—251.
[4] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[5] *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
[6] *Гинзбург В. Л., Франк И. М.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. Вып. 1. С. 15—28.
[7] Монополь Дирака. Сб. статей / Под ред. Б. М. Болотовского, Ю. Д. Усачева. М.: Мир, 1970. 331 с.
[8] *Франк И. М.* // ЯФ. 1979. Т. 29. № 1. С. 180—187.

Астраханский государственный
педагогический институт
им. С. М. Кирова

Поступило в Редакцию
16 января 1990 г.
В окончательной редакции
15 августа 1990 г.