09

О ЕМКОСТИ ЗАПОЛНЕННОГО АНИЗОТРОПНЫМ ПОЛУПРОВОДНИКОМ КВАДРУПОЛЬНОГО КОНДЕНСАТОРА

Н. А. Гусак, А. Ф. Гриб, Ю. Э. Камач, Л. Л. Шапиро

Показано, что емкость квадрупольного конденсатора, заполненного анизотропным полупроводником, монотонно уменьшается от своего максимального до минимального значения с ростом частоты изменения напряжения на его электродах. Это обусловлено возникающим в объеме кристалла избыточным зарядом, уменьшающимся от некоторого максимального значения при постоянном напряжении до нуля по мере увеличения частоты.

При исследовании квадрупольных дефлекторов света было обнаружено, что в них может появляться объемный заряд [1, 2]. Этот эффект наблюдается в такой схеме дефлектора, в которой распределение поля зависит от анизотропии электрических свойств используемого электрооптического кристалла. При этом частота изменения управляющего напряжения должна быть не слишком высокой, чтобы могла сказываться проводимость материала.

Эффект появления заряда в объеме анизотропного кристалла при наличии неоднородного электрического поля неизбежно влияет на емкость устройства. В данной работе рассматривается этот вопрос на примере квадрупольного конденсатора, заполненного анизотропным полупроводником.

Найдем вначале емкость квадрупольного конденсатора, между электродами которого располагается идеальный анизотропный диэлектрик. Пусть потенциал φ в нем описывается выражением

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2R_1^2}\left(z^2 - \varepsilon' y^2 + \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon' + 1} R_1^2\right), \tag{1}$$

где $\varepsilon' = \varepsilon_z/\varepsilon_y$; ε_z, ε_y — компоненты тензора диэлектрической проницаемости ε вдоль главных осей oz и oy кристалла соответственно.

Из (1) видно, что электроды конденсатора, потенциалы которых равны $\pm(\varphi_0/2)$, описываются уравнениями

$$z^2 - \varepsilon' y^2 + \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon' + 1} R_1^2 = \pm R_1^2, \tag{2}$$

причем $R_1 = \sqrt{(\varepsilon'+1)/2}\, R_0$, R_0 — расстояние между вершинами электродов с одинаковым знаком потенциала.

Выражение (1) удовлетворяет уравнениям Максвелла для электростатики

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ — электрическая индукция, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ — напряженность электрического поля, ε_0 — электрическая постоянная.

Поверхностная плотность заряда на электроде определяется, как известно [3], нормальной компонентой индукции $\mathbf{D}_n$, причем нормаль направлена от электрода внутрь кристалла. Поскольку вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен поверхности электрода, то величину $\mathbf{D}_n$ можно записать в виде

$$D_n = \pm \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{|\mathbf{E}|},$$

где верхний знак перед скалярным произведением векторов **D** и **E** относится к электродам с положительным потенциалом, а нижний — к электродам с отрицательным потенциалом.

В результате положительный заряд $Q^{(+)}$, запасенный в квадрупольном конденсаторе, можно представить интегралом

$$Q^{(+)} = 4\int_0^{y_1}\int_0^L D_n \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dydx, \tag{3}$$

причем интегрирование по x производится по длине L образующих цилиндрических электродов, а по y — от 0 до y_1—y — компоненты краев электродов, пере-

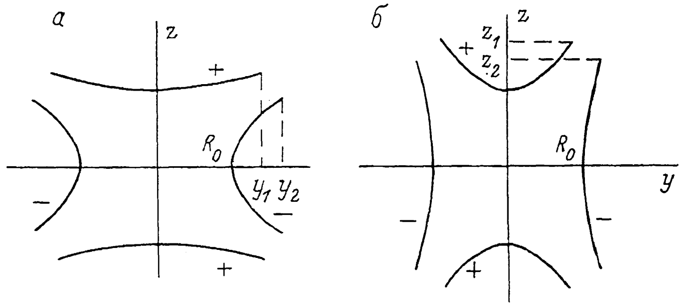


Рис. 1. К вычислению заряда на электродах квадрупольного конденсатора, заполненного анизотропным диэлектриком, для которого $\varepsilon < 1$ (*а*), и полупроводником, для которого $\sigma > 1$ (*б*).

секающих ось oz (рис. 1, *а*). Вычисляя все величины, входящие под знак интеграла (3), в соответствии с (1) и (2) получаем в итоге

$$Q_1^{(+)} = \frac{8\varepsilon_0\varepsilon_z\varepsilon_y K_1^{(+)}\sqrt{\varepsilon' K_1^{(+)2}+1}\; L\varphi_0}{\varepsilon_z+\varepsilon_y}, \tag{4}$$

где $K_1^{(+)} = y_1/R_0$.

При вычислении заряда $Q^{(-)}$, находящегося на электродах с отрицательным потенциалом, необходимо воспользоваться уравнением (2) со знаком минус в правой части. В этом случае интегрирование по y должно производиться в пределах от R_0 до y_2 (рис. 1, *а*). В результате для $Q_1^{(-)}$ получается выражение

$$Q_1^{(-)} = -\frac{8\varepsilon_0\varepsilon_z\varepsilon_y\sqrt{\varepsilon'}\; K_1^{(-)}\sqrt{K_1^{(-)2}-1}\; L\varphi_0}{\varepsilon_z+\varepsilon_y}, \tag{5}$$

где $K_1^{(-)} = y_2/R_0$.

Выражения (4) и (5) совпадают по абсолютной величине, если коэффициенты $K_1^{(+)}$ и $K_1^{(-)}$ удовлетворяют равенству

$$K_1^{(+)}\sqrt{\varepsilon' K_1^{(+)2}+1} = \sqrt{\varepsilon'}\; K_1^{(-)}\sqrt{K_1^{(-)2}-1}. \tag{6}$$

В этом случае указанные выражения определяют емкость квадрупольного конденсатора, которая может быть записана, например, в виде правой части выражения (4) без множителя φ_0.

Заметим, что при расчете мы пренебрегали краевыми эффектами. Компоненты векторов **E** и **D** вычислялись на основании выражения (1) на всей поверхности электродов. Если же соотношение (6) нарушено, то для нахождения емкости конденсатора требуются дополнительные исследования. В этом случае распределение потенциала в кристалле отличается от закона (1), на что указывают результаты исследования электрооптических линз [4].

Вычислим теперь заряд на электродах квадрупольного конденсатора, заполненного анизотропным полупроводником. Подключение такого конденсатора к источнику напряжения сопровождается протеканием через объем кристалла электрического тока. В стационарных условиях распределение потенциала должно подчиняться уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{7}$$

где плотность тока

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{8}$$

и σ — тензор проводимости кристалла.

Пусть потенциал в кристалле описывается выражением

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2R_2^2}\left(z^2 - \sigma' y^2 + \frac{\sigma' - 1}{\sigma' + 1} R_2^2\right), \tag{9}$$

удовлетворяющим уравнению (7). Здесь $R_2 = \sqrt{(\sigma'+1)/2}\, R_0$, $\sigma' = \sigma_z/\sigma_y$, а σ_z, σ_y — компоненты тензора σ вдоль соответствующих главных осей кристалла. На рис. 1, *б* представлено сечение плоскостью yz конденсатора, в котором реализуется распределение потенциала (9). Для определенности принято, что $\sigma' > 1$.

Вычисление заряда $Q_2^{(+)}$, находящегося на электродах с положительным потенциалом, приводит теперь к результату

$$Q_2^{(+)} = \frac{A}{\sqrt{\sigma'}}\left\{\left(\frac{\sigma'}{\varepsilon'} + 1\right)\frac{K_2^{(+)}\sqrt{K_2^{(+)2} - 1}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma'}{\varepsilon'} - 1\right)\ln\left(K_2^{(+)} + \sqrt{K_2^{(+)2} - 1}\right)\right\}, \tag{10}$$

где $K_2^{(+)} = z_1/R_0$, а

$$A = \frac{8\varepsilon_0 \varepsilon_z L \varphi_0}{\sigma' + 1}.$$

Выпишем также выражение для заряда

$$Q_2^{(-)} = -A\left\{\left(\frac{\sigma'}{\varepsilon'} + 1\right)\frac{K_2^{(-)}\sqrt{\frac{1}{\sigma'}K_2^{(-)2} + 1}}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{\sigma'}}{2}\left(\frac{\sigma'}{\varepsilon'} - 1\right)\ln\left(\frac{K_2^{(-)}}{\sqrt{\sigma'}} + \sqrt{\frac{1}{\sigma'}K_2^{(-)2} + 1}\right)\right\}, \tag{11}$$

находящегося на электродах с отрицательным потенциалом. Здесь $\mathbf{K}_2^{(-)} = \mathbf{z}_2/\mathbf{R}_0$.

Из (10) и (11) видно, что выражения для зарядов представляются в виде суммы двух слагаемых. Рассмотрим вначале случай, когда $\sigma' = \varepsilon'$. Для такого кристалла вторые слагаемые данных выражений обращаются в нуль. Первые же слагаемые с точностью до знака совпадают между собой при условии, что коэффициенты $\mathbf{K}_2^{(+)}$ и $\mathbf{K}_2^{(-)}$ подчиняются соотношению

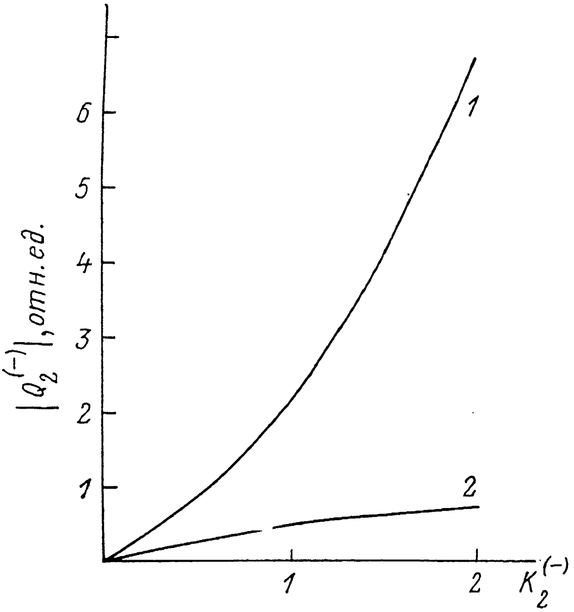
$$K_2^{(-)}\sqrt{\frac{1}{\sigma'}K_2^{(-)2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{\sigma'}}K_2^{(+)}\sqrt{K_2^{(+)2} - 1}.$$

Более того, абсолютные величины зарядов $Q_2^{(+)}$ и $Q_2^{(-)}$ оказываются равными абсолютным величинам зарядов $Q_1^{(+)}$ и $Q_1^{(-)}$, если только $K_2^{(+)} = K_1^{(-)}$ и анизотропия ε_1 в первой ситуации (рис. 1, *а*) связана с анизотропией σ' во второй ситуации (рис. 1, *б*) равенством $\varepsilon_1' = 1/\sigma_2'$, причем $\varepsilon_{1z} = \varepsilon_{2y}$, $\varepsilon_{1y} = \varepsilon_{2z}$. В этом случае геометрии устройств, представленных на рис. 1, *а*, *б*, переходят друг в друга при относительном повороте на 90° вокруг оси $0x$, перпендикулярной плоскости рисунка. Следовательно, на емкость второго конденсатора не влияет проводимость кристалла при пропорциональности тензоров σ и ε друг другу и равна емкости первого конденсатора. Это согласуется с тем, что при пропорциональности тензоров σ и ε в неоднородном поле не образуется объемный заряд [1, 2].

Пусть теперь $\sigma' \neq \varepsilon'$. В этом случае вторые слагаемые выражений (10) и (11) отличны от нуля, причем одно из них увеличивает, а другое уменьшает заряд на электродах. Если $\varepsilon' < \sigma'$, то $Q_2^{(+)} < |Q_2^{(-)}|$, т. е. на электродах с отрицательным потенциалом заряд оказывается больше, чем на электродах с положительным потенциалом. Условие электронейтральности всей системы требует, чтобы в объеме кристалла появился положительный заряд, устраняющий нехватку его на соответствующих электродах. В справедливости этого можно убедиться непосредственно, подставив (9) в уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \tag{12}$$

В результате получается выражение для плотности объемного заряда ρ, из которого следует, что при $\varepsilon' < \sigma'$ действительно $\rho > 0$. Интеграл от ρ по объему кристалла определяет избыточный заряд в полупроводнике, компенсирующий разницу между абсолютными значениями величин $Q_2^{(-)}$ и $Q_2^{(+)}$. Ясно, что емкость квадрупольного конденсатора в данном случае равна отношению модуля $Q_2^{(-)}$ к величине приложенного напряжения φ_0.



Сопоставление выражений (10) и (11) показывает, что для $\varepsilon' > \sigma'$, наоборот, $Q_2^{(+)} > |Q_2^{(-)}|$. В этом случае в объеме полупроводника появляется избыточный отрицательный заряд, обеспечивающий нейтральность всей си-

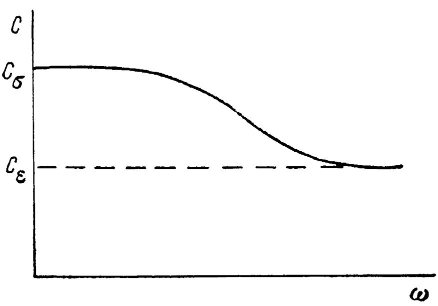


Рис. 2. Зависимость от коэффициента $K_2^{(-)}$ долей заряда $|Q_2^{(-)}|$, представляемых первым слагаемым выражения (14) (*1*) и вторым слагаемым (*2*) в отн. ед.

Рис. 3. Зависимость емкости квадрупольного конденсатора от частоты изменения напряжения.

C_σ и C_ε — асимптотические величины емкости для малых и больших частот соответственно.

стемы. Емкость квадрупольного конденсатора определяется теперь уже зарядом $Q_2^{(+)}$.

На рис. 2 приведена зависимость заряда $Q_2^{(-)}$ от поперечных размеров электродов в случае кристалла, для которого $\sigma'=1$, $\varepsilon'=0.5$. Удобно представить отдельно первое слагаемое выражения (11) (кривая *1*) и второе слагаемое (кривая *2*). Видно, что по мере увеличения $\mathbf{K}_2^{(-)}$ доля объемного заряда уменьшается относительно полного заряда конденсатора. Это связано с уменьшением межэлектродных промежутков, заполненных кристаллом. При больших поперечных размерах конденсатора его емкость практически не зависит от наличия объемного заряда в полупроводнике. При малых же размерах конденсатора становится существенной зависимость емкости от этого заряда. Из рис. 2 следует, что для малых $K_2^{(-)}$ слагаемые в фигурных скобках выражения (11) становятся сравнимыми между собой. Поэтому на низких частотах изменения управляющего напряжения, когда сказывается проводимость используемого материала, емкость квадрупольного конденсатора должна быть выше, чем емкость такого конденсатора на высоких частотах, при которых в полупроводнике не образуется объемный заряд.

Представляет интерес выяснить зависимость емкости квадрупольного конденсатора, заполненного анизотропным полупроводником, от частоты изменения напряжения. Ответ на этот вопрос можно найти, установив частотную зависимость величины объемного заряда в кристалле.

В случае, когда кристалл проявляет свойства не только диэлектрика, но также и проводника, распределение потенциала в нем должно находиться из совместного решения уравнения непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

уравнения Пуассона (12) и уравнения (8), справедливого в такой форме при пренебрежении диффузией заряда. Из этой системы уравнений можно получить следующее уравнение для потенциала:

$$\varepsilon_0 \varepsilon_y \varphi_{tyy} + \varepsilon_0 \varepsilon_z \varphi_{tzz} + \sigma_y \varphi_{yy} + \sigma_z \varphi_{zz} = 0, \tag{14}$$

где $\varphi_{tyy} = (\partial^3 \varphi)/(\partial t \partial^2 y)$ и т. д.

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что функция

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2R^2}\left(z^2 - \frac{a + d \operatorname{tg} \omega t}{b} y^2 + \frac{a - b + d \operatorname{tg} \omega t}{b} \frac{R_0^2}{2}\right) \cos \omega t \tag{15}$$

является решением уравнения (14). Здесь $R = \sqrt[4]{((a+b)^2+d^2)/4b^2}\, R_0$, причем $a = \sigma_y \sigma_z + \omega^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon_y \varepsilon_z$, $b = \sigma_y^2 + \omega^2 \varepsilon_0^2 \varepsilon_z^2$, $d = \omega \varepsilon_0 (\varepsilon_y \sigma_z - \varepsilon_z \sigma_y)$. Распределение потенциала в пространстве, согласно (15), совпадает с распределением (9) при низких частотах и с распределением (1) при высоких частотах, когда можно пренебречь проводимостью кристалла. Подставляя (15) в уравнение (12), получаем следующее выражение для плотности объемного заряда:

$$\rho = \frac{\varphi_0 d}{R^2 \sqrt{b}\, \omega} \sin(\omega t + \gamma), \tag{16}$$

причем $\operatorname{tg} \gamma = \sigma_y / (\omega \varepsilon_0 \varepsilon_y)$. Объемный заряд отстает по фазе на угол $(90° - \gamma)$ относительно управляющего напряжения. Это отставание близко к 90° при $\sigma \ll \omega \varepsilon_0 \varepsilon$ и стремится к нулю в случае очень большой проводимости. Выражение (16) при $\omega = 0$ определяет избыточный заряд в кристалле для стационарного условия. С ростом частоты изменения напряжения объемный заряд уменьшается и при $\omega \to \infty$ его амплитуда спадает обратно пропорционально ω. Аналогично зависит от частоты и емкость квадрупольного конденсатора, которая максимальна при постоянном напряжении. С ростом ω емкость уменьшается и стремится к своему асимптотическому значению, определяющемуся распределением потенциала, зависящим лишь от диэлектрических свойств кристалла.

Рис. 3 передает характер зависимости емкости квадрупольного конденсатора от частоты изменения напряжения. Расположение относительно оси абсцисс переходной области от одного асимптотического значения C_σ к другому C_ε определяется проводимостью конкретного полупроводника. С ростом проводимости кристалла эта область сдвигается в сторону больших частот.

Список литературы

[1] *Бондарев И. Ф., Гриб А. Ф., Гусак Н. А., Сотский Б. А.* // ЖПС. 1982. Т. 36. № 6. С. 999—1002.

[2] *Гусак Н. А., Камач Ю. Э., Овчинников В. М., Сотский Б. А.* // ДАН БССР. 1983. Т. 27. № 10. С. 904—906.

[3] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1957. 532 с.

[4] *Гусак Н. А., Мащенко А. Г.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 3. С. 595—599.

Межотраслевой институт
повышения квалификации кадров
по новым направлениям
развития техники и технологии
при Белорусском политехнической институте
Минск

Поступило в Редакцию
23 июня 1990 г.