переходила в режим автоколебаний (рис. 2, 3). Глубина наблюдавшейся автомодуляции зависела от λ и R и при $\lambda=6.0$, $R=-1$ составляла около 38 % по холостой волне и 11 % по сигнальной волне и возрастала при увеличении параметра λ.

Пороговое значение $\lambda_{\text{пор}}$ возникновения автоколебаний при $R=-1$ составляет величину около 5.8. Период колебаний вблизи $\lambda_{\text{пор}}$ равен времени прохода через кристалл волны накачки (рис. 3, *а*, *б*). При увеличении λ наблюдались бифуркации удвоения периода. На рис. 3, *в*, *г* приведена форма автоколебаний на торцах кристалла с периодом, равным времени двух проходов волны накачки через кристалл. Проведенный нами анализ развития неустойчивости позволяет предположить, что в данной системе реализуется неустойчивость Икеды [5].

При бóльших значениях параметра λ ($\lambda \geqslant 6.4$) в системе наблюдаются также колебания с периодом $T_n=n/\nu$, кратным времени прохода через кристалл поперечных звуковых волн. Ввиду несоизмеримости времен прохода через кристалл поперечных и продольных звуковых волн автомодуляция становится квазипериодической.

Рассмотренный эффект может служить причиной автомодуляции, экспериментально наблюдавшейся в кристаллах парателлурита в [1, 3].

Список литературы

[1] *Ильченко Л. Н., Обозненко Ю. Л.* // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5. Вып. 23. С. 1425—1427.
[2] *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Под ред. В. В. Леманова. М.: Наука, 1982. 424 с.
[3] *Ильченко Л. Н., Обозненко Ю. Л.* // ФТТ. 1979. Т. 21. Вып. 6. С. 1648—1652.
[4] *Шустер Г.* Детерминированный хаос / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича. М.: Мир, 1988. 240 с.
[5] *Гиббс Х.* Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света / Под ред. Ф. В. Карпушко. М.: Мир, 1988. 520 с.
[6] *Морозов А. И., Проклов В. В., Станковский Б. А.* Пьезоэлектрические преобразователи для радиоэлектронных устройств. М.: Радио и связь, 1981. 184 с.
[7] *Ильченко Л. Н., Москалев В. М., Обозненко Ю. Л., Смирнов Е. Н.* // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 6. С. 1057—1059.
[8] Акустические кристаллы. Справочник / Под ред. М. П. Шаскольской. М.: Наука, 1982. 632 с.

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Поступило в Редакцию 30 июля 1990 г.

01; 09; 12

Журнал технической физики, т. 61, в. 9, 1991

ВЕДУЩАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПОПРАВКА К ЕМКОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

В. А. Шелюто

В работе [1] на основании метода средних потенциалов (метода Хоу [2]) найдена функциональная зависимость емкости кольцевого конденсатора от его геометрических параметров. Было показано, что метод Хоу правильно воспроизводит логарифмическую поправку к емкости, если расстояние между пластинами конденсатора меньше их характерного размера. Ниже этот метод используется при исследовании краевых эффектов в цилиндрическом конденсаторе конечной длины. Из геометрических соображений ясно, что влияние краевых эффектов относительно малó, когда расстояние между электродами $d \equiv a-b$ много меньше поперечных размеров конденсатора ($d \ll a$, a и b — радиусы внешнего и внутреннего электродов соответственно) либо когда длина конденсатора H

значительно превышает его поперечные размеры ($H \gg a$). В обоих случаях справедливо неравенство $d \ll \min(a, H)$, которым и ограничимся при вычислении малых краевых поправок к емкости цилиндрического конденсатора.

В приближении Хоу коэффициенты взаимной емкости C_{ab} ($a \neq b$) и собственные емкости C_{aa} и C_{bb} двух коаксиальных цилиндров определяются соотношением

$$C_{ab}^{-1} = \frac{1}{2\pi H^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz_1 \int_0^H dz_2 \left[(z_1 - z_2)^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi\right]^{-1/2}. \quad (1)$$

Интегрируя в (1) по переменным z_1 и z_2, получим для коэффициентов емкости, рассчитанных на единицу длины ($\bar{C}_{ab} \equiv C_{ab}/H$), следующее выражение:

$$\bar{C}_{ab}^{-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \left[\ln \frac{1 + \sqrt{1 + \bar{\rho}_{ab}^2}}{\bar{\rho}_{ab}} - \sqrt{1 + \bar{\rho}_{ab}^2} + \bar{\rho}_{ab}\right], \quad (2)$$

где $\bar{\rho}_{ab} = \rho_{ab}/H$, $\rho_{ab}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$.

Прежде всего рассмотрим предельный случай $a/H \ll 1$ ($\bar{\rho}_{ab} \ll 1$). С точностью до линейных по $\bar{\rho}_{ab}$ членов

$$\bar{C}_{ab}^{-1} \simeq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \left[\ln \frac{2}{\bar{\rho}_{ab}} - 1 + \bar{\rho}_{ab}\right]. \quad (3)$$

Тогда емкость конденсатора $\bar{C}$ (отнесенная к его длине H) равна

$$\frac{1}{\bar{C}} \simeq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \left[\ln \frac{\bar{\rho}_{ab}^2}{\bar{\rho}_{aa}\bar{\rho}_{bb}} + \bar{\rho}_{aa} - 2\bar{\rho}_{ab} + \bar{\rho}_{bb}\right] = 2\ln(a/b) - \frac{8(a+b)}{\pi H}\left[E(q_0) - 1\right], \quad (4)$$

где $E(q_0)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, зависящий от параметра

$$q_0^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2}. \quad (5)$$

Из равенства (4) видно, что ведущий (в пределе $a/H \to 0$) вклад $\bar{C}_0 = 1/2\ln(a/b)$ в емкость происходит от логарифмических слагаемых типа $\ln \bar{\rho}_{ab}$. Линейные же по $\bar{\rho}_{ab}$ члены дают малую поправку, связанную с краевыми эффектами. Оценим величину этой поправки для тонкого конденсатора ($d/a \ll 1$). Разложив эллиптический интеграл $E(q_0)$ в ряд по малому параметру $q_0'^2 = 1 - q_0^2 \simeq (d/2a)^2$, получим

$$\frac{1}{\bar{C}} \simeq 2\ln(a/b) - \frac{2d^2}{\pi a H}\left(\ln \frac{8a}{d} - \frac{1}{2}\right). \quad (6)$$

Таким образом, в случае длинного конденсатора ($d \ll a \ll H$) искомая поправка к емкости имеет относительный порядок $d/H = (d/a)(a/H)$.

Откажемся теперь от неравенства $a/H \ll 1$ (однако расстояние d между электродами по-прежнему будем считать малым). Интегрирование по углу φ в исходной формуле (2) проще всего выполнить, предварительно разложив подынтегральную функцию в ряд по малому параметру $d/\sqrt{H^2 + 2a^2(1 - \cos\varphi)}$. В результате имеем

$$\frac{1}{\bar{C}} = 2\ln(a/b) - \frac{2d^2}{\pi a H}\left[\ln \frac{8a}{d} - \frac{1}{2} - q_a^3 \cdot \mathbb{C}(q_a)\right], \quad (7)$$

где $\mathbb{C}(q_a)$ — полный эллиптический интеграл [3], зависящий от параметра

$$q_a^2 = \frac{4a^2}{H^2 + 4a^2}. \quad (8)$$

При $a \ll H$ формула (7) переходит в (6), так как $q_a^3 \cdot C(q_a) \simeq (2a/H)^3(\pi/16) \sim (a/H)^3 \ll 1$. В противоположном случае $a \gg H \gg d$ из (7) следует

$$\frac{1}{\bar{C}} \simeq 2\ln(a/b) - \frac{2d^2}{\pi a H}\left(\ln\frac{H}{d} + \frac{3}{2}\right). \tag{9}$$

Из равенства (9) легко получить известную формулу для емкости полосковой линии с пластинами одинаковой ширины. Для этого достаточно заменить емкость на единицу длины конденсатора $\tilde{C} \equiv C/H$ емкостью на единицу длины его периметра $\bar{C} \equiv C/(2\pi a) = (H\tilde{C})/(2\pi a)$ и перейти к пределу $H/a \to 0$

$$\tilde{C} \simeq \frac{H}{4\pi d}\left[1 + \frac{d}{\pi H}\left(\ln\frac{H}{d} + \frac{3}{2}\right)\right]. \tag{10}$$

Величина H соответствует ширине пластин, а d — расстоянию между ними. Такой же предельный вид в приближении Хоу имеет и выражение для емкости кольцевого конденсатора [1] при стремлении к нулю отношения ширины кольцевых электродов к их радиусу.

Формула (7) применима в широкой области изменения параметров a, b и H ($(a-b) \leqslant \min(a, H)$), однако ее практическое использование затруднено из-за наличия эллиптического интеграла $\mathbb{C}(q_a)$. С целью получения более простой формулы для емкости обратимся к предельным значениям (6) и (9)

$$\frac{1}{\bar{C}} \simeq 2\ln(a/b) - \frac{2d^2}{\pi a H}\begin{cases} \ln\frac{8a}{d} - \frac{1}{2} & \text{при} \quad H \gg a \gg d, \\ \ln\frac{H}{d} + \frac{3}{2} & \text{при} \quad a \gg H \gg d. \end{cases} \tag{11}$$

Естественно написать для $\bar{C}$ следующую интерполяционную формулу:

$$\frac{1}{\bar{C}} \simeq 2\ln(a/b) - \frac{2d^2}{\pi a H}\left(\ln\frac{aH}{d\sqrt{a^2+H^2}} + \chi\right) \simeq 2\ln(a/b)\left[1 - \frac{d}{\pi H}\left(\ln\frac{aH}{d\sqrt{a^2+H^2}} + \chi\right)\right], \tag{12}$$

где $\chi(a/H)$ — медленно меняющаяся функция.

Далее, следуя работе [1], положим $\chi = 3/2 + (\ln\pi - 1)$ и $\gamma = (a-b)/\pi H$. В результате получим простую формулу

$$\bar{C} \simeq \frac{\bar{C}_0}{1 - \gamma\ln\left(a/\gamma\sqrt{a^2+H^2}\right) - \gamma/2}, \tag{13}$$

удобную для практического вычисления емкости.

Список литературы

[1] *Шелюто В. А.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 2. С. 1—5.
[2] *Иоссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Г.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 288 с.
[3] *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт метрологии им. Д. И. Менделеева
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
23 июля 1990 г.
В окончательной редакции
28 января 1991 г.