01; 09

МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЗАДАЧАХ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДАХ

А. В. Гуреев

Рассматриваются особенности применения метода возмущения к задаче на собственные значения оператора Максвелла в регулярном неоднородно заполненном волноводе. В общем случае собственными и возмущающими могут считаться любые независимые параметры, характеризующие структуру: продольное волновое число, частота, поверхностный импеданс боковых стенок, масштабные коэффициенты диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости заполняющей волновод среды, характерный размер сечения и т. д. С помощью обобщенных соотношений ортогональности получены формулы, позволяющие определять возмущенные собственные значения и собственные векторы. Анализируется их физический смысл и обсуждаются возможные модификации метода, позволяющие повысить эффективность его практического применения.

Введение

Методы возмущения играют важную роль в решении многих теоретических и прикладных задач физики. Эффективность их использования оказывается особенно высокой в тех случаях, когда удается получаемым с их помощью сравнительно простым расчетным формулам приписать физический смысл. Сделать это не всегда возможно, поскольку в исходной формулировке задачи физический смысл часто достаточно ясно не просматривается. Например, такая ситуация возникает при исследовании вопросов распространения электромагнитных волн в регулярных неоднородно заполненных волноводах. К тому же в этом случае для математически удобной формулировки краевой задачи, базирующейся на понятии операторного квадратичного пучка [1, 2], методы возмущения разработаны недостаточно полно. Их развитию, а также анализу смысла полученных соотношений посвящена настоящая работа.

Рассматриваемая задача состоит в отыскании собственных значений и собственных векторов операторного квадратичного пучка. В традиционной постановке собственными значениями являются продольные волновые числа (или их квадраты) собственных волн волновода, а вариация одного из остальных параметров, характеризующих структуру (частоты, диэлектрической проницаемости и магнитной восприимчивости заполняющей волновод среды, характерного размера его поперечного сечения, импеданса стенок), выступает в роли возмущающего фактора. Однако в некоторых случаях целесообразно поменять между собой собственный и возмущающий параметры [3]. Разработанный в данной работе подход, использующий для вычисления возмущенных величин вместо дифференциальных уравнений обобщенные соотношения ортогональности, дает возможность без труда осуществить это. Кроме того, такой подход позволяет привести конечные формулы к стандартному для теории возмущения виду [4, 5], проанализировать их физический смысл и оценить возмущения более высокого, чем обычно, рассматриваемый первый, порядка.

Постановка задачи

Объединим векторы электрического **E** и магнитного **H** полей в единый вектор $\mathbf{X}=\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$. Ключевой в теории распространения электромагнитных волн является задача отыскания собственных векторов и продольных волновых чисел собственных волн волновода. Вектор $\mathbf{X}_q$, описывающий электромагнитное поле q-й собственной волны волновода, характеризуется экспоненциальной зависимостью $\exp\{i(\omega t - \gamma_q z)\}$ от времени и продольной координаты z и является собственным вектором оператора Максвелла в волноводе. Собственное значение этого оператора есть продольное волновое число; $\gamma_q \cdot \mathbf{X}_q$ и γ_q определяются вектором $\mathbf{x}$ электрических и геометрических параметров, в число которых входят частота ω, диэлектрическая проницаемость ε и магнитная восприимчивость μ среды, заполняющей волновод, характерный размер его поперечного сечения S и импеданс стенок Z.[1] Зависимость $\mathbf{X}_q$ и γ_q от любой компоненты x является аналитической [6].

Иногда целесообразно переформулировать задачу и считать волновое число γ одним из независимых параметров, а в качестве собственного значения рассматривать любой другой параметр, т. е. поменять его местами с γ [3, 7]. Исходя из этого будем считать, что любой из перечисленных выше параметров (γ, ω, ε, μ и т. д.) может выступать в роли обозначаемого нами через λ параметра, значения которого для исследуемого оператора рассматриваются как собственные. При этом как в качестве собственного, так и в качестве независимого параметров место γ и ω будем использовать их квадраты γ^2 и ω^2. Такая замена возможна благодаря симметрии уравнений Максвелла относительно t и z.

Пусть некоторой комбинации $\mathbf{x}$ из независимых параметров отвечает невырожденное[2] собственное значение λ_q с собственным вектором $\mathbf{X}_q$. Тогда если любой из независимых параметров $x \in \mathbf{x}$ получает некоторое небольшое приращение Δ, то вследствие аналитичности зависимости λ_q от x, о которой говорилось выше, возмущенные собственное значение $\hat{\lambda}_q$ и собственный вектор $\hat{\mathbf{X}}_q$ можно разложить в ряд по степеням Δ

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_q &= \lambda_q + \Delta \cdot \lambda_q^{(1)} + \Delta^2 \cdot \lambda_q^{(2)} + \ldots, \\ \hat{\mathbf{X}}_q &= \mathbf{X}_q + \Delta \cdot \mathbf{X}_q^{(1)} + \Delta^2 \cdot \mathbf{X}_q^{(2)} + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

Для неоднородно заполненных волноводов при отыскании коэффициентов $\lambda_q^{(k)}$ и векторов $\mathbf{X}_q^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots$ встречаются трудности, связанные со сложностью анализируемого оператора, который несамосопряжен и имеет форму квадратичного пучка [1, 2]. В данной работе демонстрируется эффективный способ определения $\lambda_q^{(k)}$ и $\mathbf{X}_q^{(k)}$, основанный на использовании обобщенных соотношений ортогональности.

Обобщенные соотношения ортогональности

Выберем собственный параметр λ и варьируемый независимый параметр $x \in \mathbf{x}$, причем будем считать, что либо в роли λ, либо в роли x выступает квадрат продольного волнового числа γ^2. Последнее условие не является принципиальным, но его невыполнение требует некоторой модификации приведенных в Приложении формул. К тому же при фиксированном γ^2 рассматриваемая модель уже не является волноводной, а описывает явление в резонаторе в форме обобщенного цилиндра, для анализа которого целесообразнее привлечь стандартные методы теории возмущения [4, 5].

Обобщенные соотношения ортогональности связывают между собой собственные значения λ_1 и λ_2 и собственные векторы $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$, отвечающие двум

---

[1] Функциональный вид ε, μ и S следует считать заданным, а соответствующими компонентами вектора $\mathbf{x}$ являются отвечающие каждому из этих параметров масштабные коэффициенты (см. Приложение).

[2] Полученные ниже формулы могут быть обобщены и на случай вырожденных λ_q с привлечением понятия присоединенных векторов [1, 2], на которые легко обобщаются соотношения ортогональности [2].

различным значениям выбранного варьируемого параметра x_1 и x_2 при постоянных остальных параметрах.

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot D_\lambda [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = (x_1 - x_2) \cdot D_x [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2], \tag{2}$$

где $D_\lambda [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$, $D_x [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$ — интегралы по сечению волновода S от составленных из компонент векторов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ квадратичных форм, вид которых определяется соответствующим параметром, указанным в качестве индекса (λ, $x \in \{\gamma^2, \omega^2, \varepsilon, \mu, S, Z\}$, $\lambda \neq x$).

Вывод соотношения (2), а также конкретный вид форм D_{γ^2}, D_{ω^2}, D_ε, D_μ, D_S и D_Z приведены в Приложении.

В соответствии с (2) возмущенные и невозмущенные собственные значения и собственные векторы удовлетворяют соотношению

$$(\hat{\lambda}_q - \lambda_q) \cdot D_\lambda [\hat{\mathbf{X}}_q, \mathbf{X}_q] = \Delta \cdot D_x [\hat{\mathbf{X}}_q, \mathbf{X}_q]. \tag{3}$$

Собственные векторы определены с точностью до постоянного коэффициента, поэтому для того чтобы сделать однозначной задаваемую соотношением (1) зависимость $\mathbf{X}_q(\mathbf{x})$, необходимо их пронормировать. Положим, что возмущенные векторы удовлетворяют следующему условию нормировки:

$$D_\lambda [\hat{\mathbf{X}}_q, \mathbf{X}_q] = F_q = \mathrm{const}, \tag{4}$$

следствием которого и соотношения (1) является ортогональность векторов $\mathbf{X}_q^{(k)}$ и $\mathbf{X}_q$, понимаемая в смысле

$$D_\lambda [\mathbf{X}_q^{(k)}, \mathbf{X}_q] = 0, \ k = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Тогда, подставив (1) в (3), приняв во внимание (4), (5) и сравнив члены при одинаковых степенях Δ в правой и левой частях полученного соотношения, находим

$$\lambda_q^{(k)} = D_x [\mathbf{X}_q^{(k-1)}, \mathbf{X}_q] / F_q, \ k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где $\mathbf{X}_q^{(0)} = \mathbf{X}_q$ есть рассматриваемый невозмущенный собственный вектор.

Соотношение (6) позволяет определять коэффициент $\lambda_q^{(k)}$ по известному вектору $\mathbf{X}_q^{(k-1)}$, описывающему возмущение меньшего порядка. В частности, используя невозмущенный вектор $\mathbf{X}_q$, с помощью (6) можно сразу найти значение $\lambda_q^{(1)} = \partial\lambda_q / \partial\Delta$. Однако для расчета векторов $\mathbf{X}_q^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots$ и, следовательно, коэффициентов $\lambda_q^{(k)}$, $k=2, 3, \ldots$ по-прежнему необходимо привлечение исходных сложных дифференциальных уравнений со всеми вытекающими отсюда трудностями. Дальнейшее упрощение возможно при использовании невозмущенной системы собственных векторов в качестве базиса для разложения по нему возмущенных векторов.

Разложение возмущенных векторов по невозмущенной системе собственных векторов

Воспользуемся полнотой системы собственных векторов волновода $\{X_q\}$ [2] и представим возмущенный вектор в виде

$$\hat{\mathbf{X}}_q = \sum_\nu A_{q\nu} \mathbf{X}_\nu. \tag{7}$$

Такое разложение возможно, если считать ε и μ строго положительными, бесконечно дифференцируемыми функциями на S, ограничивающий S контур L удовлетворяющим условиям Ляпунова, а возможные возмущения сечения волновода таковыми, что $\hat{S}$ полностью содержится внутри S (см. рисунок). Учитывая вытекающее из (3) условие ортгональности для невозмущенной системы векторов

$$D_\lambda [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu] = 0, \ q \neq \nu, \tag{8}$$

находим формулы для коэффициентов $A_{q\nu}$ в разложении (7)

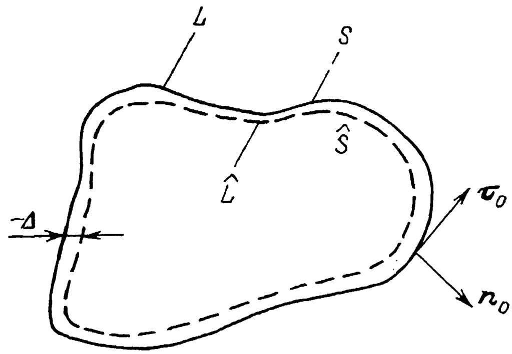
$$A_{q\nu} = D_\lambda[\hat{\mathbf{X}}_q, \mathbf{X}_\nu]/F_\nu,$$

которые с учетом (3) можно преобразовать к виду

$$A_{q\nu} = \frac{\Delta \cdot D_x[\hat{\mathbf{X}}_q, \mathbf{X}_\nu]}{(\hat{\lambda}_q - \lambda_\nu) \cdot F_\nu}. \tag{9}$$

Используя (1), разложим $(\hat{\lambda}_q - \lambda_\nu)$ в ряд по степеням Δ

$$\frac{1}{\hat{\lambda}_q - \lambda_\nu} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta \cdot \lambda_q^{(1)}} \cdot \left\{1 - \Delta \dfrac{\lambda_q^{(2)}}{\lambda_q^{(1)}} + \ldots\right\}, & \nu = q, \\ \dfrac{1}{\lambda_q - \lambda_\nu} \cdot \left\{1 - \Delta \dfrac{\lambda_q^{(1)}}{\lambda_q - \lambda_\nu} + \ldots\right\}, & \nu \neq q. \end{cases} \tag{10}$$



Подстановка (1), (9) и (10) в (7) с последующим сравниванием членов при одинаковых степенях Δ в левой и правой частях полученного выражения приводит к соотношениям

$$\lambda_q^{(1)} = D_x[\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_q]/F_q,$$

$$\mathbf{X}_q^{(1)} = \sum_{\nu \neq q} \frac{D_x[\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu]}{(\lambda_q - \lambda_\nu) \cdot F_\nu} \mathbf{X}_\nu,$$

$$\lambda_q^{(2)} = \sum_{\nu \neq q} \frac{D_x[\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu] \cdot D_x[\mathbf{X}_\nu, \mathbf{X}_q]}{(\lambda_q - \lambda_\nu) \cdot F_q \cdot F_\nu},$$

$$\mathbf{X}_q^{(2)} = \sum_{\nu \neq q} \sum_{\xi \neq q} \frac{D_x[\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\xi] \cdot D_x[\mathbf{X}_\xi, \mathbf{X}_\nu]}{(\lambda_q - \lambda_\nu) \cdot (\lambda_q - \lambda_\xi) \cdot F_\nu \cdot F_\xi} \mathbf{X}_\nu - \sum_{\nu \neq q} \frac{D_x[\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_q] \cdot D_x[\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu]}{(\lambda_q - \lambda_\nu)^2 \cdot F_q \cdot F_\nu} \mathbf{X}_\nu,$$

$$\lambda_q^{(3)} = \sum_{\nu \neq q} \sum_{\xi \neq q} \frac{D_x[\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\xi] \cdot D_x[\mathbf{X}_\xi, \mathbf{X}_\nu] \cdot D_x[\mathbf{X}_\nu, \mathbf{X}_q]}{(\lambda_q - \lambda_\nu) \cdot (\lambda_q - \lambda_\xi) \cdot F_q \cdot F_\nu \cdot F_\xi} -$$

$$- \sum_{\nu \neq q} \frac{D_x[\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_q[\cdot D_x[\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu] \cdot D_x[\mathbf{X}_\nu, \mathbf{X}_q]}{(\lambda_q - \lambda_\nu)^2 \cdot F_q^2 \cdot F_\nu},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{11}$$

которые по виду аналогичны известным в физике формулам теории возмущения [5], причем формы $D_x\ [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu]$ в (11) играют роль скалярных произведений $(\mathfrak{L}_x \mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu^*)$ в [5], где под $\mathfrak{L}_x$ понимается производная исследуемого операторного квадратичного пучка по параметру x.

Отметим в (11) отсутствие векторов $\mathbf{X}_q$ в представлении $\mathbf{X}_q^{(k)}$, что объясняется выбранным нами условием нормировки (4), из которого следует ортогональность векторов $\mathbf{X}_q^{(k)}$ и $\mathbf{X}_q$ (5) при имеющей место ортогональности используемого базиса (8).

Матрица возмущения и ее физический смысл

Запишем обобщенные соотношения ортогональности (2) для векторов $\hat{\mathbf{X}}_q$ и $\mathbf{X}_\nu$

$$(\hat{\lambda}_q - \lambda_\nu) \cdot D_\lambda [\hat{\mathbf{X}}_q, \mathbf{X}_\nu] = \Delta \cdot D_x [\hat{\mathbf{X}}_q, \mathbf{X}_\nu]. \tag{12}$$

Считая, что q и ν в (12) пробегают индексы всех типов волн в волноводе, и используя представление (7) для всех возмущенных векторов $\hat{\mathbf{X}}_q$, с учетом свойства ортогональности (8) приходим к однородной системе уравнений

$$\hat{\lambda} I - (\Lambda + \Delta T_x) = 0, \tag{13}$$

где I — единичная матрица, $\Lambda = \mathrm{diag}\,\{\lambda_q\}$ — диагональная матрица с элементами λ_q, T_x — матрица возмущения с элементами

$$t_{q\nu} = D_x [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu] / F_q. \tag{14}$$

Согласно (13), возмущенные собственные значения λ_q являются собственными значениями матрицы $\Lambda + \Delta T_x$, а компоненты собственных векторов этой матрицы дают проекции возмущенных собственных векторов на невозмущенный базис $\{\mathbf{X}_q\}$. Невозмущенная матрица Λ диагональна в силу ортогональности выбранного базиса. При другом базисе она могла быть недиагональной, но была бы связана с матрицей Λ преобразованием подобия [8]. Матрица возмущения T_x определяет поведение $\hat{\lambda}_q$ при изменении Δ. Из (13) и (14), в частности, следуют формулы (11).

Все матрицы являются бесконечномерными. Поэтому при практическом применении (13) и (11) требуется редукция бесконечномерных матриц и рядов, успешному осуществлению которой благоприятствуют множители типа $(\lambda_q - \lambda_\nu)^{-1}$ в (11).

Остановимся на физическом смысле матрицы T_x. Анализ приведенных в Приложении формул показывает, что форма $D_{\gamma^2} [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu]$ представляет собой взаимный комплексный поток энергии [9, 10] q-й и ν-й собственных волн волновода, а форма $D_{\omega^2} [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu]$, если волновод ограничен идеальной электрической или магнитной стенкой, — z-ю компоненту взаимного комплексного импульса [10] q-й и ν-й волн. При $\delta\varepsilon \equiv \varepsilon$ или $\delta\mu \equiv \mu$ (см. Приложение) формы $D_\varepsilon [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu]$ и $D_\mu [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu]$ имеют тот же смысл, что и форма $D_{\omega^2} [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu]$. Соответственно, если в качестве параметров λ и x выступают γ^2, ω^2, ε или μ (при указанных ограничениях на $\delta\varepsilon$ или $\delta\mu$), согласно (14), элементами матрицы T_x являются либо взаимный комплексный поток энергии двух волн, нормированный на z-ю компоненту комплексного импульса одной из волн, либо z-я компонента взаимного комплексного импульса двух волн, нормированная на комплексный поток энергии одной из них.

Физический смысл остальных квадратичных форм не столь очевиден, но может быть пояснен на сравнительно простых моделях, как это сделано, например, в [11] для $D_Z [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_\nu]$. Отметим, что формы D_Z (или D_Y) и D_S не содержат интегралов по сечению волновода S и определяются только с помощью контурных интегралов. Помимо чисто вычислительных преимуществ этот факт позволяет в ряде случаев упростить анализ и получить простые оценки характеристик собственных волн волновода, например потерь энергии в боковых металлических стенках [11, 12].

Весьма эффективным оказывается также прием, связанный с применением вытекающего из (11) равенства

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\Delta_1} D_{x_1} [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_q] = \frac{\partial\lambda}{\partial\Delta_2} D_{x_2} [\mathbf{X}_q, \mathbf{X}_q], \tag{15}$$

где Δ_1 и Δ_2 количественно характеризуют изменение разных параметров x_1 и $x_2 \in \mathbf{x}$, а производные $\partial\lambda/\partial\lambda_1$ и $\partial\lambda/\partial\lambda_2$ есть не что иное, как коэффициенты $\lambda_q^{(1)}$ в (1) при вариации параметров x_1 и x_2 соответственно.

Если известна одна из производных $\partial\lambda/\partial\Delta_{1,2}$, то с помощью (15) легко определяется другая. В [11, 12] этот прием применяется для расчета производной $\partial\gamma/\partial Z$ через производную γ по нормальному возмущению сечения S.

Сочетание рассмотренных приемов в совокупности с правильным выбором собственного и независимого параметров повышает эффективность анализа с помощью методов возмущения.

Приложение

Пусть векторы электромагнитного поля $\mathbf{X}_1=\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ и $\mathbf{X}_2=\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ есть решения однородных уравнений Максвелла. Тогда векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{H}_2$ удовлетворяют вытекающим из уравнений Максвелла соотношениям

$$\varepsilon_1 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{I}{\mu_1} \nabla \times \mathbf{E}_1 = 0,$$

$$\mu_2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}_2}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{I}{\varepsilon_2} \nabla \times \mathbf{H}_1 = 0.$$

Здесь и в дальнейшем при перемножении векторов знак $\times$ обозначает операцию векторного, а знак $\cdot$ — скалярного произведения, как это принято в векторном анализе.

Умножим первое уравнение векторно на $\mu_1\mathbf{H}_2$, второе — на $\varepsilon_2\mathbf{E}_1$ и сложим полученные соотношения друг с другом. Проекция результата на ось z, определяемая путем его скалярного произведения с единичным вектором z_0, имеет вид

$$\left(\varepsilon_2\mu_2\mathbf{E}_1 \times \frac{\partial^2\mathbf{H}_2}{\partial t^2} - \varepsilon_1\mu_1 \frac{\partial^2\mathbf{E}_1}{\partial t^2} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_1 \times \frac{\partial^2\mathbf{H}_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\mathbf{E}_1}{\partial z^2} \times \mathbf{H}_2\right)\mathbf{z}_0$$

$$-\nabla_\perp \cdot \left(\varepsilon_2 \frac{\partial E_{z2}}{\partial t}\mathbf{E}_{\perp 1} - \mu_1 \frac{\partial H_{z1}}{\partial t}\mathbf{H}_{\perp 2}\right) - \mathbf{z}_0 \cdot \nabla_\perp \times \left(\frac{\partial E_{z1}}{\partial z}\mathbf{H}_{\perp 2} + \frac{\partial H_{z2}}{\partial z}\mathbf{E}_{\perp 1}\right) +$$

$$+\varepsilon_1 \frac{\partial E_{z2}}{\partial t}\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \mu_2 \frac{\partial H_{z1}}{\partial t}\mathbf{H}_2 \cdot \nabla \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z}\mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} + \frac{\partial \mu_1}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} \cdot \mathbf{H}_2 = 0,$$

где с помощью индексов z и $\perp$ обозначены соответственно продольные и поперечные компоненты полей.

Если ось z совпадает с продольной осью волновода, то $\partial\varepsilon_{1,2}/\partial z=0$, $\partial\mu_{1,2}/\partial z=0$. Тогда, считая что $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{H}_2$ описывают поле собственной волны волновода, т. е., полагая $\partial/\partial t=i\omega_{1,2}$, $\partial/\partial z=-i\gamma_{1,2}$, после интегрирования последнего соотношения по расположенной перпендикулярно z поверхности S, ограниченной контуром L, получаем

$$(\gamma_2^2-\gamma_1^2)\int_S [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2]\cdot \mathbf{z}_0 dS = \omega_2^2 \int_S \varepsilon_2\mu_2 [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2]\cdot \mathbf{z}_0 dS - \omega_1^2 \int_S \varepsilon_1\mu_1 [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2]\cdot \mathbf{z}_0 dS -$$

$$- i\oint_L (\omega_1\mu_1 H_{z1}H_{n2} - \omega_2\varepsilon_2 E_{z2}E_{n1} + \gamma_1 E_{z1}H_{\tau 2} + \gamma_2 H_{z2}E_{\tau 1})\, dL -$$

$$- i\int_S \left(\omega_2\varepsilon_1 \mathbf{E}_{z2} E_1 \cdot \nabla \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \omega_1\mu_2 H_{z1}\mathbf{H}_2 \cdot \nabla \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) dS, \qquad (16)$$

где индексами n и τ обозначены нормальная и касательная к контуру L компоненты полей.

Пусть S является сечением регулярного волновода, боковые стенки которого представляют собой импедансную поверхность с выполняемыми на ней граничными условиями $E_{\tau 1,2}=Z_{1,2}H_{z1,2}$, $E_{z1,2}=-Z_{1,2}H_{\tau 1,2}$, и, кроме того, на ограничивающем S контуре L справедливы $\nabla\varepsilon_{1,2}=0$, $\nabla\mu_{1,2}=0$. Тогда

$$i\oint_L (\omega_1\mu_1 H_{z1}H_{n2} - \omega_2\varepsilon_2 E_{z2}E_{n1} + \gamma_1 E_{z1}H_{\tau 2} + \gamma_2 H_{z2}E_{\tau 1})\, dL =$$

$$=\oint_L \left(i\left(Z_2\omega_2\varepsilon_2 - Z_1\omega_1\varepsilon_1\right) H_{\tau 2} E_{n1} + \left(Z_1 - Z_2 \frac{\omega_1\mu_1}{\omega_2\mu_2} \right) H_{z1} \frac{\partial H_{n2}}{\partial \mathbf{n}} \right) dL =$$

$$=\oint_L \left(i\left(Y_1\omega_1\mu_1 - Y_2\omega_2\mu_2\right) E_{\tau 1} H_{n2} + \left(Y_1 \frac{\omega_2\varepsilon_2}{\omega_1\varepsilon_1} - Y_2 \right) E_{z2} \frac{\partial E_{n1}}{\partial \mathbf{n}} \right) dL,$$

$$Y_{1,2} = I/Z_{1,2}$$

и (16) можно записать в следующем виде, называемом обобщенным соотношением ортогональности,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot D_\lambda [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = (x_1 - x_2) \cdot D_x [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2],$$

где для λ, $x \equiv \gamma^2$, $\Delta = \gamma_2^2 - \gamma_1^2$

$$D_{\gamma^2} [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \int_S [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] \cdot \mathbf{z}_0 dS,$$

для λ, $x \equiv \omega^2$, $\Delta = \omega_2^2 - \omega_1^2$, $|\Delta| \ll |\omega_{1,2}^2|$

$$D_{\omega^2} [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \int_S \varepsilon\mu [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] \cdot \mathbf{z}_0 dS - \frac{Z}{\omega_1 + \omega_2} \oint_L \left(i\varepsilon H_{\tau 2} E_{n1} + \frac{I}{\omega_2} H_{z1} \frac{\partial H_{n2}}{\partial \mathbf{n}} \right) dL$$

или

$$D_{\omega^2} [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \int_S \varepsilon\mu [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] \cdot \mathbf{z}_0 dS + \frac{Y}{\omega_1 + \omega_2} \oint_L \left(i\mu E_{\tau 1} H_{n2} + \frac{I}{\omega_1} E_{z2} \frac{\partial E_{n1}}{\partial \mathbf{n}} \right) dL,$$

для λ, $x \equiv \varepsilon$, $\Delta \cdot \delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ (при $\varepsilon \not\equiv \delta\varepsilon$ ε может использоваться только в качестве независимого параметра)

$$D_\varepsilon [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \int_S \delta\varepsilon\mu [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] \cdot \mathbf{z}_0 dS - i\omega \int_S \varepsilon_1 E_{z2} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_1} dS,$$

для λ, $x \equiv \mu$, $\Delta \cdot \delta\mu = \mu_2 - \mu_1$ (при $\mu \not\equiv \delta\mu$ μ может использоваться только в качестве независимого параметра)

$$D_\mu [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \int_S \varepsilon\delta\mu [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2] \cdot \mathbf{z}_0 dS - i\omega \int_S \mu_2 H_{z1} \mathbf{H}_2 \cdot \nabla \frac{\delta\mu}{\mu_2} dS,$$

для λ, $x \equiv Z$, $\Delta = Z_2 - Z_1$

$$D_Z [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \oint_L \left(H_{z1} \frac{\partial H_{n2}}{\partial \mathbf{n}} - i\omega\varepsilon H_{\tau 2} E_{n1} \right) dL,$$

для λ, $x \equiv Y$, $\Delta = Y_2 - Y_1$

$$D_Y [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \oint_L \left(i\omega\mu E_{\tau 1} H_{n2} + E_{z2} \frac{\partial E_{n1}}{\partial \mathbf{n}} \right) dL,$$

для λ, $x \equiv S$ (см. рисунок)

$$D_S [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \oint_L \left(\frac{\partial^2 E_{n1}}{\partial \mathbf{n}^2} H_{\tau 2} - \frac{\partial^2 E_{\tau 1}}{\partial \mathbf{n}^2} H_{n2} + \frac{\partial E_{\tau 1}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial H_{n2}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial E_{n1}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial H_{\tau 2}}{\partial \mathbf{n}} \right) dL.$$

Список литературы

[1] *Зильберглейт А. С., Копилевич Ю. И.* Спектральная теория регулярных волноводов. Л., 1983. 302 с.

[2] *Зильберглейт А. С., Копилевич Ю. И.* Препринт ФТИ. № 660. Л., 1980. 57 с.

[3] *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. 416 с.

[4] *Рисс Ф., Надь Б. С.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

[5] Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.
[6] *Краснушкин П. Е., Федоров Е. Н.* // РиЭ. 1972. Т. 17. № 6. С. 1129—1140.
[7] *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т. 1. 548 с.
[8] *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.
[9] *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
[10] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
[11] *Гуреев А. В.* // РиЭ. 1985. Т. 30. № 6. С. 1058—1062.
[12] *Гуреев А. В.* // Радиотехника. 1987. Т. 33. № 9. С. 59—61.

Московский институт электронной техники

Поступило в Редакцию
27 ноября 1990 г.