03

УСТОЙЧИВОСТЬ КАПЛИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

С. О. Ширяева, А. И. Григорьев, Е. И. Мухина

Введение

Задача расчета равновесной формы и определения критических условий неустойчивости капли реальной жидкости в электропроводной среде во внешнем электрическом поле представляет значительный интерес в связи с целым рядом приложений в физике, геофизике, технике — от масс-спектрометрии термически нестабильных и нелетучих органических соединений и подпитки жидким водородом установок для термоядерного синтеза до грозового электричества, проблем пробоя жидких диэлектриков и каплеструйной печати (см., например, [1-3] и указанную там литературу).

В этой связи данная задача в различных ее предельных частных случаях неоднократно рассматривалась [4-6], тем не менее полного ее решения, учитывающего изменение в широких пределах диэлектрических проницаемостей и электропроводностей капли и среды, пока не найдено. Этому вопросу и посвящена данная работа.

1. Пусть первоначально сферическая капля радиуса R идеальной несжимаемой жидкости, имеющая плотность ρ, проводимость λ_1 и диэлектрическую проницаемость ε_1, окружена заполняющей все пространство идеальной несжимаемой средой с проводимостью λ_2 и диэлектрической проницаемостью ε_2, в которой создано однородное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0$.

Примем, что равновесная форма капли во внешнем однородном электростатическом поле непроводящей среды близка к сфероиду с эксцентриситетом e, вытянутому вдоль поля [4-6], и будем решать в сферической системе координат, связанной с центром капли, задачу об определении равновесной формы капли, когда в среде течет стационарный ток (так как λ_1 и λ_2 отличны от нуля). Равновесная форма капли $r=r(\theta)$ будет определяться из условия баланса давлений на ее поверхности

$$p_\sigma = (p_1 - p_2) + p_E \tag{1}$$

на основе решения системы уравнений Лапласа

$$\Delta\Phi_i = 0 \quad (i=1;\ 2) \tag{2}$$

с граничными условиями

$$r \to 0;\quad \Phi_1 = \mathrm{const},$$

$$r = r(\theta):\ \Phi_1 = \Phi_2, \tag{3}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}, \tag{4}$$

где Φ_1 и Φ_2 — потенциалы электростатического поля внутри и снаружи капли, p_σ — лапласовское давление на поверхности раздела, p_E — давление электрического поля, p_1 и p_2 — постоянные давления в капле и окружающей среде при наличии электрического поля, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности капли.

Считая, что отклонение формы капли от сферической мало ($e^2 \ll 1$), будем искать форму поверхности в линейном по e^2 приближении в наиболее общем осесимметричном виде разложения в ряд по полиномам Лежандра

$$r(\theta) = R + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta) \equiv R + f(\theta). \tag{5}$$

Амплитуды различных мод a_n определим из условия баланса давлений на поверхности капли (1).

Чтобы записать выражение для давления электрического поля p_E, входящее в (1), удобно воспользоваться аналогией уравнений стационарного тока (2)—(4) с соответствующей электростатической задачей для случая двух непроводящих диэлектрических сред [4], решение которой хорошо известно [7]. Постоянные давления p_1 и p_2 определятся из уравнений Эйлера для двух однородных изотропных сред в условиях отсутствия свободных зарядов. В результате правую часть уравнения (1) можно записать в виде

$$(p_1 - p_2) + p_E = (p_{01} - p_{02}) + \frac{\varepsilon_2}{8\pi}\left[H E_{2n}^2 + (1+\varkappa) E_1^2\right], \tag{6}$$

где

$$H \equiv 1 + \frac{1}{\alpha^2}(1 - 2\varkappa), \quad \varkappa \equiv \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \alpha \equiv \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Здесь p_{01} и p_{02} — постоянные давления в капле и окружающей среде в отсутствие электрического поля, E_{2n} — нормальная к сфероидальной поверхности раздела компонента напряженности электрического поля в среде, E_1 — напряженность электрического поля в капле. Выражение для Лапласовского давления под искаженной сферической поверхностью в приближении $f(\theta) \ll R$ в виде разложения по полиномам Лежандра хорошо известно [8]. Раскладывая выражение (6) по полиномам же Лежандра (с точностью до членов $\sim e^2$), подставляя затем выражения для p_σ и (6) в условие баланса давлений на границе раздела сред и приравнивая коэффициенты при полиномах Лежандра одинакового порядка, найдем неизвестные амплитуды a_n в выражении для равновесной формы капли (5)

$$\frac{a_0}{R} \approx -\frac{1}{45}\left[\frac{9}{16\pi} w^2 \frac{\alpha^2 H}{(2+\alpha)^2}\right]^2,$$

$$\frac{a_2}{R} \approx \frac{9}{16\pi} w^2 \frac{\alpha^2 H}{(2+\alpha)^2}\left[\frac{1}{3} - e^2\left(\frac{2}{21} + \frac{4}{15}\frac{(1-\alpha)}{(2+\alpha)}\right)\right],$$

$$\frac{a_4}{R} \approx \frac{9}{16\pi} w^2 \frac{\alpha^2 H}{(2+\alpha)^2}\frac{16}{315} e^2. \tag{7}$$

Здесь $w^2 \equiv \varepsilon_2 E_0^2 R \sigma^{-1}$ — параметр Тейлора. Из сравнения полученного выражения для равновесной поверхности капли (5) с коэффициентами (7) с разложением уравнения сфероида по полиномам Лежандра (с точностью до членов $\sim e^4$) видно, что с точностью до членов $\sim e^2$ равновесная форма капли будет сфероидальной. Причем выражение, связывающее эксцентриситет равновесного сфероида с физическими характеристиками системы E_0, σ, ε_i, λ_i, R ($i = 1, 2$), имеет вид

$$e^2 \simeq \frac{9}{16\pi} w^2 \alpha^2 H (2+\alpha)^{-2}. \tag{8}$$

2. Исследуем найденную равновесную форму на устойчивость. Для этого, учитывая, что неустойчивость капли в поле начинается с неустойчивости именно второй моды ($\sim p_2(\cos\theta)$), примем, что по отношению к равновесной сферической поверхности задано виртуальное возмущение вида $\xi_0 P_2(\cos\theta)$. Уравнение новой равновесной поверхности, установившейся в результате взаимодействия указанного возмущения с электрическим полем и током, будем вновь искать в виде разложения по полиномам Лежандра

$$r = r(\theta) + f(\theta) = r(\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta). \tag{9}$$

Для нахождения $f(\theta)$ получим систему уравнений, аналогичную системе (1)—(4),

$$\Delta\delta\Phi_i = 0 \quad (i = 1;\ 2)$$

с граничными условиями на поверхности капли

$$\delta\Phi_1 = \delta\Phi_2,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial(\delta\Phi_1)}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial(\delta\Phi_2)}{\partial n},$$

$$\delta p_\sigma = \delta p + \delta p_E. \tag{10}$$

Здесь $\delta\Phi_i$, δp_E, δp_σ — малые добавки к соответствующим величинам, появившиеся из-за возмущения поверхности $\xi_0 P_2(\cos\theta)$; δp — малое изменение постоянного давления внутри капли. Чтобы найти добавку δp_E к давлению электрического поля на поверхности капли, учтем, что возмущение поверхности $\xi(\theta) = \xi_0 P_2(\cos\theta)$ соответствует увеличению эксцентриситета сфероида $e^2 \to e_0^2 = e^2 + \delta e^2$, где $\delta e^2 \simeq 3\,(1-(7/6)\,e^2)\,\xi_0 R^{-1}$. Отсюда несложно найти изменения напряженности электрического поля внутри и вне капли, связанные с искажением сфероидальной формы (δE_{2n} и δE_1), а также соответствующую добавку к давлению поля

$$\delta p_E = \frac{\varepsilon_2}{4\pi}\,[H E_{2n}\delta E_{2n} + (1+\varkappa)\,E_1\delta E_1]. \tag{11}$$

Раскладывая (11) в ряд по полиномам Лежандра, подставляя выражения для δp_E и δp_σ, согласно [5], в условие баланса давлений (10), найдем равновесные амплитуды a_n в разложении (9). Выпишем здесь лишь выражение для амплитуды 2-й моды a_2, необходимое для дальнейшего анализа,

$$\frac{a_2}{R} \simeq w^2 F K_2 \frac{\xi_0}{R}, \tag{12}$$

где

$$F \equiv \frac{27}{4\pi}\,\frac{\alpha^2 H}{(2+\alpha)^2}; \quad K_2 \equiv S + e^2 G; \quad S \equiv \frac{2}{5}\left(\frac{3}{7} - \frac{2}{2+\alpha}\right);$$

$$G \equiv \frac{18}{49} + \frac{41}{63}\left(1 - \frac{42}{41}\,\eta\right)\delta - \frac{16}{35}\left(1 - \frac{7}{6}\,\delta\right)\mu; \quad \mu \equiv \frac{1-\alpha}{2+\alpha};$$

$$\delta \equiv \frac{3}{5}\left(1 + \frac{2}{2+\alpha}\right); \quad \eta \equiv \frac{7}{5} - \frac{6}{5}\,\frac{1}{(2+\alpha)} + \frac{2\,(1-\alpha)}{4+\alpha}.$$

Все последующие нечетные коэффициенты равны нулю, а четные отличны от нуля, но весьма малы и пропорциональны амплитуде возмущения второй моды $\xi_0 R^{-1}$. Условие $|a_{2n}| \ll |a_{2(n-1)}|$ выполняется для всех $n \geqslant 2$, и каждый последующий четный коэффициент примерно на порядок меньше предыдущего.

В итоге коэффициенты a_n определят амплитуды равновесных отклонений мод капиллярных волн от значений, характерных для сфероидальной формы капли, при исходном возмущении $\xi(\theta) = \xi_0 P_2(\cos\theta)$. Ясно, что амплитуда исходного возмущения $\xi(\theta)$ уменьшится, а форма капли будет стремиться к сфероидальной при $a_2 < \xi_0$ (более детальные рассуждения в [5]), что соответствует выполнению условия $w^2 F K_2 < 1$, или с учетом (8) получим условие устойчивости поверхности капли реальной жидкости во внешнем электрическом поле

$$w^2 < \frac{8\pi}{9}\,\frac{S}{G}\,\frac{(2+\alpha)^2}{\alpha^2 H}\left[\sqrt{1 + \frac{4}{3}\,\frac{\alpha}{(2+\alpha)}\,\frac{G}{S^2}} - 1\right]. \tag{13}$$

В предельном случае для идеально проводящей капли в вакууме, помещенной во внешнее однородное поле ($\lambda_1 \to \infty$; $\lambda_2 \to 0$; $\varepsilon_1 \to \infty$; $\varepsilon_2 \to 1$), из выражения (13) получим известное условие устойчивости $w^2 = E_0^2 R \sigma^{-1} < 2.63$, полу-

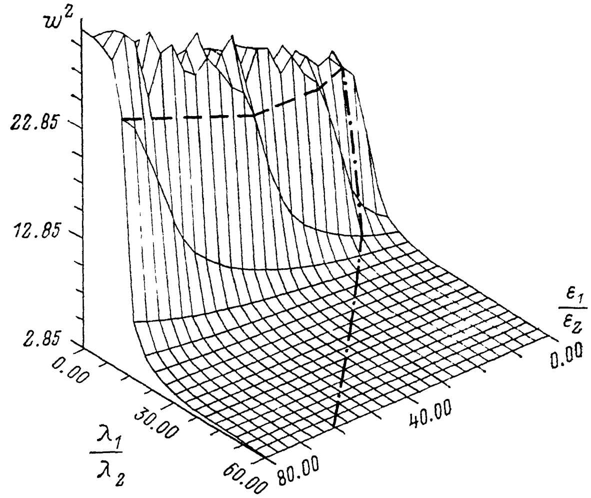

Рис. 1. Зависимость критического для развития неустойчивости значения параметра Тейлора от отношения диэлектрических проницаемостей и электропроводностей капли и среды.

ченное теоретически аналогичным методом в работе [5] и хорошо совпадающее с известными экспериментальными данными. В другом предельном случае при $\lambda_1/\lambda_2 \to \varepsilon_1/\varepsilon_2$ получим критическое условие развития неустойчивости

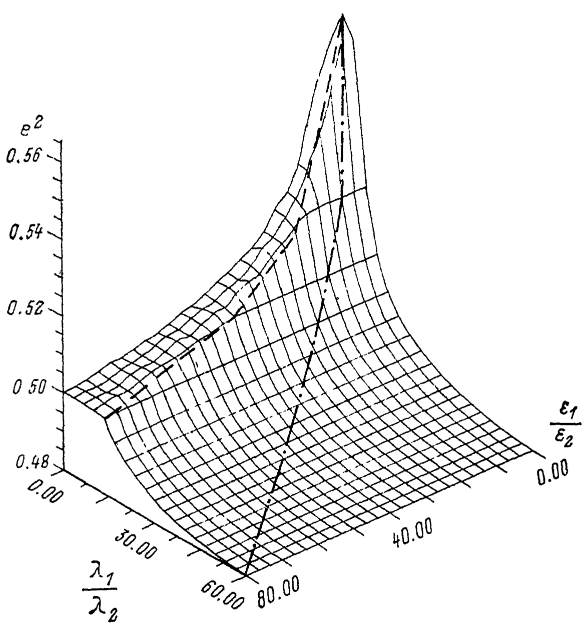

Рис. 2. Зависимость предельного значения квадрата эксцентриситета равновесной капли от отношения диэлектрических проницаемостей и электропроводностей капли и среды.

диэлектрической капли в однородном внешнем поле, совпадающее с условием, полученным численным образом в работе [6].

Из очевидного требования положительности величины e^2 и w^2, используя выражения (8) и (13), несложно получить в координатах $\lambda_1\lambda_2^{-1}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}$ область определения рассматриваемой задачи. На рис. 1, 2 представлены трехмерные графики поверхностей w^2 и e^2 в координатах $\lambda_1\lambda_2^{-1}$ и $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}$, на которых штриховой линией обозначена граница области определения задачи. Из этих рисунков наглядно видно, что с увеличением отношения $\lambda_1\lambda_2^{-1}$ при фиксированном $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}$ критическое значение параметра Тейлора w^2 и соответствующее ему значение квадрата равновесного эксцентриситета e^2 уменьшаются. Причем $w^2 \to \approx 2.63$, а $e^2 \to \approx 0.48$ при стремлении $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}$ и $\lambda_1\lambda_2^{-1}$ к бесконечности (т. е. при переходе к идеально проводящей капле в вакууме). Если же зафиксировать $\lambda_1\lambda_2^{-1}$, то с увеличением $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}$ критическое значение параметра w^2 растет, в то время как соответствующее значение e^2 от величины $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}$ не зависит, а определяется лишь отношением $\lambda_1\lambda_2^{-1}$. Штрихпунктир на рис. 1 и 2 соответствует частному случаю $\lambda_1\lambda_2^{-1} \to \varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}$ — задаче об устойчивости диэлектрической капли в электростатическом поле, помещенной в диэлектрическую среду (т. е. без учета проводимостей).

В заключение представляется целесообразным отметить, что задачи расчета равновесных форм и критических условий неустойчивости капель во внешних полях могут решаться и численными методами, как это, например, сделано в [9, 10].

Список литературы

[1] *Григорьев А. И., Сыщиков Ю. В., Ширяева С. О.* // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020—2026.
[2] *Золотой Н. Б., Карпов Г. В., Скурат В. Е.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 2. С. 315—323.
[3] *Woosley J. P., Turnbull R. J., Kim K.* // J. Appl. Phys. 1989. Vol. 21. P. 4278—4284.
[4] *O'Konski C. T., Harris F. E.* // J. Phys. Chem. 1957. Vol. 61. N 9. P. 1172—1174.
[5] *Григорьев А. И., Ширяева С. О., Белавина Е. И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27—34.
[6] *Григорьев А. И., Ширяева С. О.* // Сб. науч. тр. МЭИ. Исследование процессов и систем монодисперсного распада жидкости. 1986. № 119. С. 39—48.
[7] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1957. 532 с.
[8] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 734 с.
[9] *Basaran O. A., Scriven L. E.* // Phys. Fluids A. 1989. Vol. 1. N 5. P. 799—809.
[10] *Scherwood J. D.* // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 188. P. 133—146.

Ярославский университет

Поступило в Редакцию
10 октября 1990 г.
В окончательной редакции
6 февраля 1991 г.