05; 06

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТА ХОЛЛА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛЕНОК И МОНОКРИСТАЛЛОВ

Н. Н. Поляков

Рассмотрено распределение потенциала и плотности тока в анизотропных пленках и монокристаллах в электрическом и магнитном полях. Путем решения соответствующих краевых задач электродинамики получены формулы и соотношения, имеющие практическое значение для исследования электрофизических свойств анизотропных материалов электронной техники. Результаты работы представлены в виде, позволяющем использовать ЭВМ для обработки результатов исследований. Представлены данные экспериментальных испытаний, полученных в работе теоретических результатов.

Введение

Широкое применение анизотропных пленок и монокристаллов в различных областях электроники требует детальной разработки способов исследования их электрофизических свойств. Общие вопросы кинетических явлений в анизотропных полупроводниках подробно рассмотрены в работе [1], однако для практического исследования электрофизических характеристик анизотропных материалов необходимо знание особенностей распределения потенциала и плотности тока в конкретных образцах в зависимости от их форм, размеров и расположения контактов. Эти вопросы представляют интерес для моделирования электрофизических явлений в электронных приборах, в которых использованы анизотропные материалы.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о распределении потенциала электрического поля и плотности тока в анизотропных пленках и монокристаллах при исследованиях их электропроводимости и коэффициента Холла. На основе анализа соответствующих краевых задач даны практические рекомендации по определению компонент тензора электропроводимости и коэффициента Холла анизотропных материалов. Полученные результаты позволяют ускорить и облегчить исследование анизотропных материалов благодаря использованию ЭВМ. Представлены результаты экспериментальных испытаний расчетных формул на образцах арсенида цинка.

Рассмотрим первоначально задачу определения электропроводимости по схеме известного 4-зондового метода [2] (рис. 1, *а*). Пусть образец прямоугольной формы вырезан так, что его грани параллельны кристаллографическим плоскостям. Точечные контакты *1—4* расположены на плоскости $z=d$ на оси симметрии образца. При пропускании постоянного тока I_{12} через контакты *1*, *2* потенциал электрического поля φ (x, y, z) в области образца удовлетворяет краевой задаче [3]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\sigma_x}{\sigma_z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\sigma_y}{\sigma_z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=d}=\pm\frac{I_{12}}{\sigma_z}\delta\left[x-\left(\frac{a}{2}\mp\frac{s_1}{2}\right)\right]\cdot\delta(y-b/2),\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \tag{2}$$

$$(\partial\varphi/\partial x)_{x=0,\,a}=0,\quad (\partial\varphi/\partial y)_{y=0,\,b}=0, \tag{3}$$

где σ_x, σ_y, σ_z — компоненты диагонального тензора электропроводимости; a, b, d — длина, ширина, толщина образца; s_1 — расстояние между токовыми контактами; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Общее решение краевой задачи (1)—(3) представим в виде двойного ряда Фурье в комплексной форме [4]

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{k, n} Z_{kn}(z) \cdot \exp(i\alpha_k x) \cdot \exp(i\alpha_n y), \tag{4}$$

$$\alpha_k = \pi k/a, \quad \alpha_n = \pi n/b; \quad k, n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Подставляя (4) в уравнение (1) и освобождаясь от экспонент путем интегрирования, получаем уравнение для $Z(z)$

$$d^2 Z_{kn}/dz^2 + \beta^2_{kn} \cdot Z_{kn}(z) = 0, \tag{6}$$

$$\beta_{kn} = [(\sigma_x/\sigma_z) \cdot (\pi k/a)^2 + (\sigma_y/\sigma_z) \cdot (\pi n/b)^2]^{1/2}. \tag{7}$$

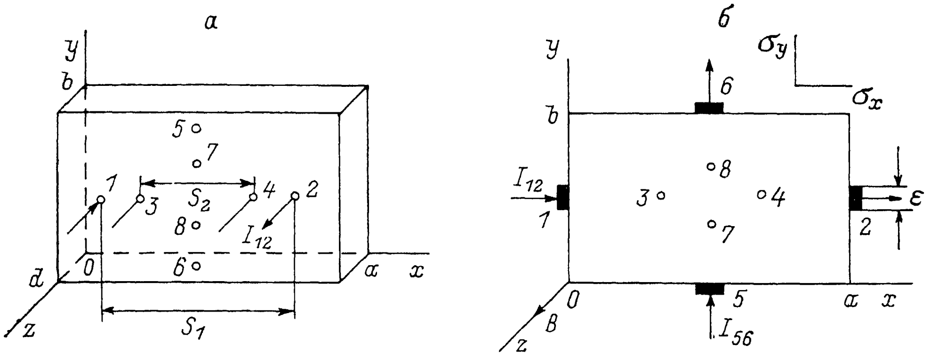

Рис. 1. Схемы расположения контактов при исследованиях электропроводимости и коэффициента Холла анизотропных образцов.

Решение уравнения (6) имеет вид

$$Z_{kn}(z) = A_{kn} \cdot \operatorname{sh}(\beta_{kn} z) + B_{kn} \cdot \operatorname{ch}(\beta_{kn} z), \tag{8}$$

в котором коэффициенты A_{kn} и B_{kn} определяются из граничных условий (2). Окончательно для действительной части ряда (4), которая имеет смысл потенциала электрического поля в области образца, получаем выражение

$$\varphi(x, y, z) = \frac{8 I_{12}}{\sigma_z \cdot ab} \sum_{k, n} \theta_n (-1)^{(k+n-1)/2} \frac{\operatorname{ch}(\beta_{kn} z)}{\beta_{kn} \cdot \operatorname{sh}(\beta_{kn} d)} \times$$
$$\times \sin(\alpha_k s_1/2) \cdot \cos(\alpha_k x) \cdot \cos(\alpha_n y), \tag{9}$$

$$\theta_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при } n = 0; \\ 1 & \text{при } n \neq 0; \end{cases} \quad k = 1, 3, 5, \ldots; \; n = 0, 2, 4, \ldots . \tag{10}$$

Из (9) находим разность потенциалов между точками *3*, *4* на грани $z=d$ с координатами $y_3 = y_4 = b/2$, $x_3 = a/2 - s_2/2$, $x_4 = a/2 + s_2/2$

$$U_{34} = \frac{I_{12} \cdot a}{\sigma_x \cdot bd} L, \tag{11}$$

$$L = \frac{16d}{a^2} \frac{\sigma_x}{\sigma_z} \sum_{k, n} \theta_n \cdot (1/\beta_{kn}) \cdot \operatorname{cth}(\beta_{kn} d) \cdot \sin(\alpha_k s_1/2) \cdot \sin(\alpha_k s_2/2). \tag{12}$$

Так как при практических измерениях зонды располагают обычно на одинаковом расстоянии s друг от друга, то в дальнейшем будем считать $s_2 = s$, $s_1 = 3s$.

1. Определение компонент тензора электропроводимости

Из выражения (12) видно, что компоненты тензора электропроводимости весьма сложным образом входят в ряд Фурье и раздельное их определение не представляется возможным. Однако задача измерения их значительно упрощается для тонких образцов при условии

$$d \ll (s,\ a,\ b). \tag{13}$$

При этом условии в выражении (12) можно сделать приближения

$$\mathrm{ch}\,(\beta_{kn} d) \cong 1, \quad \mathrm{sh}\,(\beta_{kn} d) \cong \beta_{kn} d, \tag{14}$$

которые позволяют выполнить суммирование ряда (12) по k при помощи таблиц [5]. В результате этих преобразований получаем соотношения, которые имеют практическое значение

$$U_{34} = \frac{I_{12} \cdot a}{\sigma_x \cdot bd} L_1, \tag{15}$$

$$L_1 = \frac{s}{a} + 2 \sum_n \frac{\mathrm{ch}\,[\gamma\pi n\,(a-s)/b] - \mathrm{ch}\,(\gamma\pi ns/b) + \mathrm{ch}\,(\gamma\pi n 2s/b) - \mathrm{ch}\,[\gamma\pi n\,(a-2s)/b]}{(\gamma\pi na/b) \cdot \mathrm{sh}\,(\gamma\pi na/b)}, \tag{16}$$

$$\gamma = (\sigma_y/\sigma_x)^{1/2}; \quad n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots . \tag{17}$$

Из (16) видно, что множитель L_1 определяется размерами образца, расстоянием между контактами s и параметром анизотропии γ. Параметр анизотропии γ легко найти, если произвести второе измерение напряжения U_{78} при токе I_{56}, когда контакты расположены по вертикальной оси симметрии образца

$$U_{78} = \frac{I_{56} \cdot b}{\sigma_y \cdot ad} L_2, \tag{18}$$

$$L_2 = \frac{s}{a} + 2 \sum_n \frac{\mathrm{ch}\,[\pi n\,(b-s)/(\gamma a)] - \mathrm{ch}\,[\pi ns/(\gamma a)] + \mathrm{ch}\,[2\pi ns/(\gamma a)] - \mathrm{ch}\,[\pi n\,(b-2s)/(\gamma a)]}{[\pi nb/(\gamma a)] \cdot \mathrm{sh}\,[\pi nb/(\gamma a)]}. \tag{19}$$

Отношение измеряемых напряжений при равенстве токов $I_{12} = I_{56}$ зависит от параметра анизотропии γ

$$\frac{U_{34}}{U_{78}} = \left(\frac{\gamma a}{b}\right)^2 \frac{L_1}{L_2} = Q\,(\gamma,\ a/b,\ s/b). \tag{20}$$

Значения множителей L_1, L_2 и отношения Q легко могут быть вычислены на ЭВМ в зависимости от γ для конкретных исследуемых образцов. В качестве примера в табл. 1 представлены значения величин L_1, L_2 и Q в зависимости от γ при $s = b/5$ и квадратных образцов ($a = b = 1$). Для определения компонент σ_x и σ_y, тензора электропроводимости достаточно измерить U_{34} и U_{78} при одинаковых значениях тока $I = I_{12} = I_{56}$. Отношение измеренных значений напряжений $U_{34}/U_{78} = Q$ позволяет по табл. 1 найти γ, L_1 и L_2, что в свою очередь позволяет по формулам (15) и (18) вычислить σ_x и σ_y.

Таблица 1.

Q	γ	L_1	L_2	Q	γ	L_1	L_2
1.652	2	0.212	0.515	1.0	1.0	0.285	0.285
1.520	1.8	0.218	0.465	0.861	0.8	0.336	0.250
1.395	1.6	0.225	0.416	0.70	0.6	0.432	0.222
1.267	1.4	0.237	0.370	0.50	0.4	0.641	0.205
1.13	1.2	0.255	0.325	0.256	0.2	1.280	0.20

Примечание. $a = b$, $s = b/5$.

Следует отметить, что изготовление токовых контактов на плоской грани образца не всегда желательно, так как прижимные металлические зонды могут повредить поверхность кристалла, а впаянные контакты трудно сошлифовывать с плоской поверхности. Гораздо проще контакты *1*, *2* и *5*, *6* расположить по периметру образца (рис. 1, *б*) ($y_1=y_2=b/2, x_5=x_6=a/2$). Токовыми электродами в этом случае могут быть, например, впаянные оловянные контакты шириной ε, потенциальными — прижимные зонды. При измерениях σ по схеме на рис. 1, *б*, когда $x_3=a/3$, $x_4=2a/3$, $y_3=y_4=b/2$, $x_7=x_8=a/2$, $y_7=b/3$, $y_8=2b/3$, выражения (15)—(19) принимают вид

$$U_{34}=\frac{I_{12}\cdot a}{\sigma_x\cdot bd}L_3, \tag{21}$$

$$L_3=\frac{1}{3}+4\sum_{n=2,\,4,\,\ldots}\frac{\operatorname{ch}(2\gamma\pi na/3b)-\operatorname{ch}(\gamma\pi na/3b)}{(\gamma\pi na/b)\cdot\operatorname{sh}(\gamma\pi na/b)}\,\frac{\sin(\pi n\varepsilon/2b)}{(\pi n\varepsilon/2b)}; \tag{22}$$

$$U_{78}=\frac{I_{56}\cdot b}{\sigma_y\cdot ad}L_4, \tag{23}$$

$$L_4=\frac{1}{3}+4\sum_{n=2,\,4,\,\ldots}\frac{\operatorname{ch}[2\pi nb/(3\gamma a)]-\operatorname{ch}[\pi nb/(3\gamma a)]}{[\pi nb/(\gamma a)]\cdot\operatorname{sh}[\pi nb/(\gamma a)]}\,\frac{\sin(\pi n\varepsilon/2a)}{(\pi n\varepsilon/2a)}. \tag{24}$$

Так как размер контактных площадок ε практически измерять затруднительно, то целесообразно принять приближение точечных контактов

$$\varepsilon\ll(a,\ b). \tag{25}$$

В этом приближении в (22), (24) можно полагать

$$\left[\frac{\sin(\pi n\varepsilon/2b)}{\pi n\varepsilon/2b}\right]_{\varepsilon\to 0}=\left[\frac{\sin(\pi n\varepsilon/2a)}{\pi n\varepsilon/2a}\right]_{\varepsilon\to 0}=1. \tag{26}$$

Из (21)—(24) следует, что в приближении точечных контактов (25) величины L_3, L_4 и U_{34}/U_{78} при $I_{12}=I_{56}$ зависят лишь от $\gamma a/b$

$$U_{34}/U_{78}=(\gamma a/b)\cdot(L_3/L_4)=Q_1. \tag{27}$$

Значения множителей L_3, L_4 и величины Q_1 в зависимости от $\gamma a/b$ для точечных контактов легко могут быть вычислены на ЭВМ, ряд значений этих величин представлен в табл. 2. Измерив экспериментально U_{34} и U_{78} при одинаковых токах $I_{12}=I_{56}$, можно по величине отношения U_{34}/U_{78} при помощи табл. 2 найти $\gamma a/b$, L_3 и L_4. Затем из формул (21), (23) вычисляются компоненты тензора электропроводимости σ_x, σ_y.

Таблица 2

Q_1	$\gamma a/b$	L_3	L_4	Q_1	$\gamma a/b$	L_3	L_4
9.57	10	0.333	3.493	1.92	2	0.338	0.704
7.63	8	0.333	2.795	1.0	1	0.407	0.407
5.72	6	0.333	2.097	0.813	0.8	0.469	0.369
3.81	4	0.333	1.398	0.620	0.6	0.594	0.345
2.86	3	0.333	1.049	0.418	0.4	0.875	0.335

2. Оценка приближений тонких образцов и точечных контактов

Для практического использования выражений (15)—(19) необходимо знать, при каких значениях d/s образцы можно считать тонкими с погрешностью, меньшей погрешности измерительной аппаратуры. В соответствии с этим на рис. 2, *а* представлены графики зависимости множителя L от отношения d/s, построенные на ЭВМ по выражению (12) для квадратных образцов при одинаковом расстоянии между контактами $s=s_2=s_1/3$. Видно, что при $d < 0.3\ s$ величина множителя L практически не зависит от d. Следовательно, при $d < 0.3s$ образцы можно считать тонкими и с относительной погрешностью менее 1 % принять условия (13), (14). Действительно, при $d < 0.3s$ имеем $L=\text{const}$, и согласно (11) измеряемое напряжение U_{34} увеличивается линейно с уменьшением толщины d. Это означает, что линии вектора плотности тока в области образца между потенциальными контактами однородно распределены по толщине образца. В этом и заключается физический смысл приближения тонких образцов, которое допускает раздельное определение компонент электропроводимости σ_x, σ_y. Графики рис. 2, *а* также показывают, что условие применимости приближения тонких образцов зависит от отношений σ_x/σ_z и σ_y/σ_z. В частности, при $\sigma_x/\sigma_z=\sigma_y/\sigma_z=0.7$ кривая $L\ (d/s)$ становится менее крутой по

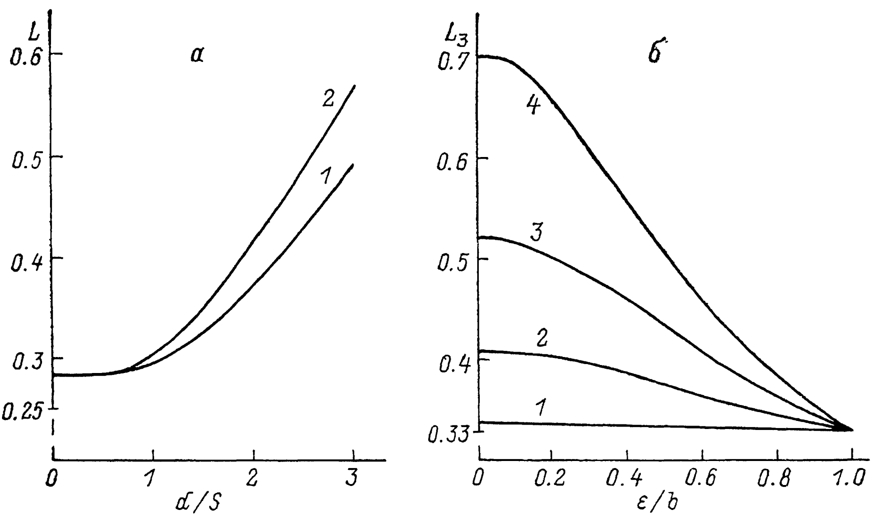

Рис. 2.

а — зависимость множителя L от относительной толщины образца d/s при $s=s_2=s_1/3$, $a=b=5s$, $\sigma_x/\sigma_z=\sigma_y/\sigma_z=0.7$ (*1*), 1 (*2*); *б* — зависимость множителя L_3 от относительной ширины контактов ε/b при $\gamma a/b=2$ (*1*), 1 (*2*), 07 (*3*), 0.5 (*4*).

сравнению с изотропным образцом. Соответственно толщина, при которой образец можно считать тонким с относительной погрешностью менее 1 %, определяется неравенством $d < 0.4s$.

Следует отметить, что при расположении токовых контактов по периметру образца по всей его толщине (рис. 1, *б*) условие (13) не играет роли, поскольку в этом случае рассматривается двумерное распределение линий плотности тока в образце. Следовательно, выражения (21)—(24) и (27) справедливы как для пленок, так и для монокристаллов, толщина d которых сравнима с их шириной b и длиной a.

При измерениях электропроводимости по схеме рис. 1, *б* принято приближение точечных контактов (25), (26). Для оценки границ применимости этого приближения на рис. 2, *б* представлены графики зависимости величины L_3 от относительной ширины контактов ε/b, построенные путем расчетов на ЭВМ по выражению (22) для некоторых значений $\gamma a/b$. Из графиков следует, что при $\varepsilon/b < 0.1$ контакты можно считать точечными с относительной погрешностью менее 1 %. Действительно, при $\varepsilon < 0.1\ b$ величина множителя L_3, а следовательно, измеряемое напряжение U_{34} практически не зависят от ширины контактов ε. Это означает, что распределение линий плотности тока в образце при $\varepsilon < 0.1\ b$ практически такое же, как и для точечных контактов.

Соотношения (12), (22) легко позволяют при помощи ЭВМ оценить погрешности, вносимые приближениями тонких образцов и точечных контактов для других интересующих значений d/s и ε/b.

3. Определение коэффициента Холла

Определение электропроводимости по схеме рис. 1, *б* с точечными контактами позволяет производить измерения эдс Холла в поперечном внешнем магнитном поле. Тензор электропроводимости в магнитном поле имеет вид [3]

$$\sigma_H = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x\sigma_y R_z B \\ -\sigma_x\sigma_y R_z B & \sigma_y \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Вывод расчетных формул, позволяющих вычислить коэффициент Холла R_z по результатам измерений эдс Холла, можно получить путем решения со-

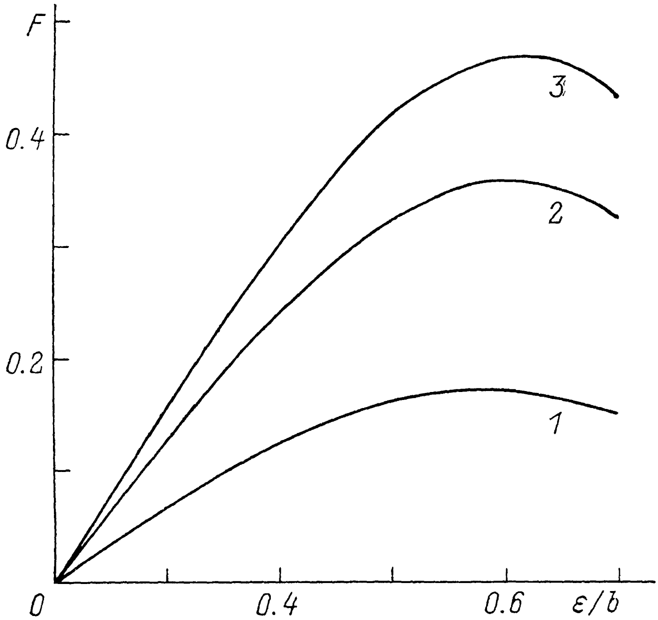

Рис. 3. Зависимость величины F от относительной ширины токовых контактов ε/b. $\gamma a/b = 1.5$ (*1*), 1 (*2*), 0.8 (*3*).

ответствующей краевой задачи для потенциала электрического поля. При пропускании постоянного тока I_{12} через контакты *1*, *2* в поперечном магнитном поле по схеме рис. 1, *б* потенциал φ (x, y) электрического поля в области исследуемого образца удовлетворяет краевой задаче [3]

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{29}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sigma_y R_z B\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{x=0,\,a} = \begin{cases} -I_{12}/(\sigma_x \varepsilon d) & \text{при } (b/2+\varepsilon/2) \geqslant y \geqslant (b/2-\varepsilon/2), \\ 0 & \text{в остальной области,} \end{cases} \tag{30}$$

$$(\partial\varphi/\partial y - \sigma_x \cdot R_z B \cdot \partial\varphi/\partial x)_{y=0,\,b} = 0, \tag{31}$$

где R_z — компонента тензора коэффициента Холла при условии, что линии тока распределены в образце параллельно плоскости xoy, а магнитное поле индукцией B направлено вдоль оси z.

Решение краевой задачи (29)—(31) методом Фурье дает для эдс Холла между точечными контактами *5*, *6* ($x_5 = x_6 = a/2$, $y_5 = 0$, $y_6 = b$) следующее выражение:

$$\mathscr{E}_{56} = \frac{I_{12} \cdot R_z B}{d}(1 - F), \tag{32}$$

$$F = \frac{2\varepsilon}{b} \sum_{n=1,\,2,\,\ldots} (-1)^{n+1} \frac{\sin^2(\alpha_n \varepsilon/2)}{(\alpha_n \varepsilon/2)^2 \cdot \operatorname{ch}(\alpha_n \gamma a/2)}, \tag{33}$$

где величины α_n и γ определяются соответственно (5) и (17).

Величина F учитывает шунтирующее влияние токовых электродов на эдс Холла [6], поскольку вывод формулы (32) произведен при условии эквипотенциальности контактных поверхностей под металлическими электродами. На рис. 3 представлена зависимость величины F от относительной ширины токовых контактов ε/b для некоторых значений $\gamma a/b$. Из рисунка следует, что при $\varepsilon < 0.1b$ величиной F в выражении (32) можно пренебречь по сравнению с единицей с погрешностью менее 1 % и коэффициент Холла вычислять по формуле

$$R_z = \mathscr{E}_{56} \cdot d/(I_{12} \cdot B). \tag{34}$$

Таким образом, при определении коэффициента Холла выполнение условия $\varepsilon < 0.1\, b$ означает, что контакты являются точечными по отношению к холловскому полю и их шунтирующим действием на эдс Холла можно пренебрегать. В отличие от изотропных образцов в анизотропных материалах шунтирующее действие токовых электродов на эдс Холла зависит от параметра анизотропии γ.

4. Результаты экспериментальных испытаний

Экспериментальные испытания предложенных формул и соотношений проведены на монокристаллах арсенида цинка $ZnAs_2$, полученных методом направленной кристаллизации. Из монокристаллов вырезались ориентированные образцы: на рис. 1 плоскости xoy соответствует кристаллографическая плоскость (100), осям ox и oy соответствуют направления [010] и [001]. Измерения электропроводимости из эдс Холла производились по схеме рис. 1, *б* для образцов с размерами $a=7$ мм, $b=6$ мм, $d=0.4$ мм. Токовыми электродами служили впаянные оловянные контакты, потенциальными — прижимные вольфрамовые зонды. В качестве источника использовался стабилизированный источник питания Б5-44, разность потенциалов между потенциальными зондами измерялась В2-34. Измерения эдс Холла производились в магнитном поле, индукция которого могла плавно изменяться от нуля до 1.5 Тл. По результатам данных измерений были вычислены параметр анизотропии γ по формуле (27), компоненты тензора электропроводимости σ_x, σ_y по формулам (21), (23), компонента тензора коэффициента Холла (34). Достигнутая относительная погрешность измерений σ_x, σ_y, R_z не превышала 7 %. Наибольший вклад в эту погрешность дает неточное установление потенциальных прижимных зондов. Для уменьшения этой погрешности установка зондов производилась под микроскопом МБС-10. Затем из этих же монокристаллов вырезались контрольные образцы при $a \gg b$ либо вдоль направления $0x$, либо вдоль направления $0y$. К торцам контрольных образцов впаивались оловянные токовые контакты, что обеспечивало однородное распределение плотности тока и потенциала по сечению контрольных образцов. При этом условии компоненты тензора электропроводимости σ_x и σ_y определялись на контрольных образцах двухзондовым методом [2]. Относительная погрешность определения σ_x и σ_y на контрольных образцах не превышала 5 %. Получено совпадение результатов измерений величин γ, σ_x, σ_y, R_z на исследуемых и контрольных образцах в пределах погрешности измерительной аппаратуры. В качестве примера приведем один из результатов измерений: для исследуемого образца $\sigma_x=5.15$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$, $\sigma_y=0.42$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$, $\gamma=0.28$; для контрольных образцов $\sigma_x=4.95$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$, $\sigma_y=0.41$ Ом$^{-1}\cdot$м$^{-1}$, $\gamma=0.29$.

Автор выражает благодарность сотрудникам Института общей неорганической химии АН СССР Д. И. Пищикову и А. М. Раухману за предоставление монокристаллов.