

# Проводимость углеродных нанотрубок, обусловленная миграцией протонов по их поверхности

© Г.С. Иванченко, Н.Г. Лебедев

Волгоградский государственный университет,  
Волгоград, Россия

E-mail: genaivanchenko@yandex.ru, nikolay.lebedev@volsu.ru

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 1 апреля 2009 г.)

Представлены результаты теоретического расчета тензора протонной проводимости однослойных углеродных нанотрубок. Электронное строение изучаемых структур рассматривается в рамках зонной модели в приближении идеального протонного Ферми-газа. Методом функций Грина получена температурная зависимость протонного вклада в статическую удельную продольную проводимость  $\sigma$  нанотрубки. Функция  $\sigma(T)$  для всех рассмотренных углеродных нанотрубок имеет характерное поведение, присущее проводникам. Предсказаны различия кривой проводимости для зигзагообразных нанотрубок с индексами хиральности, кратными и не кратными 3.

Работа проведена в рамках реализации ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2013 годы (грант № НК-16П(3)), а также поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 08-02-00663).

PACS: 72.80.Rj, 73.25.+i, 73.61.Wp

## 1. Введение

Одним из приоритетных направлений развития современных физики и химии являются разработка и изучение материалов, обладающих специальными свойствами, в частности поиск твердых электролитов с протонной проводимостью [1]. Существуют материалы с водородными связями, обладающие протонной проводимостью вплоть до величины 0.1 S/cm, которая превосходит электронную проводимость многих металлов [1]. Следует отметить, что проводимость углеродных нанотрубок (УНТ) [2,3] является одним из основных свойств, определяющих функциональное использование этих объектов, и, бесспорно, занимает лидирующую позицию по числу теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованиям этого явления.

Относительно недавние экспериментальные исследования [4] УНТ показали возможность их гравировки водородной плазмой. Слабо ионизированная высоко диссоциированная водородная плазма была создана с помощью радиочастотного генератора. Выходная мощность генератора была приблизительно 200 W, а частота 27.12 MHz. Плазменные параметры: давление 70 Pa, электронная температура приблизительно 6 eV, плотность носителей заряда  $5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  и плотность нейтральных атомов водорода  $2 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ . Плазменная гравировка проводилась в пять последовательных этапов продолжительностью 60 s. С помощью рамановской спектроскопии и сканирующей туннельной микроскопии исследователи, в частности, обнаружили, что водородная плазма предпочитает проводящие однослойные углеродные нанотрубки полупроводниковым.

Этот эксперимент косвенно подтвердил предсказанный одним из авторов хиральный адсорбционный эффект [5,6]. В работах проведено моделирование процессов сорбции атомов водорода и фтора на однослойных УНТ разного диаметра и хиральности в рамках квантово-химических полуэмпирических методов. В результате расчета электронного строения и геометрических характеристик образовавшихся одноатомных гидридов и фторидов предсказана осциллирующая зависимость энергий химической связи и активации гидрогенизации и фторирования от диаметра и хиральности трубки. Причем наблюдалась корреляция: хиральные нанотрубки, обладающие наиболее выгодной адсорбционной энергией, присоединяют атомный водород с наименьшей энергией активации. Были определены оптимальные диаметры хиральных нанотрубок, на которых адсорбция протекает наиболее эффективно. Такими оказались нанотрубки, проявляющие проводящие свойства. Для нанотрубок, которые являются полупроводниками, процесс атомарной адсорбции оказывается энергетически менее выгоден.

Необходимо отметить, что хиральный адсорбционный эффект также экспериментально обнаружен при взаимодействии УНТ с кислородом [7]. Оказалось, что окисление металлических однослойных нанотрубок происходит быстрее, чем в случае полупроводниковых нанотрубок.

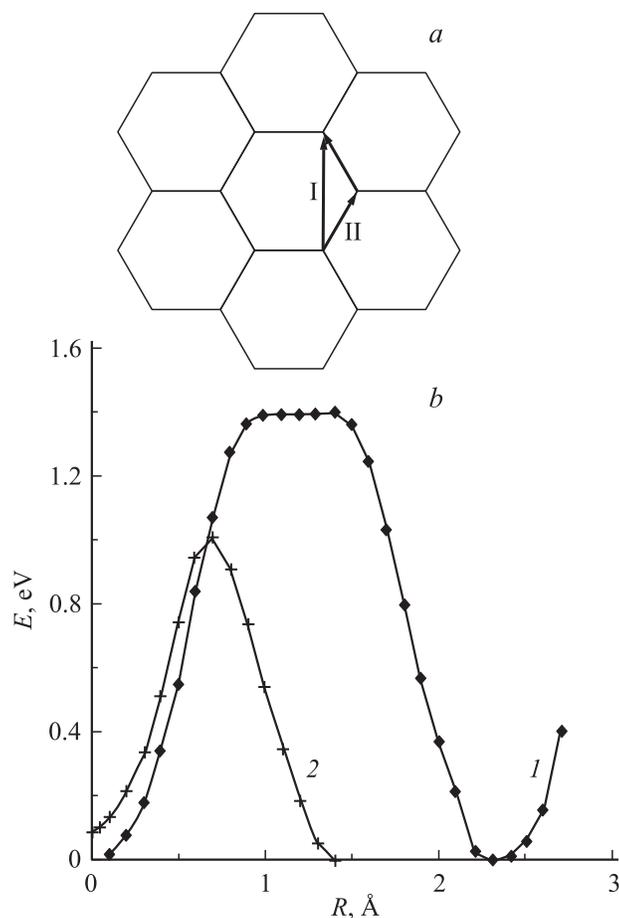
Квантово-химические исследования [8] предсказали, что протон, адсорбированный на поверхности УНТ, может перемещаться прыжками от одного атома углерода к другому. Возможные пути миграции иона  $\text{H}^+$  и зависимости его энергии от расстояния между узлами решетки показаны на рис. 1 и 2. Поэтому именно такой

механизм миграции протона по внешней поверхности УНТ рассмотрен в этом разделе. Здесь представлены результаты расчета тензора продольной протонной проводимости однослойных УНТ [9,10].

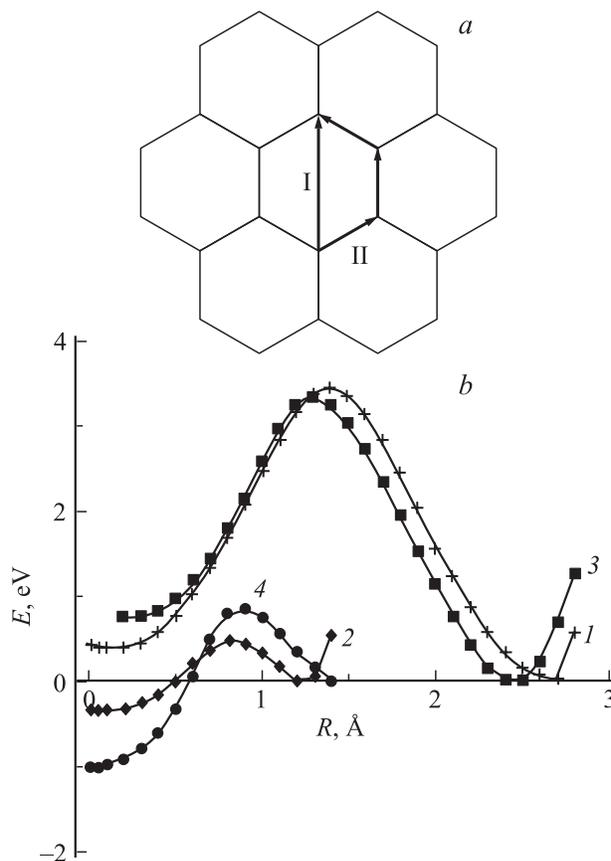
## 2. Расчет тензора протонной проводимости нанотрубок $(n, 0)$ и $(n, n)$

Для моделирования энергетической структуры УНТ с адсорбированным ионом атома водорода использована модель Хаббарда в приближении идеального протонного Ферми-газа, которая учитывает только энергию перескока протона с одного узла кристаллической решетки на соседний [11–13].

Традиционно модель Хаббарда применялась для описания физических свойств  $d$ - и  $f$ -металлов [11–13]. Она относится к коллективизированным моделям [13], в которых исходят из существования зарядов, обеспечивающих проводимость, движущихся в кристаллической решетке бесспиновых ионов и взаимодействующих между собой. В коллективизированной модели обычно различают два предельных случая — слабой и сильной



**Рис. 1.** а) Пути миграции протона по поверхности нанотрубки типа arm-chair; б) Потенциальная энергия миграции протона по поверхности УНТ  $(6,6)$ : 1 — путь I; 2 — путь II [8].



**Рис. 2.** а) Пути миграции протона по поверхности нанотрубки типа zig-zag; б) Зависимость потенциальной энергии от расстояния: 1 — путь I, УНТ  $(6,0)$ ; 2 — путь II, УНТ  $(6,0)$ ; 3 — путь I, УНТ  $(8,0)$ ; 4 — путь II, УНТ  $(8,0)$  [8].

связи — в зависимости от величины кулоновского взаимодействия зарядов [11–13]. Первый случай соответствует представлению о носителях заряда в кристаллах как идеального Ферми-газа.

Необходимо отметить, что модель Хаббарда является частным случаем полярной модели Шубина–Вонсовского [14], предложенной ими за несколько десятилетий до появления модели Хаббарда и учитывающей кулоновское взаимодействие частиц, находящихся не только на одном узле, но и на соседних узлах. Хаббарду принадлежат фундаментальные исследования на основе гамильтониана модели, которые и закрепили его имя за названием модели [12,13].

Пренебрежение взаимодействием протонов на соседних узлах (предел слабой связи) благодаря их низкой концентрации позволяет рассматривать ионы атома водорода, адсорбированные на поверхности УНТ, как идеальный протонный Ферми-газ. Элементарные возбуждения газа, представляющие собой суперпозицию плоских волн в импульсном пространстве, определяют статистические свойства системы. Каждому состоянию в энергетическом спектре идеального протонного газа соответствует определенное значение волнового вектора, состояния оказываются делокализованными и

простираются по всему кристаллу. Фактически такое рассмотрение соответствует зонной модели в исследовании энергетических свойств кристаллов, где в качестве квазичастиц выступают протоны, находящиеся в поле кристаллической решетки.

Для исследования протонной проводимости на поверхности УНТ рассмотрены трубки arm-chair и zig-zag-типов. Длины связи между соседними атомами углерода полагались равными  $1.44 \text{ \AA}$ . Эта величина получена в результате предварительной оптимизации геометрии молекулярных кластеров в рамках квантово-химического полуэмпирического метода MNDO [15]. Рассмотрен „прыжковый“ механизм переноса иона  $\text{H}^+$  от одного атома углерода к другому вдоль C–C-связи для зигзагообразных и кресельных УНТ (рис. 1 и 2).

Гамильтониан зонной модели идеального Ферми-газа протонов с учетом общепринятых обозначений имеет хорошо известный вид [11–13]

$$\hat{H} = \sum_{k\sigma} \varepsilon(\mathbf{k}) a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon(\mathbf{k}) = F[\gamma_0]$  — дисперсионное соотношение (Фурье-образ интеграла перескока  $\gamma_0$ ),  $\mathbf{k}$  — волновой вектор;  $a_{k\sigma}^+$ ,  $a_{k\sigma}$  — Ферми-операторы рождения и уничтожения протона со спином  $\sigma$  в импульсном пространстве.

Пользуясь гамильтонианом (1), легко получить известные из курса статистической физики [16] выражения для вектора плотности тока и тензора удельной проводимости (формула Кубо–Гринвуда) в терминах Фурье-образов функций Грина

$$\hat{\mathbf{j}} = \frac{e}{V} \sum_{k\sigma} \mathbf{v}(\mathbf{k}) a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i\pi e^2}{k_B T V} \sum_{q,\lambda,k,\sigma} v_\alpha(q) v_\beta(k) \langle \langle a_{q\lambda}^+ a_{q\lambda} | a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} \rangle \rangle_{i0+}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}$  — скорость электрона в импульсном пространстве, угловыми скобками обозначена двухчастичная функция Грина,  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}$  — волновые векторы,  $T$  — абсолютная температура,  $V$  — объем системы,  $e$  — элементарный заряд,  $k_B$  — постоянная Больцмана, индексы  $\alpha$  и  $\beta = x, y, z$ .

Используя метод функций Грина [17], можно окончательно получить выражение для однородной статической протонной проводимости УНТ

$$\sigma = -\frac{(2\pi)^2 e^2}{2k_B T V \hbar} \sum_k \left( \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial k} \right)^2 \frac{1}{1 + \text{ch} \left( \frac{2\varepsilon(k)}{k_B T} \right)}. \quad (4)$$

Дисперсионные соотношения  $\varepsilon(\mathbf{k})$  для УНТ типа arm-chair  $(n, n)$  и типа zig-zag  $(n, 0)$  выражаются известными

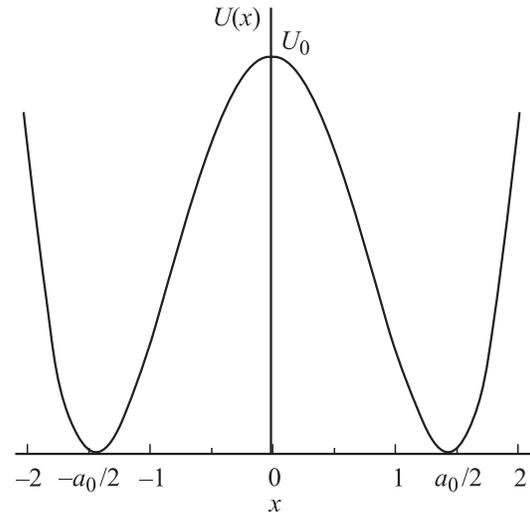


Рис. 3. Двухъямный потенциал  $U(x)$ .

формулами зонной структуры УНТ [2,3]

$$\varepsilon_q^a(k) = \pm \gamma_0 \left\{ 1 \pm 4 \cos\left(\frac{q\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{ka}{2}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{ka}{2}\right) \right\}^{1/2},$$

$$\varepsilon_q^z(k) = \pm \gamma_0 \left\{ 1 \pm 4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}ka}{2}\right) \cos\left(\frac{q\pi}{n}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{q\pi}{n}\right) \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{k}$  — одномерный волновой вектор вдоль оси УНТ;  $q = 1, \dots, n$ ;  $a = \sqrt{3}a_0$ ;  $a_0$  — длина межатомной C–C-связи.

### 3. Оценка интеграла перескока протона

Интеграл перескока протона  $\gamma_0$  между соседними узлами можно оценить, моделируя потенциальную энергию процесса переноса (рис. 1 и 2) с помощью симметричной функции (рис. 3)

$$U(x) = U_0 \left( 1 - 2 \left( \frac{2x}{a_0} \right)^2 + \left( \frac{2x}{a_0} \right)^4 \right), \quad (6)$$

где использовались следующие параметры:  $a_0 = 1.44 \text{ \AA}$ ,  $U_0 = 1 \text{ eV}$  для нанотрубок  $(n, n)$  и  $(n, 0)$  [8]. Как видно из рис. 1 и 2, величина потенциального барьера  $U_0$  слабо зависит от хиральности диаметра УНТ, поэтому ее можно считать одинаковой для трубок различного типа. Частота колебания частицы массы  $m$  в основном состоянии в каждой потенциальной яме будет находиться из условия

$$u'' \left( \frac{a_0}{2} \right) = m\omega^2 = 8u_0 \left( \frac{2}{a_0} \right)^2.$$

Тогда искомая величина энергии перехода электрона

$$\gamma_0 \equiv t_{\Delta} \equiv t_{ij} = \left\langle \Psi_i \left| -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + u(x) \right| \Psi_j \right\rangle, \quad (7)$$

или в явном виде

$$\gamma_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + u(x) \right) \Psi_2 dx, \quad (8)$$

где  $\Psi_1^*$  и  $\Psi_2$  — волновые функции в начальном и конечном состояниях, в качестве которых для простоты можно взять функции основного состояния гармонического осциллятора, имеющие следующий вид [18]:

$$\Psi_{1,2} = A \exp \left( -\frac{m\omega(x \pm a_0/2)^2}{2\hbar} \right), \quad A = \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4}. \quad (9)$$

Интеграл (8) после подстановки в него волновой функции (9) вычисляется аналитически

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x+\frac{a_0}{2})^2} \frac{\hbar\omega}{2} \left( 1 - \frac{m\omega}{\hbar} \left( x - \frac{a_0}{2} \right)^2 \right) \\ &\quad \times e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-\frac{a_0}{2})^2} dx + A^2 U_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x+\frac{a_0}{2})^2} \\ &\quad \times \left( 1 - 2 \left( \frac{2x}{a_0} \right)^2 + \left( \frac{2x}{a_0} \right)^4 \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-\frac{a_0}{2})^2} dx, \\ \gamma_0 &= A^2 \frac{\hbar\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \frac{m\omega}{\hbar} \left( x - \frac{a_0}{2} \right)^2 \right] \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{m\omega}{\hbar} \left( x^2 + \left( \frac{a_0}{2} \right)^2 \right) \right] dx \\ &\quad + A^2 U_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - 2 \left( \frac{2x}{a_0} \right)^2 + \left( \frac{2x}{a_0} \right)^4 \right] \\ &\quad \times \exp \left( -\frac{m\omega}{\hbar} \left[ x^2 + \left( \frac{a_0}{2} \right)^2 \right] \right) dx, \\ \gamma_0 &= A^2 \frac{\hbar\omega}{2} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} - \sqrt{\frac{m\omega\pi}{\hbar}} \frac{a_0^2}{4} \right] \exp \left( -\frac{m\omega a_0^2}{4\hbar} \right) \\ &\quad + A^2 U_0 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \left[ 1 - 4 \frac{\hbar}{m\omega a_0^2} + 12 \frac{\hbar^2}{m^2 \omega^2 a_0^4} \right] \exp \left( -\frac{m\omega a_0^2}{4\hbar} \right). \end{aligned}$$

Вводя новое обозначение  $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar} = \frac{4}{\hbar a_0} \sqrt{2mU_0}$  и учитывая явный вид нормировочного множителя  $A$ , получаем окончательное выражение для интеграла перескока

$$\gamma_0 = \left[ \frac{\hbar\omega}{8} (2 - \alpha a_0^2) + U_0 \left( 1 - \frac{4}{\alpha a_0^2} + \frac{12}{\alpha^2 a_0^4} \right) \right] \times \exp \left( -\frac{\alpha a_0^2}{4} \right). \quad (10)$$

При постановке параметров, соответствующих протону, мигрирующему по поверхности УНТ, получаем значения основных величин, определяющих интеграл перескока:  $\omega = 3.84 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ,  $\hbar\omega = 4.06 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0.25 \text{ eV}$ ,  $\alpha = 6.1 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2}$ ,  $\alpha a_0^2 = 126.4$ ,  $\gamma_0 = 5.61 \cdot 10^{-14} \text{ eV}$ .

Видно, что интеграл перескока  $\gamma_0$  протона оказался весьма малой величиной, для электрона он составляет примерно 2.5 eV по результатам неэмпирических квантово-химических расчетов [19]. Очевидно, для УНТ различного типа это связано с наличием потенциального барьера около 1 eV, возникающего вследствие сил отталкивания между ионом водорода и положительно заряженными ядрами атомов решетки.

Для электронов такой барьер отсутствует благодаря кулоновскому притяжению к ядрам.

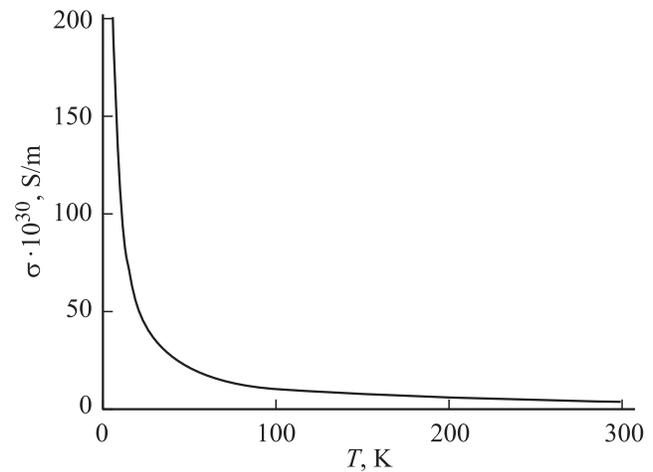


Рис. 4. Температурная зависимость протонной проводимости для УНТ (6,6) типа arm-chair.

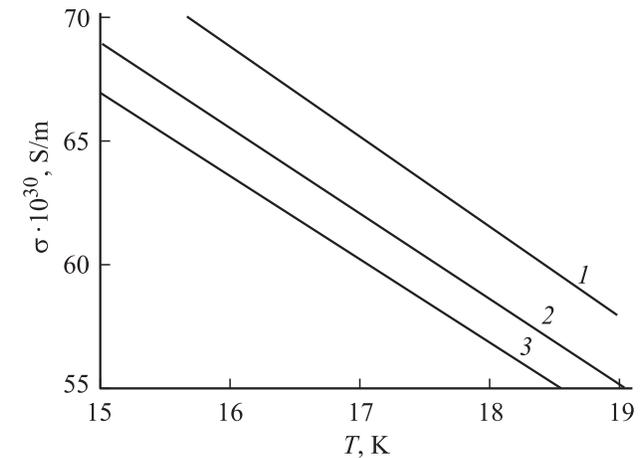
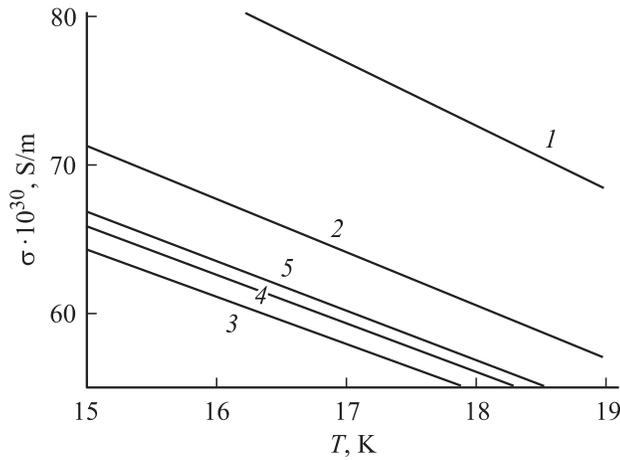


Рис. 5. Температурная зависимость протонной проводимости для УНТ типа arm-chair в области температур от 15 до 19 К. 1 — УНТ (3,3), 2 — (5,5), 3 — (100,100).



**Рис. 6.** Температурная зависимость проводимости для УНТ типа zig-zag в области температур от 15 до 19 К. 1 — УНТ (3, 0), 2 — (6, 0), 3 — (5, 0), 4 — (8, 0), 5 — (100, 0).

#### 4. Обсуждение результатов

По формуле (4) с учетом (5) и (10) рассчитаны протонные вклады в проводимости УНТ типа arm-chair ( $n, n$ ),  $n = 3-30$ , и типа zig-zag ( $n, 0$ ),  $n = 3-30$ . Исследование проводимости осуществлено при использовании следующих значений параметров:  $a_0 = 1.44 \text{ \AA}$ ,  $T = 10-300 \text{ К}$ , число элементарных ячеек вдоль оси УНТ  $N_0 = 1000$ .

На рис. 4 изображены зависимости удельной протонной проводимости от температуры для УНТ (6, 6). Для остальных нанотрубок графики аналогичны и здесь не приведены. Видно, что зависимость  $\sigma(T)$  для всех рассмотренных УНТ имеет характерное поведение, присущее проводникам, т.е. их проводимость уменьшается с ростом температуры.

С ростом диаметра трубки проводимость УНТ изменяется различным образом. На рис. 5, 6 представлены зависимости проводимости некоторых УНТ с разными индексами  $n$  в узком температурном диапазоне. На примере нескольких различных трубок показана общая тенденция изменения проводимости с диаметром. При фиксированной температуре с ростом диаметра нанотрубки проводимость стремится к некоторому предельному значению, соответствующему на рисунках проводимости УНТ с номером  $n = 100$ . Заметим, что для трубок типа arm-chair (рис. 5) и типа zig-zag ( $n, 0$ ) ( $n = 3p$ , где  $p$  — целое) (рис. 6) протонная проводимость уменьшается с увеличением номера  $n$ , приближаясь к предельному значению „сверху“, а для трубок типа zig-zag с  $n \neq 3p$  она увеличивается, приближаясь к предельному значению „снизу“.

Как отмечено выше, зависимости  $\sigma(T)$  для ( $n, 0$ ) ( $n \neq 3p$ , где  $p$  — целое) отличаются от зависимостей  $\sigma(T)$ , полученных для трубок типа zig-zag с  $n = 3p$  (рис. 6). Данное различие можно объяснить величиной потенциального барьера. Для трубок типа zig-zag с

$n \neq 3p$  величина потенциального барьера превышает величину барьера нанотрубок с индексом хиральности, кратным трем, что сильнее препятствует миграции протона по поверхности трубки.

#### 5. Заключение

Остановимся на основных результатах и выводах из проведенного исследования.

1) Осуществлен расчет тензора протонной проводимости углеродных нанотубулярных структур, обусловленной миграцией иона водорода по поверхности трубки. Методом функций Грина получена температурная зависимость протонного вклада в статическую продольную проводимость  $\sigma(T)$  нанотрубки.

2) Зависимость  $\sigma(T)$  для всех рассмотренных УНТ имеет характерное поведение, присущее проводникам, т.е. с ростом диаметра трубки проводимость уменьшается. При этом зависимости всех видов трубок при увеличении  $n$  стремятся к одному и тому же значению. Зависимости  $\sigma(T)$  для трубок ( $n, 0$ ) ( $n \neq 3p$ , где  $p$  — целое) отличаются от зависимостей  $\sigma(T)$ , полученных для трубок типа zig-zag с  $n = 3p$ . Величина проводимости для различных температур возрастает с ростом  $n$ . Объясняется данное различие величиной потенциального барьера.

3) Представленные в работе результаты получены без учета колебаний кристаллической решетки. Взаимодействие со стационарным потенциалом решетки учтено в интеграле перескока. Кроме того, в предлагаемой модели использовалось приближение идеального газа протонов, что оказывается справедливым только для малых концентраций ионов водорода, адсорбированных на поверхности УНТ. Это приближение, очевидно, будет выполняться до концентраций, при которых величина интеграла перескока станет сравнимой с кулоновским взаимодействием протонов. Тогда последним нельзя будет пренебречь в гамильтониане. В этом случае необходимо использовать модель Хаббарда в приближении сильно коррелированных протонов. И при больших концентрациях, по крайней мере один протон на элементарную ячейку, станет возможным существенное увеличение протонного вклада в проводимость УНТ.

4) Способность протона мигрировать по поверхности УНТ может быть использована для изменения проводимости как однослойных, так и многослойных нанотрубок путем воздействия на них водородной плазмой. К настоящему времени уже предложено создание материалов с протонной проводимостью на основе УНТ, в которых протон переносится между гидроксильными группами, сорбированными на поверхности трубки [20].

5) Кроме того, квантово-химические расчеты свидетельствуют о том, что адсорбированный атом водорода увеличивает сродство УНТ к атомарному и молекулярному водороду [13], что можно использовать для увеличения емкостной способности трубок. Можно предположить, что и адсорбированный протон обладает

такими же свойствами. Под действием переменного электрического поля при низких температурах протон может перемещаться по поверхности трубки и способствовать насыщению ее поверхности атомами и молекулами водорода. При высоких температурах это можно использовать для извлечения адсорбированных частиц из УНТ и дальнейшего их применения в качестве водородного топлива. Результаты работы могут заинтересовать также экспериментаторов, занимающихся водородной энергетикой и разработкой электролитических батарей и протонных проводников.

[20] Протонный проводник, способ его получения и электрохимическое устройство с его использованием. Патент № RU2265257C2.

## Список литературы

- [1] А.Б. Ярославцев. Успехи химии **63**, 449 (1994).
- [2] П. Харрис. Углеродные нанотрубки и родственные структуры. Новые материалы XXI века. Техносфера, М. (2003). 336 с.
- [3] П.Н. Дьячков. Углеродные нанотрубки: строение, свойства, применения. Бином, Лаборатория знаний, М. (2006). 293 с.
- [4] A. Hassaniien, M. Tokumoto, P. Umek, D. Vrbani, M. Mozeti, D. Mihailovi, P. Venturini. Nanotechnology **16**, 278 (2005).
- [5] N.G. Lebedev, I.V. Zaporotskova, L.A. Chernozatonskii. Int. J. Quant. Chem. **100**, 548 (2004).
- [6] Н.Г. Лебедев. Физико-химические свойства нанотубулярных систем в кластерных моделях твердых тел. Автореф. докт. дис. ИБХФ РАН, М. (2006). 40 с.
- [7] П.Н. Гевко, А.В. Окотруб, Л.Г. Булушева, И.В. Юшина, U. Dettlaff-Weglikowska. ФТТ **48**, 947 (2006).
- [8] И.В. Запороцкова, Н.Г. Лебедев, П.А. Запороцков. ФТТ **48**, 756 (2006).
- [9] Е.С. Говорухина, Н.Г. Лебедев. Тр. IV Рос.-яп. сем. „Перспективные технологии и оборудование для материаловедения, микро- и наноэлектроники“. Астрахань (2006). С. 143.
- [10] E.S. Govoruhina, G.S. Ivanchenko, N.G. Lebedev. Abstracts. 8<sup>th</sup> Biennial Int. Workshop „Fullerenes and Atomic clusters“. St. Petersburg (2007). P. 56.
- [11] Ю.А. Изюмов, М.И. Кацнельсон, Ю.Н. Скрябин. Магнетизм коллективизированных электронов. Физматлит, М. (1994). 368 с.
- [12] Ю.А. Изюмов. УФН **165**, 403 (1995).
- [13] Ю.А. Изюмов, Н.И. Чашин, Д.С. Алексеев. Теория сильно коррелированных систем. Метод производящего функционала. Регулярная и хаотическая динамика, М. (2006). 384 с.
- [14] S.P. Shubin, S.V. Wonsowsky. Proc. Roy. Soc. A **145**, 159 (1934).
- [15] Н.Ф. Степанов. Квантовая механика и квантовая химия. Мир, М. (2001). 519 с.
- [16] И.А. Квасников. Термодинамика и статистическая физика. Т. 4. Квантовая статистика. КомКнига, М. (2005). 352 с.
- [17] С.В. Тябликов. Методы квантовой теории магнетизма. Наука, М. (1975). 528 с.
- [18] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Наука, М. (1974). 752 с.
- [19] R. Saito, M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus. Physical properties of carbon nanotubes. Imperial College Press, London (1999). 251 p.