[3] *Теодорчик К. Ф.* Автоколебательные системы. М.: Гостехиздат, 1952.
[4] *Умарходжаев Р. М.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. С. 1207—1210.
[5] *Житников Р. А., Клюшкин П. А., Семенов В. В., Фомин Г. В.* // ЖТФ. 1973. Т. 43. Вып. 9. С. 1965—1971.
[6] ЯМР и ЭПР спектроскопия // Под ред. Л. Л. Декабруна. М.: Мир, 1964.
[7] *Eisendrath H., Cagnac B.* // C. R. Acad. Sci. 1977. Vol. A 285. N 2. P. B45—B47.
[8] *Малахов А. Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
[9] *Ланда П. С.* Автоколебательные системы с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
[10] *Ханин Я. И.* Динамика квантовых генераторов. М.: Сов. радио, 1975. Т. 2.

Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского университета им. М. В. Ломоносова

Поступило в Редакцию 21 января 1991 г.

01

Журнал технической физики, т. 61, в. 12, 1991

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ПО КООРДИНАТЕ

Л. Э. Рикенглаз

Насколько известно, никто ранее не пытался использовать преобразование Лапласа по координате ни для решения задач теплопроводности в областях с фиксированными границами, тем более в областях с подвижными границами. Поэтому настоящая работа имеет целью показать, что преобразование Лапласа по координате может стать для решения последних задач основой метода столь же эффективного, как применение преобразования Лапласа по времени для краевых задач в областях с неподвижными границами.

Для наглядности продемонстрируем метод на примере решения одномерной обратной задачи Стефана. Обычно ее решают с помощью весьма громоздких рядов [1, 2].

Рассмотрим полубесконечную среду ($x \geqslant 0$), находящуюся в момент времени $t=0$ при температуре фазового перехода $u(x, 0)=u_ф=0$, $x \in (0, \infty)$. При $t>0$, начиная с границы $x=0$, в среде возникает новая фаза, для которой закон движения фазового фронта $y(t)$ предполагается заданным.

Как будет показано ниже, этим определяется однозначно распределение температуры в новой фазе, а тем самым и граничные условия первого или второго родов, которые приводят к образованию этой фазы. Основные уравнения задачи имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \tau=at, \quad x \in (0, y(\tau)), \tag{1}$$

$$u(y(\tau), \tau)=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(y(\tau), \tau)}{\partial x}=-\varepsilon\dot{y}(\tau), \tag{3}$$

$$u(0, x)=0, \quad x \in (0, \infty). \tag{4}$$

Здесь a — температуропроводность, $\varepsilon=L/\lambda$, L — объемная теплота фазового перехода, λ — теплопроводность. Обозначим через $u_0(\tau)=u(0, \tau)$, $q_0(\tau)=\partial u(0, \tau)/\partial x$, $\bar{v}(s, \tau)$ преобразование Лапласа от произвольной функции v по x. Умножим уравнение (1) на $\exp(-sx)$ и проинтегрируем по x от 0 до $y(\tau)$. Учитывая, что $u(x, \tau)=0$ при $x \geqslant y(\tau)$, получим

$$\frac{d\bar{u}(s, \tau)}{d\tau}=-f(s, \tau)\equiv-[su_0(\tau)+q_0(\tau)+\varepsilon\dot{y}(\tau)e^{-sy(\tau)}], \tag{5}$$

$$\bar{u}(s, 0) = 0. \tag{6}$$

Для дальнейших преобразований надо знать $u_0(\tau)$ и $q_0(\tau)$. В действительности они уже известны. В работе [3] были получены интегральные нелинейные уравнения для $y(\tau)$ в зависимости от $u_0(\tau)$ или $q_0(\tau)$. Они имеют вид

$$-\varepsilon\left\{p^{-1} - \int_0^\infty e^{-p\tau}\operatorname{ch}[p^{1/2}y(\tau)]\,d\tau\right\} = \hat{u}_0(p), \tag{7}$$

$$-\varepsilon p^{1/2}\int_0^\infty e^{-p\tau}\operatorname{sh}[p^{1/2}y(\tau)]\,d\tau = \hat{q}_0(p). \tag{8}$$

В правой части этих уравнений стоят преобразования Лапласа $\hat{u}_0(p)$ и $\hat{q}_0(p)$ по времени от функций $u_0(\tau)$ и $q_0(\tau)$. Заметим, что аналоги этих уравнений могут быть получены для задач теплопроводности с граничными условиями любого рода на обеих движущихся границах.

Если функция $y(\tau)$ задана, то уравнения (7) и (8) превращаются в формулы, определяющие изображения $\hat{u}_0(p)$ и $\hat{q}_0(p)$. Интегрируя уравнение (5) с начальным условием (6), получим

$$\bar{u}(s, \tau) = e^{s^2\tau}\left\{\int_\tau^\infty e^{-s^2\tau} f(s, \tau)\,d\tau - I(s)\right\},$$

где

$$I(s) = \int_0^\infty e^{-s^2\tau} f(s, \tau)\,d\tau.$$

Используя формулы (7) и (8), легко показать, что $I(s) \equiv 0$. Заметим, что если бы $I(s) \neq 0$, то это противоречило бы условию $\bar{u}(s, \tau) \to 0$ при $\operatorname{Re} s \to \infty$.

Таким образом,

$$\bar{u}(s, \tau) = e^{s^2\tau}\int_\tau^\infty e^{-s^2\tau}[su_0(\tau) + q_0(\tau) + \varepsilon\dot{y}(\tau)e^{-sy(\tau)}]\,d\tau. \tag{9}$$

Для практических вычислений формула (9) неудобна, так как в нее входят $u_0(\tau)$ и $q_0(\tau)$, в то время как формулы (7) и (8) определяют их изображения. Поэтому имеет смысл ввести $\hat{\bar{u}}(s, p)$ — изображение функции $\bar{u}(s, \tau)$ по времени. Умножив формулу (9) на $\exp(-p\tau)$ и проинтегрировав по τ от 0 до ∞, получим, используя формулы (7) и (8),

$$\hat{\bar{u}}(s, p) = \varepsilon\left\{-\frac{1}{sp} + 2\int_0^\infty e^{-p\tau}\left[\frac{e^{p^{1/2}y(\tau)}}{s + p^{1/2}} + \frac{e^{-p^{1/2}y(\tau)}}{s - p^{1/2}} - \frac{2pe^{-sy(\tau)}}{s(s^2 - p)}\right]d\tau\right\}. \tag{10}$$

Совершим обратное преобразование Лапласа по x. Опуская промежуточные преобразования, приведем конечный результат

$$\hat{u}(x, p) = \varepsilon\int_{\tau_0(x)}^\infty e^{-p\tau}\{\operatorname{ch}[p^{1/2}(y(\tau) - x)] - 1\}\,d\tau, \tag{11}$$

где $\tau_0(x)$ является корнем уравнения

$$y(\tau_0) = x. \tag{12}$$

В качестве простейшего примера использования формулы (11) рассмотрим случай $y(\tau) = v\tau$. В этом случае $\tau_0 = x/v$. Следовательно,

$$\hat{u}(x, p) = \varepsilon\int_{x/v}^\infty e^{-p\tau}[\operatorname{ch}(v\tau - x) - 1]\,d\tau = \varepsilon e^{-px/v}\left(\frac{1}{p - v^2} - \frac{1}{p}\right),$$

откуда

$$u(x, \tau)=\begin{cases} 0, & x \geqslant v\tau. \\ \varepsilon\left[e^{v(v\tau-x)}-1\right], & x \leqslant v\tau. \end{cases} \tag{13}$$

Очевидно, что $u(x, \tau)$, определяемое формулой (13), удовлетворяет краевой задаче (1)—(4).

В заключение автор выражает благодарность Т. А. Орловой и О. М. Чекмаревой за обсуждение методов решения обратных задач Стефана.

Список литературы

[1] *Гринберг Г. А.* // ЖТФ. 1974. Т. 44. Вып. 10. С. 2033—2039.
[2] *Цыбин А. М.* // ЖТФ. 1974. Т. 44. Вып. 11. С. 2441—2444.
[3] *Гринберг Г. А., Чекмарева О. М.* // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 10. С. 2025—2031.

С.-Петербургский горный институт
им. Г. В. Плеханова

Поступило в Редакцию
11 ноября 1990 г.
В окончательной редакции
7 марта 1991 г.

10; 12

Журнал технической физики, т. 61, в. 12, 1991

ТРЕХЭЛЕКТРОДНЫЙ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ЭНЕРГОАНАЛИЗАТОР ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Т. Я. Фишкова

Улучшение параметров энергоанализаторов (ЭА) может быть достигнуто путем введения дополнительного электрода. Так, в работе [1] рассчитано электростатическое зеркало, образованное тремя коаксиальными цилиндрами, которое при высоком разрешении по энергии имеет преимущество по светосиле по сравнению с широко известным двухэлектродным цилиндрическим зеркалом за счет фокусировки третьего порядка по углу раствора пучка в плоскости дисперсии.

В настоящей работе получены выражения для основных параметров трехэлектродного энергоанализатора с двумерным полем произвольного вида в зеркальном режиме работы. Такое поле образуется электродами, вытянутыми вдоль продольной оси системы, при этом форма электродов может быть произвольной, они лишь должны иметь плоскость симметрии, совпадающую с плоскостью дисперсии ЭА. Прежде всего получим формулу для базы ЭА с учетом условия сшивания траектории пучка заряженных частиц на среднем электроде, на основании которой нетрудно определить остальные параметры в плоскости дисперсии ЭА. Расстояние от входа пучка в поле до выхода его из первого участка, расположенного между первым и вторым по ходу пучка электродами равно

$$Z_1=\cos\theta_0\cos\gamma\int\limits_0^d\frac{dx}{\sqrt{(\sin\theta_0\cos\gamma)^2+q\int\limits_0^x G_{x_1}dx}};\quad q=\frac{V_2-V_1}{\Phi},$$

$$G_{x_1}=-\frac{E_{x_1}}{V_2-V_1}, \tag{1}$$

где θ_0 и γ — углы на входе в плоскости дисперсии ЭА и его вертикальной плоскости соответственно.