

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА
ПРИ УСЛОВИИ КОНВЕКТИВНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ*Е. М. Болдырев*

В приближении источника тепла и начальной температуры кусочно-постоянными функциями при наличии конвективного теплообмена по закону Ньютона—Рихмана как граничного условия получено решение нестационарного неоднородного уравнения теплопроводности для цилиндрического тела в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля. Указанное приближение позволяет все интегралы, входящие в коэффициенты разложения, выразить в первообразных функциях.

Приведены расчетные кривые максимальной температуры, возникающей при разогреве мишени от проходящего через нее протонного пучка, для различных материалов мишени и различных коэффициентов теплоотдачи.

В настоящей работе для тел цилиндрической формы получены температурные поля как решения нестационарной, неоднородной задачи теплопроводности с тепловым источником и с начальной температурой, описываемыми двумерными (r, z) кусочно-постоянными функциями, и с граничными условиями, отвечающими конвективному теплообмену тела со средой по закону Ньютона—Рихмана.

Подобные задачи, к примеру, возникают в физике пучков, когда необходимо определить температурные поля в мишени (для последующего расчета ее прочностных характеристик), возникающие от энерговыделения проходящего через мишень пучка частиц. Эта задача, как правило, цилиндрически симметрична (ось симметрии вдоль оси пучка), так как мишень с достаточной степенью точности можно считать цилиндром. При этом энерговыделение пучка при прохождении его через мишень (функция теплового источника) может быть получена с помощью, например, программы MARS [1], где расчетное энерговыделение представляется собой кусочно-постоянную функцию от пространственных координат.

То, что представляемое решение задачи теплопроводности получено для простой геометрии (цилиндр), является ограничивающим фактором для применимости на практике полученной зависимости. Однако следует заметить, что такое приближение (цилиндрическая симметрия) может успешно применяться для вполне удовлетворительной оценки температур в реальных системах. Такой подход применяется в работах [2—4], но при этом аналитическая зависимость для температурных полей, полученная в настоящей работе, имеет более общий вид, чем аналогичные зависимости в [2—4], поскольку приведенная ниже формула получена как решение уравнения теплопроводности более общего вида, чем в упомянутых работах.

Так, в работе [2] формула для оценки температур при конвективном охлаждении получена как решение уравнения теплопроводности, в котором полностью исключена пространственная структура тела, т. е. при наличии теплового источника учитывается только конвективное охлаждение в зависимости от времени и исключен из рассмотрения перенос тепла таким механизмом, как теплопроводность (не учитывается тепловая диффузия).

В работе [3] ситуация обратная: тепловая диффузия учитывается, правда, только в одном направлении (по r), но нет зависимости от времени, т. е. задача стационарная.

В работе [4] делается попытка представить тепловой источник как сумму мгновенных источников, распределенных как в пространстве (одномерном), так

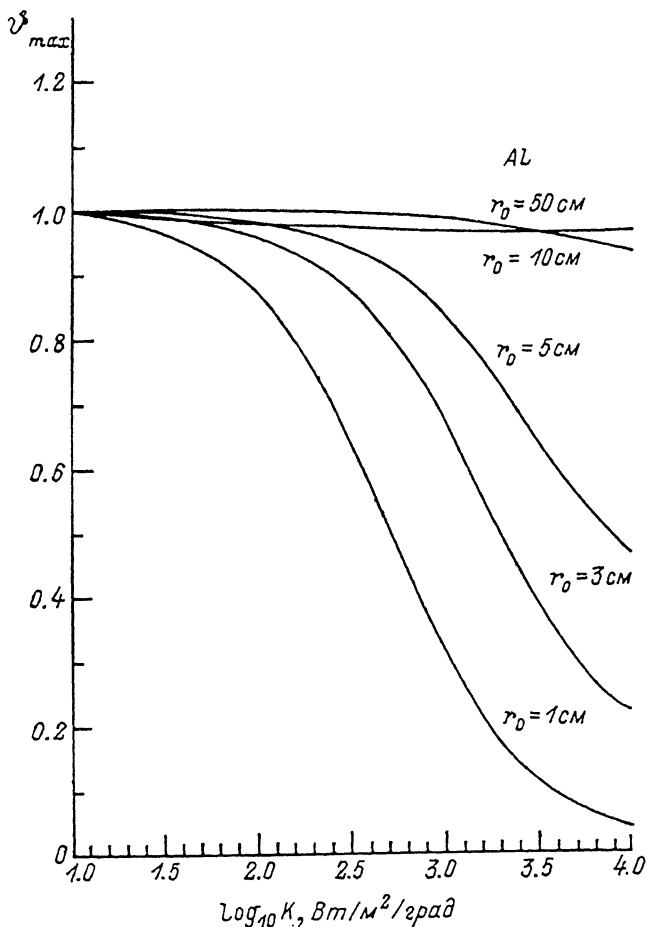


Рис. 1.

и во времени. Очевидно, что с течением времени при указанных в данной работе условиях температура тела в любой ее точке должна либо увеличиваться, либо быть постоянной (тепловое равновесие) с течением времени, но не уменьшаться, как это имеет место при расчете температурной зависимости от времени, приведенной в [4]. Поэтому по крайней мере полученная зависимость от времени не соответствует реальной ситуации.

Далее следует отметить, что предлагаемое в настоящей работе решение можно также использовать для тестирования таких общих и фундаментальных программ для расчета температурных полей, как HEATING-5 [5].

Как уже указывалось, получен общий вид распределения температурных полей, отвечающих решению неоднородного уравнения теплопроводности,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + G(r, z), \quad (1)$$

$$u(0, r, z) = f(r, z), \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \frac{K_R}{\lambda} (u - u_c) \Big|_{r=R}, \quad (1b)$$

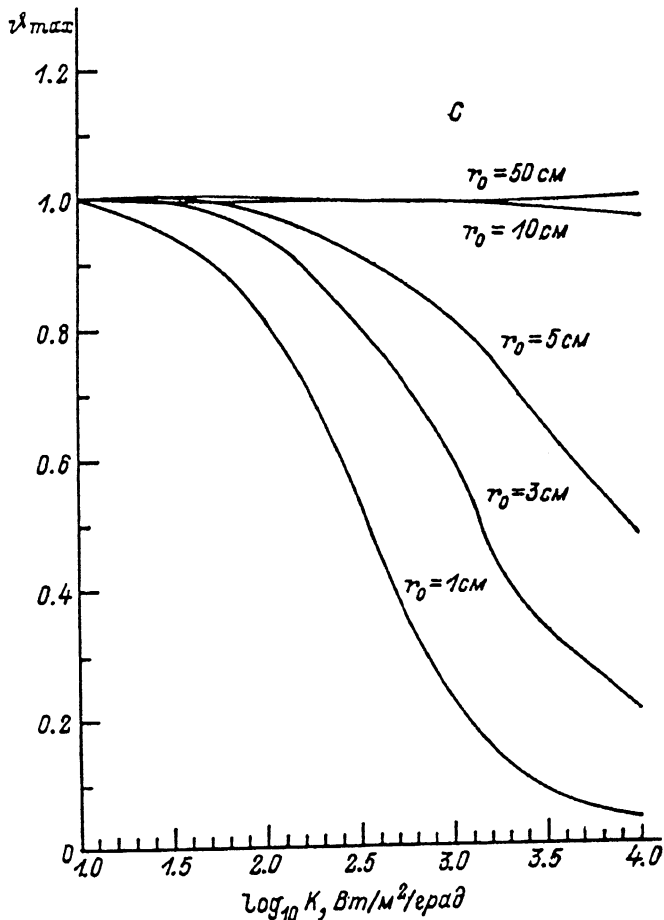


Рис. 2.

Таблица 1

Материал	$\gamma, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\lambda, \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$	$c, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$
Алюминий (AL)	2702	236	396
Графит (С)	1000	100	1600
Железо (Fe)	7800	74	457
Медь (Cu)	8933	399	383

Таблица 2

$K, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$	Способы конвективного охлаждения
5—25	Свободная конвекция жидкостью (воздух)
10—100	То же (вода)
10—200	Вынужденная конвекция жидкостью (воздух)
50—10000	То же (вода)

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{K_0}{\lambda} (u - u_c) \Big|_{z=0}, \quad (1г)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=l} = - \frac{K_l}{\lambda} (u - u_c) \Big|_{z=l}, \quad (1д)$$

$$|u(t, 0, 0)| < \infty \quad [u = u(t, r, z)]. \quad (1е)$$

Здесь u — функция температуры; t — время; a — коэффициент температуропроводности; r, z — пространственные переменные в цилиндрических координатах; $G(r, z) = F(G_{ij}; N_G, M_G)$ — функция источника тепла; $f(r, z) = F(f_{ij}; N_f, M_f)$ — функция начальной температуры; $F(x_{ij}; M, N) = x_{ij}$, $r_{i-1} < r < r_i$, $z_{j-1} < z < z_j$ ($i = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, M$), $x_{ij} = \text{const}$, т. е. $F(x_{ij}; N, M)$ — кусочно-постоянная функция, $r_0 = 0$, $r_N = R$, $z_0 = 0$, $z_N = l$; R, l — радиус и длина цилиндра соответственно; K_R — коэффициент теплоотдачи с боковой поверхности цилиндра; K_0 — коэффициент теплоотдачи с торца цилиндра при $z = 0$; K_l — коэффициент теплоотдачи с торца цилиндра при $z = l$; λ — теплопроводность; u_c — температура окружающей среды (const).

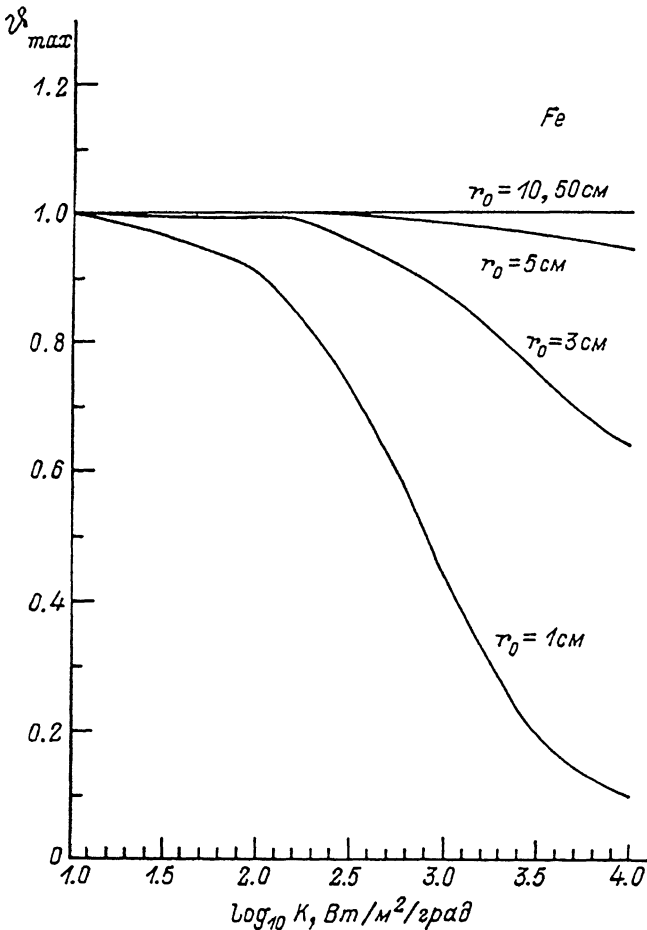


Рис. 3.

О физическом смысле параметров a^2 , K , λ , а также о конвективном обмене тепла по закону Ньютона—Рихмана говорится в [6]

Решая уравнение (1) стандартным методом, изложенным, например, в [7], мы получаем формулу для определения температурного поля в цилиндрическом теле при заданных начальных и граничных условиях, которая представима в виде

$$\Theta(t, r, z) = \Theta_1(t, r, z) + \Theta_2(t, r, z), \quad (2)$$

где

$$\Theta(t, r, z) = u(t, r, z) - u_c;$$

$$\Theta_1(t, r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_{nm}t} \varphi_n \Psi_m [S_{nm}(f_{ij}; N_f, M_f) - S_{nm}(u_c; N, M)] \quad (3)$$

— решение однородной задачи (1) с (1a)—(1e);

$$\Theta_2(t, r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nm}} (1 - e^{-\alpha_{nm}t}) \varphi_n \Psi_m S_{nm}(G_{ij}; N_G, M_G)$$

— решение неоднородной задачи (1) с $f(0, r, z) = 0$ в (1a) и с (1в)—(1e);

$$\alpha_{nm} = a^2(\beta_n^2 + \nu_m^2);$$

β_n, ν_n — собственные значения краевой задачи, состоящей из однородного (1) и (1в)—(1e), т. е. задачи Штурма—Лиувилля, удовлетворяющие соответственно трансцендентным уравнениям

$$\beta J_1(\beta R) - h_R J_0(\beta R) = 0, \quad \operatorname{ctg} \gamma l = \frac{\gamma^2 - h_0 h_l}{\gamma(h_0 + h_l)}, \quad (h = \frac{K}{\lambda});$$

$$\varphi_n(r) = J_0(\beta_n r),$$

$$\psi_n(z) = \sin(\nu_n z + \varkappa_n)$$

— собственные функции, соответствующие указанным собственным значениям задачи Штурма—Лиувилля, при этом $J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка,

$$\varkappa_n = \operatorname{arctg} \frac{\nu_n}{h_0};$$

$$S_{nm}(x_{ij}; N, M) = \|\Phi_{nm}\|^{-2} (\beta_n \nu_m)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M x_{ij} [r_i J_1(\beta_n r_i) - r_{i-1} J_1(\beta_n r_{i-1})] \times \\ \times [\cos(\nu_m z_{j-1} + \varkappa_m) - \cos(\nu_m z_j + \varkappa_m)],$$

если x_{ij} не зависит от ij , т. е. $x_{ij} = x$, то

$$S_{nm}(x; N, M) = \|\Phi_{nm}\|^{-2} (\beta_n \nu_m)^{-1} x R J_1(\beta_n R) [\cos(\varkappa_m) - \cos(\nu_m l + \varkappa_m)];$$

$$\|\Phi_{nm}\|^2 = \|\varphi_n\|^2 \|\Psi_m\|^2,$$

где

$$\|\varphi_n\|^2 = 0.5 R^2 \left(1 + \frac{h_R^2}{\beta_n^2} \right) J_0^2(\beta_n R),$$

$$\|\Psi_{n'}\|^2 = 0.5 \left[1 + \frac{(v_n^2 + h_0 h_l)(h_0 + h_l)}{(v_n^2 + h_0^2)(v_n^2 + h_l^2)} \right]$$

Для примера приведем расчеты по формуле (2) максимальной температуры цилиндрического тела, которая достигается в теле при падении на него в течение 40 с протонного пучка, радиус поперечного сечения которого 5 мм и энергия 3 ТэВ. Эти параметры пучка примерно соответствуют начальным [$f(0, r, z) = u_0 = u_c$; $u_0 = \text{const}$] протонного пучка в канале частиц УНК на фиксированную мишень типа DUMP. Энерговыведение в мишени при прохождении через нее пучка рассчитано по программе MARS [1]. Максимальная температура тела рассматривается в зависимости от материала мишени, ее радиуса R и коэффициента теплоотдачи K_R . Расчеты проведены для цилиндрического тела длиной 3 м в предположении о существовании на торцах этого тела конвективного теплообмена по закону Ньютона—Рихмана. Расчет показал, что максимальная температура тела практически не зависит от $K_{0(l)}$, что, очевидно, отражает действительность, поскольку градиент температуры вдоль оси пучка много меньше градиента температуры вдоль радиального направления, а площадь торцов цилиндра для рассматриваемой геометрии много меньше его боковой поверхности.

Расчеты проведены для мишеней, которые могут быть изготовлены из четырех материалов, характеристики которых приведены в табл. 1. Коэффициент

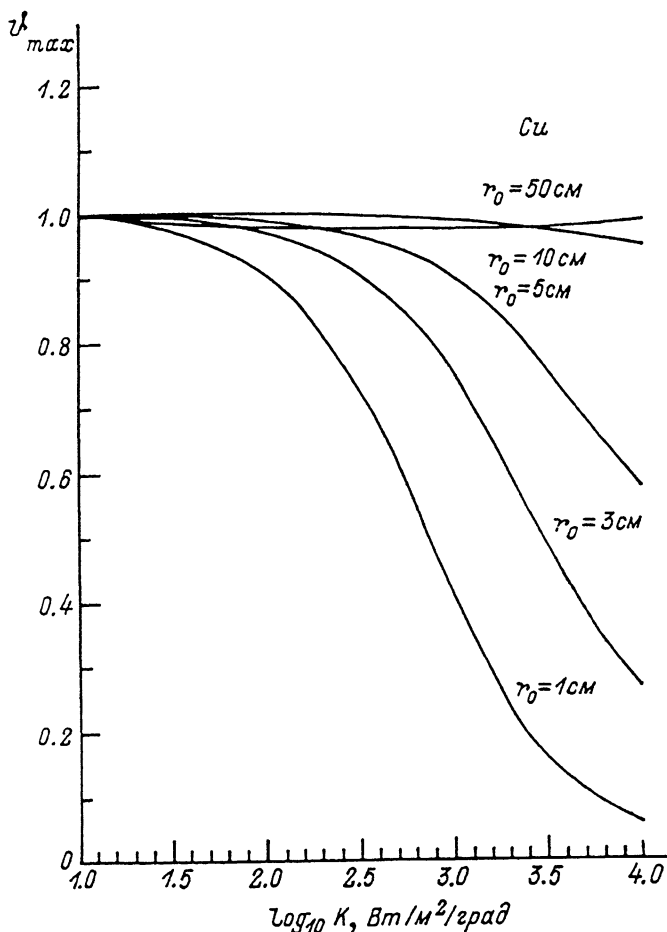


Рис. 4.

теплопроводности выбирается в пределах от 10 до $10^4 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{град}^{-1}$, что отвечает технически допустимым методам [8] охлаждения мишени (табл. 2).

На рис. 1—4 для указанных выше материалов даны расчетные кривые максимальной относительной температуры цилиндрического тела с радиусом R , взятым равным 1, 3, 5, 10 и 50 см, в зависимости от коэффициента теплопроводности k_R и u_0 , равной 30° (см. рис. 1—4). Указанная максимальная относительная температура определяется как

$$\Theta_{\max} = \frac{T_{\max} - u_0}{T_{\max}^0 - u_0},$$

где T_{\max} — максимальная температура, рассчитанная по формуле (3), плюс температура u_0 ; T_{\max}^0 — максимальная температура, приведенная в табл. 3.

Отметим, что приведенные на рисунках расчетные кривые указывают на то, что для $R > 10$ см конвективное охлаждение становится неэффективным и охлаждение мишени полностью происходит за счет тепловой диффузии.

В заключение сделаем два замечания.

1. Проведенные расчеты выполнены для одного (начального) сброса пучка на мишень, но тем не менее полученная формула (2) может быть использована для расчета температурного поля мишени, когда она подвергается воздействию пучка в циклическом режиме (функция источника тепла имеет зависимость от времени в виде периодически чередующихся прямоугольных импульсов, длина которых $\tau = 40$ с и расстояние между которыми 120 с), что имеет место в действительности. Здесь существенное значение представляет тот факт, что время между выводом пучка на мишень составляет 120 с (втрое больше, чем длительность сброса пучка), в пределах которого функция источника тепла есть тождественный нуль, следовательно, мишень находится полностью в режиме охлаждения и решение этой задачи есть только (3). Тогда решение для циклического режима может быть представлено следующей итерационной процедурой.

а) Рассчитывается температурное поле по формуле (2) для времени $t = 40$ с (длительность сброса пучка); это температурное поле можно использовать как функцию начальной температуры в (3), т. е. в задаче охлаждения цилиндра, которая и даст температурное поле в момент времени $t = 120$ с (конечное время охлаждения цилиндра).

б) Полученное температурное поле надо использовать затем как функцию начальной температуры в (2) и вновь провести расчет по этой формуле, и т.д. Поскольку время между сбросами пучка втрое больше длительности самого сброса, то в реальном режиме охлаждения достаточно провести от двух до семи таких итераций, чтобы достигнуть равновесного режима, при котором температурное поле в цилиндре уже не изменяется.

Т а б л и ц а 3

R , см	T_{\max}^0 ($\cdot 10^{-12}$), град			
	Алюминий	Графит	Медь	Железо
1	137.070	66.719	407.680	366.010
3	53.835	39.662	93.000	103.390
5	43.100	36.151	62.400	85.241
10	36.772	33.539	47.505	81.912
50	36.200	33.500	45.700	79.000

Конечно, можно подобрать и такой режим охлаждения, при котором достаточно провести расчет температурного поля только по формуле (2) и решить указанным выше способом задачу охлаждения цилиндра. При этом режим охлаждения должен быть таким, чтобы температурное поле для конечного времени охлаждения цилиндра ($t = 120$ с) было равно начальному температурному полю

исходной задачи, но тут весь вопрос заключается в том, насколько подобный режим охлаждения может быть реализован в действительности.

2. В табл. 3 приведены значения не T_{\max}^0 , а T_{\max}^0 , умноженной на 10^{-12} . Это связано с тем, что максимальная температура рассчитывалась по формуле (2) при интенсивности пучка $I = 10^{12} \text{pp}$, поэтому в табл. 3 фактически приведена максимальная температура на один падающий протон и, следовательно, T_{\max}^0 для произвольной интенсивности получается простым умножением на эту интенсивность тех температур, которые приведены в табл. 3.

Автор выражает благодарность А. П. Воробьеву, Е. А. Козловскому, Р. А. Рзаеву за обсуждение полученных результатов и сделанные замечания, Е. М. Маслову за предоставление исходных данных функции энерговыделения, а также В. В. Змушко за помощь, оказанную в процессе выполнения работы.

Список литературы

- [1] *Мохов Н. В., Семенова Г. И., Узунян А. В.* // Препринт ИФВЭ. N 79-101. Серпухов, 1979.
- [2] *Kalbreier W., Middelkoop W. C., Sievers P.* CERN-Lab. (BT). 71—1. 1974.
- [3] *Sievers P.* CERN-Lab. (BT) 74-2. 1974.
- [4] *Mori S., Stredde H.* TM 761 2972. 0. 1978.
- [5] *Turner M. D., Elrod D. C., Siman-Tov I. I.* ORNL/CSD/TM-15. 1977.
- [6] *Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукодел А. С.* Теплопередача. М.: Энергоиздат, 1981.
- [7] *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974.
- [8] *Крейт Ф., Блэк У.* Основы теплопередачи. М.: Мир, 1983.
- [9] *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980.

Поступило в редакцию
28 ноября 1990 г.