

03
© 1992 г.

СИНХРОНИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО МОНОДИСПЕРГИРОВАНИЯ ЖИДКОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

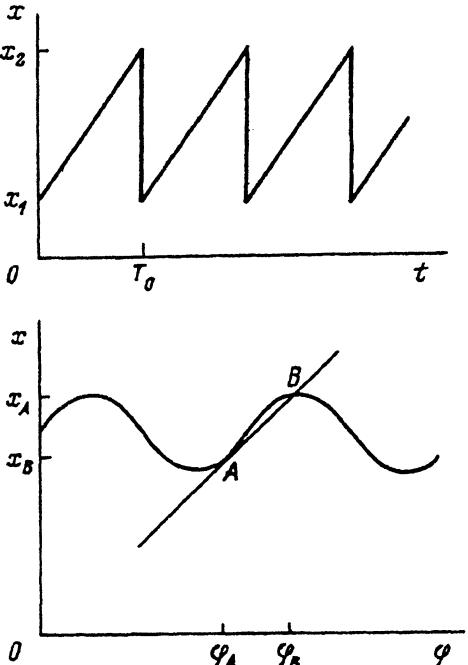
А. И. Григорьев, В. И. Безруков, А. А. Земсков, А. Э. Лазарянц, С. О. Ширяева

Проводится теоретический анализ синхронизации периодическим внешним воздействием процесса разрывных автоколебаний — монодиспергирования жидкости с мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается. Выделены зоны синхронизации на основной частоте и нескольких первых кратных частотах.

Явление электростатического монодиспергирования жидкостей находит весьма широкое применение в различных разделах физики, техники и технологии — от жидкостной литографии и ускорителей макрочастиц до каплеструйной печати и создания монодисперсных суспензий несмешивающихся жидкостей [1—4]. Но, несмотря на очевидную важность проблемы и значительное количество экспериментальных исследований этого явления [1, 5—8], его теория начала разрабатываться только в последнее время [1, 4, 9] и многие сопутствующие эффекты до сих пор не нашли своего адекватного физического объяснения. В частности, это касается синхронизации процесса каплеобразования периодическим внешним воздействием, об экспериментальном наблюдении которого сообщалось в [5, 6]. В экспериментальных исследованиях режим синхронизации, как правило, подбирается эмпирически, хотя существует возможность предварительного теоретического анализа, позволяющего оптимизировать режим синхронизации, а также яснее представить физические особенности процесса подстройки, следования частоты эмиссии капель за частотой внешнего воздействия.

Явление каплеобразования при отрыве капли от капилляра, по которому жидкость подается, представляет собой сильно нелинейный автоколебательный процесс. Аналитическое исследование синхронизации каплеобразования гармонической компонентой внешней силы, отрывающей каплю от мениска на торце капилляра, представляет собой в общем случае весьма сложную задачу. Поэтому ниже следующее рассмотрение проведем на модельном примере, не рассматривая физической природы сил, отрывающих каплю, и выбирая в качестве определяющего физического параметра объем отрывающейся капли. Иными словами, в основу теоретической модели положим теорему о неустойчивости состояния равновесия при отсутствии в нем минимума потенциальной энергии [10].

В рассматриваемой ситуации по мере бесконечно медленного натекания жидкости в каплю (в мениск) и увеличения объема капли, ее суммарная энергия в поле внешних сил и сил поверхностного натяжения достигает некоторого предельного значения, начиная с которого равновесных форм капли, дающих минимум функционалу, определяющему потенциальную энергию системы, больше не существует, что и соответствует отрыву капли при бесконечно малом увеличении ее объема, т.е. при неизменных внешних условиях существует некий максимальный предельный объем для равновесной капли на срезе капилляра. Сам отрыв капли происходит таким образом, что система переходит в состояние с минимальной потенциальной энергией, которая достигается при некотором минимальном объеме мениска жидкости на торце капилляра (капли), отличном, однако, от нуля.



1. Рассмотрим процесс монодиспергирования жидкости с торца капилляра, по которому жидкость подается. Несложно видеть, что в силу выше сформулированных утверждений при постоянном массовом расходе жидкости k зависимость от времени объема x висящей на торце капилляра капли будет иметь пилообразный вид (рис. 1)

$$x = x_1 + (x_2 - x_1) \operatorname{fr} \frac{kt}{x_2 - x_1} \quad (1.1)$$

с периодом

$$T_0 = \frac{1}{k} (x_2 - x_1). \quad (1.2)$$

Символ fr в (1.1) означает взятие дробной части от выражения, заключенного в скобки; x_2 и x_1 — максимальный и минимальный объемы жидкого мениска на торце

Рис. 1.

капилляра при отрыве капли.

Несложно видеть, что если тем либо иным способом заставить периодически изменяться со временем либо x_1 , либо x_2 , либо и x_1 , и x_2 , то при определенных соотношениях между частотами в системе может иметь место синхронизация процесса каплеобразования переменным внешним воздействием. В качестве конкретного примера можно рассмотреть явление монодиспергирования жидкости с торца капилляра под действием электрического поля, являющегося суперпозицией электростатического и коллинеарного ему периодического, изменяющегося со временем по гармоническому закону с периодом θ ,

$$E = E_0 + E_1 \sin \frac{2\pi}{\theta} t.$$

Пусть расход жидкости в капилляре k и частота изменения переменной компоненты внешнего электрического поля $2\pi/\theta$ достаточно малы, чтобы рассматривать эту задачу как статическую в каждый момент времени. Тогда для заданного объема жидкости x , не превышающего некоторого максимального x_a , из условия баланса давлений можно найти квазивновесную форму поверхности капли, висящей на капилляре [9].

Для значений объема x , больших x_a , устойчивых равновесных форм капли не существует, что означает отрыв капли от капилляра при значении $x = x_b$. При этом, согласно вышесказанному, после отрыва капли на капилляре остается некоторый объем жидкости x_b . Тогда для объема оторвавшейся капли x_0 получим

$$x_0 = x_a - x_b.$$

Значения x_a и x_b при фиксированных внешних физических параметрах и размерах капилляра зависят от величины напряженности электрического поля E и не зависят от расхода жидкости k . Будем считать зависимости $x_a(E)$, $x_b(E)$ известными либо из экспериментальных данных [5,6], либо из теоретических вычислений [10].

Пусть амплитуда гармонической компоненты электрического поля много меньше постоянной составляющей ($E_1 \ll E_0$), тогда, согласно вышеполученным результатам, значения максимального и минимального объемов жидкости, висящей на капилляре, также будут гармоническими функциями времени периода θ

$$x_a = x_2 + a \sin \frac{2\pi}{\theta} t \quad a > 0, \\ x_b = x_1 + b \sin \frac{2\pi}{\theta} t \quad b \geq 0. \quad (1.3)$$

Следовательно, можно ожидать, что при некоторых соотношениях между T_0 и θ в системе может реализоваться синхронизация процесса монодиспергирования переменным электрическим полем. Отысканию областей значений физических параметров, характеризующих систему, в которой возможна синхронизация, и посвящен этот раздел.

2. На языке теории колебаний поставленная задача формулируется как синхронизация генератора разрывных автоколебаний вида (1.1) модуляцией верхнего и нижнего опорных уровней (1.3) периодическими сигналами. Как известно из общей теории, при отношении периода собственных колебаний генератора T_0 к периоду модулирующего сигнала θ , близком к целому числу N , в системе устанавливаются колебания с периодом T_c , кратным периоду модулирующего сигнала $T_c = N\theta$. При изменении θ будет изменяться и T_c , чтобы постоянно выполнялось соотношение $T_c = N\theta$. Это явление получило название "захвата частоты". В нашей гидродинамической задаче это означает, что частота каплеобразования, а следовательно, и объем отрывающихся капель x_0 при постоянной частоте внешнего электрического поля также будут постоянными.

Причем области синхронизации различных порядков (соответствующих различным N) никогда не перекрывают друг друга. Отсюда следует, что для каждой амплитуды модулирующего сигнала отношение периода собственных колебаний генератора к периоду модуляции θ , для которого наблюдается синхронизация, лежит на ограниченных интервалах, уменьшающихся с ростом N . Если отношение периодов T_0/θ равно рациональному числу n/m ($m = 1$), то синхронизация невозможна. Возможна только групповая синхронизация, при которой синхронизируются группы из m колебаний генератора. Физически это означает, что объем отрывающихся капель внутри группы не будет постоянным, но будут одинаковыми объемы i -тых оторвавшихся капель из всех групп для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

Будем решать задачу о синхронизации пилообразных колебаний (1.1) модуляций верхнего и нижнего опорных уровней (1.3) периодическим сигналом. Перейдем к безразмерным переменным, положив

$$T_0 = 1, \quad x_2 - x_1 = 1.$$

Тогда в силу (1.1), (1.2) угол наклона линейных участков (рис. 1) будет равен 45° ($k = 1$).

Пусть $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ — последовательные моменты отрыва капель. Тогда на интервале $t_{i-1} < t < t_i$ $\{x_b(t_{i-1}) < x(t) < x_a(t)\}$, используя (1.1), (1.3), несложно получить

$$x(t) = x_b(t_{i-1}) + t - t_{i-1} = x_1 + b \sin \frac{2\pi}{\theta} t_{i-1} + t - t_{i-1}.$$

Тогда в момент отрыва капли $t = t_i$, который по предположению происходит мгновенно ($x = x_a(t_i)$), имеем

$$x_2 + a \sin \frac{2\pi}{\theta} t_i = x_1 + b \sin \frac{2\pi}{\theta} t_{i-1} + t_i - t_{i-1}.$$

Обозначим за T_i время между отрывами $i-1$ -й и i -й капель

$$T_i = t_i - t_{i-1} = 1 + a \sin \frac{2\pi}{\theta} t_i - b \sin \frac{2\pi}{\theta} t_{i-1}. \quad (2.1)$$

Для облегчения нижеследующих рассуждений удобно перейти от времени t к фазе φ , отсчитываемой от начала периода гармонической составляющей электрического поля. Тогда выражение для фаз в последовательные моменты отрыва капель имеет вид

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{\theta} t_i - 2\pi n_i,$$

n_i — целое число.

Формула (2.1) перепишется так:

$$T_i = \frac{\theta}{2\pi} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) + N\theta = 1 + a \sin \varphi_i - b \sin \varphi_{i-1}, \quad (2.2)$$

N — целое число.

Процесс установления синхронизации эмиссии капель и колебаний напряженности электрического поля математически выражается в сходимости последовательности фаз φ_i к некоторому постоянному значению φ_c — фазе синхронизации. Другими словами, при синхронизации все последовательные акты эмиссии капель начинаются при одинаковом значении фазы колебаний электрического поля $\varphi_i = \varphi_c$. В итоге для реализации режима синхронизации необходимо (но недостаточно), чтобы выполнялось условие

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i = \varphi_c. \quad (2.3)$$

Тогда из (2.2) автоматически следует условие

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = T_c = N\theta,$$

т.е. период режима синхронизации должен быть в целое число раз больше периода колебаний электрического поля. Связь φ_c с θ также легко получить из (2.2) в виде

$$\sin \varphi_c = \frac{n\theta - 1}{a - b}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) имеет два решения, лежащие внутри одного периода. Какое из них будет реализовываться в действительности, определяется из требования сходимости последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots$ к φ_c , т. е. должно выполняться условие $\varphi = \varphi_i$

$$\left| \frac{d\varphi_i}{d\varphi_{i-1}} \right| = \frac{\left| \frac{\partial F}{\partial \varphi_{i-1}} \right|}{\left| \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \right|} < 1,$$

где

$$F(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \frac{\theta}{2\pi} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) + N\theta - 1 - a \sin \varphi_i - b \sin \varphi_{i-1}.$$

Отсюда имеем

$$\left| \frac{\theta}{2\pi} - b \cos \varphi_c \right| < \left| \frac{\theta}{2\pi} - a \cos \varphi_c \right|. \quad (2.5)$$

Если решение уравнения (2.4) выбрать в виде

$$\varphi_c = \pi - \arcsin \frac{N\theta - 1}{a-b}, \quad (2.6)$$

то

$$\cos \varphi_c = - \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2}$$

и неравенство (2.5) будет иметь вид

$$\left| \frac{\theta}{2\pi} + b \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2} \right| < \left| \frac{\theta}{2\pi} + a \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2} \right|.$$

Учитывая, что под модулями стоят положительные величины (так как $a > 0$ и $b \geq 0$), получим, что последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ будет сходиться к (2.6) только в случае $a > b$. Если выбрать второе решение уравнения (2.4)

$$\varphi_c = \arcsin \frac{N\theta - 1}{a-b}, \quad (2.7)$$

то

$$\cos \varphi_c = \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2}$$

и неравенство (2.5) примет вид

$$\left| \frac{\theta}{2\pi} - b \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2} \right| < \left| \frac{\theta}{2\pi} - a \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2} \right|. \quad (2.8)$$

При раскрытии модулей могут возникнуть четыре случая.

1. Если для амплитуды a и b выполняются условия

$$a \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2} < \frac{\theta}{2\pi}; \quad b \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2} < \frac{\theta}{2\pi}, \quad (2.9)$$

то из (2.8) получаем

$$a < b. \quad (2.10)$$

Это означает, что последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ будет сходиться к (2.7) при одновременном выполнении неравенств (2.9), (2.10).

2. Если

$$a \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2} < \frac{\theta}{2\pi}; \quad b \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2} > \frac{\theta}{2\pi}, \quad (2.11)$$

тогда из (2.8) получаем

$$(a+b) \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a-b} \right)^2} < \frac{\theta}{2\pi}, \quad (2.12)$$

т.е. сходимость к (2.7) будет иметь место при одновременном выполнении условий (2.11), (2.12).

3. Если

$$a \sqrt{1 - \left(\frac{n\theta - 1}{a-b} \right)^2} > \frac{\theta}{2\pi}; \quad b \sqrt{1 - \left(\frac{n\theta - 1}{a-b} \right)^2} < \frac{\theta}{2\pi}, \quad (2.13)$$

то получаем из (2.8)

$$(a+b) \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta-1}{a-b}\right)^2} > \frac{\theta}{\pi}, \quad (2.14)$$

т.е. сходимость к (2.7) будет реализовываться при одновременном выполнении условий (2.13), (2.14).

4. Если

$$a \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta-1}{a-b}\right)^2} > \frac{\theta}{2\pi} ; \quad b \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta-1}{a-b}\right)^2} > \frac{\theta}{2\pi}, \quad (2.15)$$

то получим

$$a > b, \quad (2.16)$$

т.е. сходимость к (2.7) будет при одновременном выполнении условий (2.15), (2.16).

Первый и второй случаи можно объединить в одно общее условие

$$a < b ; \quad (a+b) \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta-1}{a-b}\right)^2} < \frac{\theta}{\pi}. \quad (2.17)$$

Третий и четвертый случаи также объединяются

$$a > b ; \quad (a+b) \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta-1}{a-b}\right)^2} > \frac{\theta}{\pi}. \quad (2.18)$$

3. Как уже было замечено, условие (2.3) не является достаточным. Необходимо также, чтобы фаза φ_c лежала вне интервала самоэкранирования $[\varphi_A, \varphi_B]$ (рис. 1).

Явление самоэкранирования состоит в том, что если мы выберем $\varphi_c \in [\varphi_A, \varphi_B]$ (точка C на рис. 1), то значение объема $x_a(\varphi_c)$ будет недостижимо, так как отрыв капли произойдет раньше в точке C'. Нижняя граница области самоэкранирования, т.е. точка A на рис. 1, определяется из условия, что она лежит в IV квадранте $-\pi/2 < \varphi_A < 0$ и угол наклона касательной к графику функции $x_a(t)$ в точке A равен 45° или, переходя от времени t к фазе φ , угол наклона к графику функции $x_a(t)$ равен $\arctg(\theta/2\pi)$, т. е.

$$\left. \frac{dx_a}{d\varphi} \right|_{\varphi_a} = a \cos \varphi_A = \frac{\theta}{2\pi} ; \quad \varphi_A = -\arccos \frac{\theta}{2\pi a}. \quad (3.1)$$

Значение x_a в этой точке будет

$$x_A = x_a(\varphi_A) = x_2 - a \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2\pi a}\right)^2},$$

знак минус перед корнем появляется в силу того, что точка A лежит в IV квадранте. Уравнение касательной имеет вид

$$x(\varphi) = x_A + \frac{\theta}{2\pi} (\varphi - \varphi_A).$$

Фаза φ_B (верхняя граница области самоэкранирования) определяется из требования, чтобы в точке B касательная пересекала кривую $x_a(\varphi)$ т.е.

$$\frac{2\pi a}{\theta} \sin \varphi_B = - \sqrt{\left(\frac{2\pi a}{\theta}\right)^2 - 1} + \varphi_B + \arccos \frac{\theta}{2\pi a}. \quad (3.2)$$

Построим в пространстве параметров θ, a, b для каждого N областей, в которых возможен режим синхронизации. Из условия (2.4) получим

$$\frac{N\theta - 1}{a - b} < 1.$$

Это условие означает, что в пространстве θ, a, b область синхронизации будет ограничена поверхностями

$$a = b + 1 - N\theta; \quad a = b - 1 + N\theta. \quad (3.3)$$

Рассмотрим случай $a > b$. Поскольку $x_B > x_A$ (рис.1), то область, где отсутствует самоэкранирование, для случая (2.7) лежит внутри области, где отсутствует самоэкранирование для случая (2.6). Поэтому граница области синхронизации будет определяться из уравнения (3.2) при исключении из него θ при помощи (2.6)

$$\frac{2\pi a}{\theta} \left(\frac{N\theta - 1}{a - b} \right) + \sqrt{\left(\frac{2\pi a}{\theta} \right)^2 - 1} - \arccos \frac{\theta}{2\pi a} - \pi + \arcsin \frac{N\theta - 1}{a - b} = 0. \quad (3.4)$$

При $a > b$ самоэкранирование наступает, когда $\varphi_B \geq \pi/2$. Подставляя $\varphi_B = \pi/2$ в (3.2), получим

$$\frac{2\pi a}{\theta} + \sqrt{\left(\frac{2\pi a}{\theta} \right)^2 - 1} - \arccos \frac{\theta}{2\pi a} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Исключая θ при помощи второго уравнения в (3.3), получаем нижнюю границу для a , выше которой второе уравнение (3.3) должно быть заменено на (3.4)

$$\frac{2\pi Na}{a - b + 1} + \sqrt{\left(\frac{2\pi Na}{a - b + 1} \right)^2 - 1} - \arccos \frac{a - b + 1}{2\pi Na} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Рассмотрим случай $a < b$. Теперь для существования синхронизации должно также выполняться условие (см.(2.17))

$$(a + b) \sqrt{1 - \left(\frac{N\theta - 1}{a - b} \right)^2}.$$

Кроме того, в этом случае область синхронизации уменьшается за счет самоэкранирования, наступающего при

$$\frac{N\theta - 1}{b - a} = \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2\pi a} \right)^2}$$

(это уравнение получено исключением φ_A из уравнений (2.7), (3.1)). Самоэкранирование заканчивается при

$$\frac{2\pi a}{\theta} \frac{1 - N\theta}{b - a} + \sqrt{\left(\frac{2\pi a}{\theta} \right)^2 - 1} - \arcsin \frac{N\theta - 1}{a - b} - \arcsin \frac{\theta}{2\pi a} = 0,$$

что легко получить исключением φ_B из уравнения (2.7), (3.2).

Графики областей синхронизации на плоскости параметров θ, a при различных постоянных b приведены на рис. 2—5. На рис. 2 представлен случай

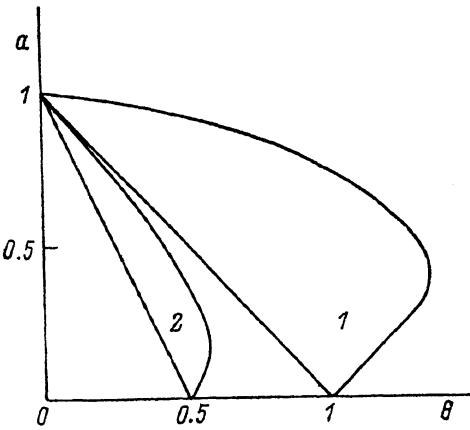


Рис. 2.

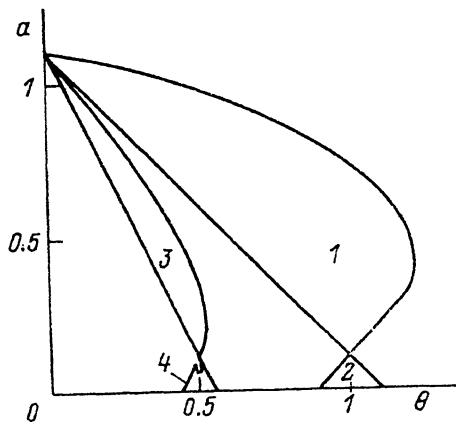


Рис. 3.

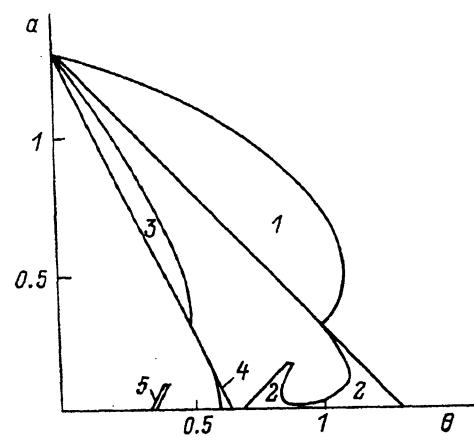


Рис. 4.

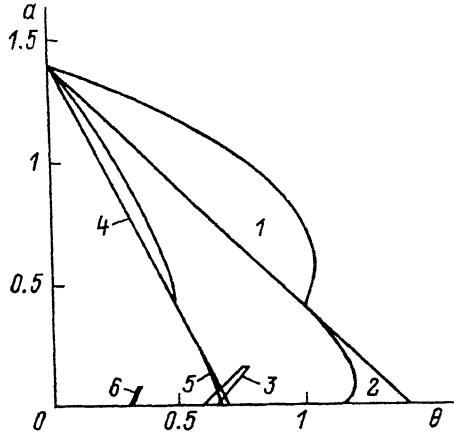


Рис. 5.

$b = 0$. Области синхронизации отмечены цифрами 1 и 2 для первого ($N = 1$) и второго ($N = 2$) порядков синхронизации соответственно. По-видимому, данный случай должен описывать режим образования крупных капель в слабых электрических полях, когда объем остающейся на капилляре после отрыва капли мал и определяется исключительно геометрией капилляра и параметрами жидкости. На рис. 3 представлен случай $b = 0.1$. Области синхронизации отмечены цифрами 1, 2 для $N = 1$ и 3, 4 для $N = 2$. На рис. 4 представлен случай $b = 0.3$. Области синхронизации отмечены цифрами 1, 2 для $N = 1$ и 3—5 для $N = 2$. На рис. 5 представлен случай $b = 0.5$. Области синхронизации отмечены цифрами 1 — 3 для $N = 1$ и 4—6 для $N = 2$. Случай $b \neq 0$ описывают гармонический режим, наблюдающийся в сильных электрических полях. При этом режиме отрываются маленькие капли, а основная часть жидкости остается на капилляре. Поэтому объем жидкости, остающейся на капилляре после отрыва капли, будет зависеть от времени.

Следует также отметить, что в пределах областей синхронизации частота каплеобразования будет плавно следовать за изменяющейся частотой внешнего переменного воздействия, что позволяет осуществлять в устройствах электростатического монодиспергирования точную подстройку. Размеры и заряды капель

при изменении положения рабочей точки в пространстве θ , a , b также будут изменяться.

Список литературы

- [1] Woolsley J.P., Turnbull R.J., Kim K. // Appl. Phys. 1988. Vol. 21. P. 4278—4284.
- [2] Григорьев А.И., Сыциков Ю.А., Ширяева С.О. // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 2. С. 2020—2026.
- [3] Daily A.G. // Phys. Bull. 1984. Vol. 35. N 4. P. 146—149.
- [4] Вербицкий С.С., Григорьев А.И., Земсков А.А., Ширяева С.О. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 2. С. 32—40.
- [5] Безруков В.А., Костылев А.А. Опыт разработки и перспективы внедрения универсальных электростатических капле斯特руйных устройств. Л.: ЛИТМО, 1989. 60 с.
- [6] Sample S.B., Bollini R. // J. Coll. Int. Sci. 1971. Vol. 41. N 2. P. 185—193.
- [7] Ahire D.V., Kamra A.K. // Mausam. 1984. Vol. 35. N 1. P. 27—32.
- [8] Nawab M.A., Mason S.J. // J. Coll. Sci. 1958. Vol. 13. N 1. P. 179—187.
- [9] Григорьев А.И., Земсков А.А., Ширяева С.О. // Электрон. обраб. матер. 1990. № 4. С. 31—34.
- [10] Владимиров В.А. // ЖПМТФ. 1989. № 2. С. 108—116.

Ярославский
университет

Поступило в Редакцию
2 апреля 1991 г.