01

ЕМКОСТЬ ТОНКОГО ПЛОСКОГО КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская

С помощью метода разделения переменных найдено точное решение электростатической задачи для тонкого плоского кольца и получено выражение для емкости в форме ряда, быстро сходящегося для узких колец. Исследованы свойства специальных функций, связанных с рассматриваемой задачей, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с двоякопериодическими коэффициентами.

Введение

Задача о распределении электрического заряда по поверхности тонкого плоского кольца представляет теоретический интерес, и ее решение рассматривалось в работах многих авторов. На первый взгляд проблема кажется почти тривиальной, так как данная задача относится к классу задач математической физики с разделяющимися переменными [1] (см. также [2—3] и раздел 1 настоящей работы). Однако использование полученного таким образом точного решения для конкретных расчетов, в частности для вычисления емкости кольца, сталкивается с трудностями, связанными с недостаточной изученностью соответствующих специальных функций. Для решения рассматриваемой задачи привлекались также альтернативные методы, основанные на применении интегральных уравнений Фредгольма первого и второго родов, парных и тройных интегральных уравнений и др. [4—8]. Эти методы позволили разработать некоторые алгоритмы для вычисления емкости и получить приближенные формулы, пригодные при определенных соотношениях геометрических параметров. Однако, несмотря на достигнутые успехи, задачу вычисления емкости нельзя считать полностью решенной. В настоящей работе предлагается вернуться к первоначальному подходу, основанному на точном решении краевой задачи, предложенном в [3]. Показывается, что метод является эффективным и позволяет получить для емкости выражение в виде ряда, быстро сходящегося для узких колец.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкое плоское круговое кольцо с внутренним и внешним радиусами a и b $(a < b)$. Пусть (r, φ, z) — система цилиндрических координат, плоскость $z = 0$ которой совпадает с плоскостью кольца. Задача электростатики сводится к определению распределения потенциала $u = u(r, z)$, удовлетворяющего уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \ 0 \le r < \infty, \ -\infty < z < \infty \tag{1}$$

и граничным условиям

$$u\Big|_{z=0,\, a<r<b} = V, \ \ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0,\, r<a,\, r>b} = 0 ,$$

$$u\Big|_{\sqrt{r^2+z^2}\to\infty} \to 0\,. \qquad (2)$$

Следуя [3], введем систему ортогональных криволинейных координат (α,β,φ), связанных с цилиндрическими координатами соотношениями

$$r + iz = b\,dn(iK' - \alpha - i\beta) = ib\,\frac{\mathrm{cn}(\alpha + i\beta)}{\mathrm{sn}(\alpha + i\beta)}\,,$$

$$-K \le \alpha \le K\,,\ 0 \le \beta \le K'\,, \qquad (3)$$

где $\mathrm{sn}\zeta = \mathrm{sn}(\zeta,k)$, $\mathrm{cn}\zeta = \mathrm{cn}(\zeta,k)$, $\mathrm{dn}\zeta = \mathrm{dn}(\zeta,k)$ — эллиптические функции Якоби с модулем $k = \sqrt{1 - (a^2/b^2)}$, K и K' — полные эллиптические интегралы с модулями k и $k' = a/b$.

Области вне кольца соответствует прямоугольник $(-K \le \alpha \le K$, $0 \le \beta < K')$, бесконечно удаленной точке — начало координат $\alpha = \beta = 0$. На верхней и нижней поверхностях кольца переменное β принимает значение $\beta = K'$, а переменное α изменяется соответственно в пределах $[0,K]$ и $[-K,0]$.

Если положить $u = r^{-1/2}\,w(\alpha,\beta)$, то для функции w получается уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \left[\frac{\mathrm{dn}^2\alpha}{4} + \frac{k'^2}{4\mathrm{dn}^2\alpha} - \frac{\mathrm{dn}^2(iK' - i\beta)}{4} - \frac{k'^2}{4\,\mathrm{dn}^2(iK' - i\beta)}\right] w = 0\,, \qquad (4)$$

которое после подстановки $w = A(\alpha)B(\beta)$ распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$A'' + \left(\lambda - \frac{\mathrm{dn}^2\alpha}{4} - \frac{k'^2}{4\,\mathrm{dn}^2\alpha}\right) A = 0\,, \qquad (5)$$

$$B'' - \left[\lambda - \frac{\mathrm{dn}^2\,(iK' - i\beta)}{4} - \frac{k'^2}{4\,\mathrm{dn}^2\,(iK' - i\beta)}\right] B = 0\,, \qquad (6)$$

где λ — параметр разделения.

Таким образом, рассматриваемая задача электростатики относится к классу задач математической физики с разделяющимися переменными.

2. Определение собственных функций

Обратимся к уравнению (5). Так как в задаче электростатики потенциал $u = u(r,z)$ является однозначной функцией точки, то решения рассматриваемого уравнения должны быть периодическими функциями α с периодом $2K$. Таким образом, определение $A(\alpha)$ сводится к решению регулярной задачи Штурма—Лиувилля для уравнения (5) при граничных условиях

$$A(-K) = A(K),\ A'(-K) = A'(K). \qquad (7)$$

Принимая во внимание симметрию потенциала относительно плоскости $z = 0$, достаточно ограничиться построением собственных функций, четных относительно α. Для этого воспользуемся известными разложениями эллиптических функций в ряды Фурье

$$\mathrm{dn}^2\alpha = \frac{E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1 - q^{2m}} \cos\frac{m\pi\alpha}{K}\,,$$

$$\frac{k'^2}{\mathrm{dn}^2\alpha} = \frac{E}{K} + \frac{2\pi^2}{K^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m mq^m}{1 - q^{2m}} \cos\frac{m\pi\alpha}{K}\,,$$

$$-K \le \alpha \le K \tag{8}$$

(E — полный эллиптический интеграл второго рода от модуля k, $q = e^{-\pi K'/K}$). Уравнение (5) принимает тогда вид

$$\frac{d^2A}{dx^2} + \left(\mu - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^{2m}}{1-q^{4m}} \cos 2mx\right) A = 0\,,$$

$$-\pi \le x \le \pi\,, \tag{9}$$

где $x = (\pi\alpha)/K$, μ — параметр, связанный с λ соотношением $\mu = \frac{K^2}{\pi^2}\left(\alpha - \frac{E}{2K}\right)$.

Граничные условия при этом будут

$$A\Big|_{x=-\pi} = A\Big|_{x=\pi}\,, \quad \frac{dA}{dx}\Big|_{x=-\pi} = \frac{dA}{dx}\Big|_{x=\pi}. \tag{10}$$

Значения функции A и параметра μ будем искать в форме

$$A = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)q^2 + \varphi_2(x)q^4 + \ldots,\ \mu = c_0 + c_1q^2 + c_2q^4 + \ldots\,. \tag{11}$$

Тогда, разлагая левую часть уравнения (9) в ряды по степеням малого параметра q, приходим к следующей системе уравнений:

$$\varphi_0'' + c_0\varphi_0 = 0\,,$$

$$\varphi_1'' + c_0\varphi_1 = -\,c_1\varphi_0 + 2\varphi_0 \cos 2x\,,$$

$$\varphi_2'' + c_0\varphi_2 = -\,c_1\varphi_1 - c_2\varphi_0 + 2\varphi_1 \cos 2x + 4\varphi_0 \cos 4x\,, \tag{12}$$

и т. д.

Функции $\varphi_i(x)$ должны удовлетворять граничным условиям

$$\varphi_i(-\pi) = \varphi_i(\pi),\ \varphi'_i(-\pi) = \varphi'_i(\pi),\ i = 0,1,2,\ldots.$$

При построении четных собственных функций выберем $c_0 = n^2$, $\varphi_0(x) = \cos nx$, $n = 0,1,2,\ldots$. Последующие c_i и $\varphi_i(x)$ определяются так, чтобы правые части уравнений (12) не содержали $\cos nx$, а $\varphi_i(x)$ были ортогональны к этим функциям. Этот процесс приводит к следующим выражениям для собственных функций:

$$A_0(\alpha) = 1 - \frac{q^2}{2}\cos 2x - \frac{7}{32}q^4 \cos 4x + \ldots,$$

$$A_1(\alpha) = \cos x - \frac{q^2}{8}\cos 3x - \left(\frac{17}{64}\cos 3x + \frac{5}{64}\cos 5x\right) q^4 + \ldots,$$

$$A_2(\alpha) = \cos 2x + \frac{q^2}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\cos 4x\right) - \frac{23}{384}q^4 \cos 6x + \ldots,$$

$$A_n(\alpha) = \cos nx + \frac{q^2}{4}\left[\frac{\cos(n-2)x}{n-1} - \frac{\cos(n+2)x}{n+1}\right] + \ldots,$$

$$n = 0,2,3,\ldots. \tag{14}$$

Значения параметра μ будут

$$\mu_0 = -\frac{q^4}{2},\ \mu_1 = 1 + q_2 - \frac{q^4}{8} + \dots,$$

$$\mu_2 = 4 + \frac{29}{12}q^4 + \dots,\ \mu_n = n^2 + O(q^4),\ n = 0,2,3,\dots,$$

а соответствующие собственные значения определяются по формулам

$$\lambda = \lambda_n = \frac{\pi^2}{K^2}\mu_n + \frac{E}{2K}.$$

Собственные функции (14) ортогональны на промежутке $(-K, K)$

$$\int_{-K}^{K} A_m(\alpha)A_n(\alpha)d\alpha = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ \|A_n\|^2,\ m = n. \end{cases} \tag{15}$$

Из общей теории Штурма—Лиувилля вытекает также, что для достаточно широкого класса функций имеет место разложение

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A_n(\alpha),\quad a_n = \frac{\int_{-K}^{K} f(\alpha)\, A_n(\alpha)d\alpha}{\|A_n\|^2},$$

$$-K < \alpha < K.$$

Значения квадрата нормы нескольких первых собственных функций будут

$$\|A_0\|^2 = 2K\left(1 + \frac{q^4}{8} + \dots\right),\quad \|A_1\|^2 = K\left(1 + \frac{q^4}{64} + \dots\right),$$

$$\|A_2\|^2 = K\left(1 + \frac{17}{144}q^4 + \dots\right),\quad \|A_n\|^2 = K(1 + O(q^4)),\ n = 1,2,\dots. \tag{17}$$

3. Интегрирование уравнения для B-функций

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения (6) и покажем, что его решения при $\lambda = \lambda_n$ могут быть выражены через определенные интегралы, содержащие переменное β как параметр. Для этого будем искать решение рассматриваемого уравнения в виде интеграла

$$B = B_n(\beta) = \int_{-K}^{K} G(\alpha,\beta)\, A_n(\alpha)\, d\alpha,\quad 0 < \beta < K', \tag{18}$$

где $A_n(\alpha)$ — собственная функция, соответствующая значению λ_n: $G(\alpha,\beta)$ — решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 G}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial\beta^2} - \left[\frac{\mathrm{dn}^2\alpha}{4} + \frac{k'^2}{4\mathrm{dn}^2\alpha} - \frac{\mathrm{dn}^2(iK' - i\beta)}{4} - \frac{k'^2}{4\,\mathrm{dn}^2(iK' - i\beta)}\right] G = 0, \tag{19}$$

непрерывное вместе с производными первых двух порядков в области $(-K \leq \alpha \leq K,\ 0 < \beta < K')$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$G(-K,\beta) = G(K,\beta),\ \left.\frac{\partial G}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=-K} = \left.\frac{\partial G}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=K}. \tag{20}$$

Действительно, прямая подстановка (18) в (6) показывает, что при таком выборе G дифференциальное уравнение удовлетворяется тождественно и, следовательно, выражение (18) представляет интеграл рассматриваемого уравнения.

Основная трудность заключается в определении ядра G. Этот выбор существенно упрощается, если заметить, что произведение $G = r^{1/2}u$, где $u = u(r,z)$ — произвольная гармоническая вне кольца функция, является решением уравнения (19), причем в случае, если u четная функция z, граничные условия (20) также оказываются выполненными. В частности, полагая $U = 1$, приходим к решению уравнения

$$B_n(\beta) = Q_n(\beta,k) = \int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{\mathrm{dn}\alpha\,\mathrm{dn}(iK' - i\beta)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2(iK' - i\beta)}}\; A_n(\alpha)\, d\alpha\,,$$

$$0 < \beta \le K'\,,\; n = 0,1,2,\ldots. \tag{21}$$

Интегральное представление (21) может быть записано в вещественном виде

$$Q_n(\beta,k) = \int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{\mathrm{dn}\alpha\,\mathrm{sn}(\beta,k')\,\mathrm{cn}\,(\beta,k')}{\mathrm{sn}^2(\beta,k') + \mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^2(\beta,k')}}\; A_n(\alpha)d\alpha\,,$$

$$0 < \beta \le K'\,,\; n = 0,1,2,\ldots. \tag{22}$$

Предельной формой полученного интеграла при $k \to 0$ является

$$Q_n(\beta,0) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\mathrm{sh}2\beta}{\mathrm{ch}2\beta - \cos 2\alpha}}\; \cos 2n\alpha\, d\alpha = \sqrt{2\mathrm{sh}2\beta}\, Q_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}2\beta)\,,$$

$$0 < \beta < \infty,\; n = 0,1,2,\ldots, \tag{23}$$

где $Q_{n-1/2}(x)$ — сферическая функция Лежандра второго рода.

Для построения второго линейно независимого интеграла уравнения (6) выберем

$$u = \frac{1}{\sqrt{(r + b)^2 + z^2}}\, K\left(\frac{2\sqrt{br}}{\sqrt{(r + b)^2 + z^2}}\right).$$

Функцию u можно рассматривать как потенциал равномерно заряженного витка радиуса b, расположенного в плоскости $z = 0$. При дальнейших вычислениях полезно иметь в виду равенство

$$\sqrt{\left(r + b\right)^2 + z^2} = \sqrt{(r + b + iz)\,(r + b - iz)} = b\,\frac{\mathrm{dn}\alpha + \mathrm{dn}(iK' - i\beta)}{1 - k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2(iK' - i\beta)}$$

и воспользоваться известным преобразованием Ландена

$$\frac{1}{1 + x}\, K\left(\frac{2\sqrt{x}}{1 + x}\right) = K(x)\,,\; 0 \le x \le 1\,.$$

Проделав необходимые выкладки, приходим к интегралу

$$B_n(\beta) = P_n(\beta,k) = \frac{4}{\pi^2}\int_{-K}^{K} \sqrt{\frac{\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{dn}(iK' - i\beta)}}\; K\left(\frac{\mathrm{dn}\alpha}{\mathrm{dn}(iK' - i\beta)}\right) A_n(\alpha)\, d\alpha\,,$$

$$0 \le \beta < K',\; n = 0,1,2,\ldots \tag{24}$$

или в вещественной форме

$$P_n(\beta,k) = \frac{4}{\pi^2} \int_{-K}^{K} \sqrt{\mathrm{dn}\alpha \, \mathrm{sn}(\beta,k')} \; K\left(\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,(\beta,k')\right) A_n(\alpha)\, d\alpha\,,$$

$$0 \le \beta < K'\,,\ n = 0,1,2,\ldots \tag{25}$$

При $k \to 0$ решения $P_n(\beta,k)$ сводятся с точностью до постоянного множителя к произведениям $\sqrt{2\mathrm{sh}2\beta}\; P_{n-1/2}\,(\mathrm{ch}\,2\beta)$, где $P_{n-1/2}\,(x)$ — сферическая функция первого рода. Для $n = 0$ этот результат непосредственно следует из формулы (25). В общем случае требуется более точная аппроксимация функций, стоящих под знаком интеграла.

Полученные выше результаты показывают, что уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ допускает бесконечное множество решений

$$u = u_n = \left(\frac{r}{b}\right)^{-1/2} \begin{Bmatrix} P_n(\beta,k) \\ Q_n(\beta,k) \end{Bmatrix} A_n(\alpha)\,,$$

$$-K \le \alpha \le K\,,\ 0 < \beta < K'\,;\ n = 0,1,2,\ldots\,, \tag{26}$$

четных относительно переменной z. Верхняя строчка соответствует решениям, регулярным в интервале $0 \le \beta < \beta_0 \le K'$ (область вне поверхности циклиды вращения $\beta = \beta_0$), нижняя — решениям, регулярным в интервале $\beta_0 < \beta \le K'$ (область внутри поверхности $\beta = \beta_0$). Путем суперпозиции найденных частных решений (26) могут быть получены решения краевых задач для указанных областей.

4. Решение задачи электростатики для плоского кольца. Вычисление емкости кольца

Задача электростатики для плоского кольца является частным случаем внешней краевой задачи для циклиды $\beta_0 = K'$. Соответственно этому решение будем искать в форме

$$u = V\left(\frac{r}{b}\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} M_n\, \frac{P_n(\beta,k)}{P_n(K',k)}\, A_n(\alpha)\,,$$

$$-K \le \alpha \le K\,,\ 0 \le \beta < K'\,. \tag{27}$$

Значения коэффициентов M_n определяются из граничного условия $u\big|_{\beta = K'} = V$, откуда следует

$$M_n = \frac{1}{\|A_n(\alpha)\|^2} \int_{-K}^{K} \left(\frac{r}{b}\right)^{1/2}\Big|_{\beta=K'} A_n(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\|A_n(\alpha)\|^2} \int_{-K}^{K} \sqrt{\mathrm{dn}\alpha}\, A_n(\alpha)\, d\alpha = \frac{Q_n(K',\,k)}{\|A_n(\alpha)\|^2}$$

на основании интегрального представления (21). Таким образом, распределение потенциала электростатического поля дается формулой

$$u = V\left(\frac{r}{b}\right)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(K',k)\, P_n(\beta,k)}{P_n(K',\,k)\, \|\, A_n(\alpha)\,\|^2}\, A_n(\alpha)\,,$$

$$-K \le \alpha \le K\,,\ \ 0 \le \beta < K'\,. \tag{28}$$

Суммарный заряд кольца Q вычисляется по формуле

$$Q = 2\pi \int_{-K}^{K} \sigma(rH_\alpha)_{\beta = K'}\, d\alpha = \frac{1}{2} \int_{-K}^{K} (rH_\alpha)_{\beta = K'} \left(\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)_{\beta = K'} d\alpha ,$$

где σ — плотность распределения заряда по кольцу; $H_\alpha = H_\beta$ — коэффициенты Ламе ортогональной системы координат (α, β, φ).

Подставляя значение потенциала u из (28) и воспользовавшись интегральным представлением (21), находим

$$Q = \frac{V_b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Q_n(K',k)]^2 P_n{}'(K',k)}{P_n(K',k)\ \|A_n(\alpha)\|^2} , \tag{29}$$

откуда искомая емкость кольца

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Q_n(K',k)]^2 P_n{}'(K',k)}{P_n(K',k)\ \|A_n(\alpha)\|^2} . \tag{30}$$

Выражение (30) упрощается, если заметить, что

$$P'_n(K', k) = \frac{4}{\pi} A_n(0) . \tag{31}$$

Равенство (31) следует из интегрального представления (25), если после дифференцирования по β перейти к пределу $\beta \to K'$. Воспользовавшись (31), получаем окончательно

$$C = \frac{2b}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[Q_n(K', k)]^2 A_n(0)}{P_n(K', k)\ \|A_n(\alpha)\|^2} . \tag{32}$$

Найденная точная формула позволяет получить простые приближенные представления для емкости кольца в виде рядов по малому параметру $q = e^{-\pi K'/K}$. Действительно, на основании формул (14) и (17)

$$A_0(0) = 1 - \frac{q^2}{2} - \frac{7}{32} q^4 + \ldots , \quad A_1(0) = 1 - \frac{q^2}{8} - \frac{11}{32} q^4 + \ldots ,$$

$$A_2(0) = 1 + \frac{q^2}{6} - \frac{23}{384} q^4 + \ldots , \quad A_n(0) = 1 + \frac{q^2}{4} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \ldots ,$$
$$n = 0, 2, 3, \ldots ,$$

$$\|A_0\|^2 = 2K \left(1 + \frac{q^4}{8} + \ldots\right) , \quad \|A_1\|^2 = K \left(1 + \frac{q^4}{64} + \ldots\right) ,$$

$$\|A_2\|^2 = K \left(1 + \frac{17}{144} q^4 + \ldots\right) , \quad \|A_n\|^2 = K (1 + O(q^4)) , \ n = 1, 2, \ldots .$$

Далее из (21) и (24) следует

$$Q_n(K', k) = \int_{-K}^{K} \sqrt{\mathrm{dn}\alpha}\, A_n(\alpha)\, d\alpha , \tag{34}$$

$$P_n(K', k) = \frac{4}{\pi^2} \int_{-K}^{K} \sqrt{\mathrm{dn}\alpha}\, K(\mathrm{dn}\alpha)\, A_n(\alpha)\, d\alpha . \tag{35}$$

Для вычисления этих интегралов функции $A_n(\alpha)$ заменяются их разложениями (14), а множители $\sqrt{\operatorname{dn}\alpha}$ и $K(\operatorname{dn}\alpha)$ рядами

$$\sqrt{\operatorname{dn}\alpha} = 1 - 2q\left(1 - \cos\frac{\pi\alpha}{K}\right) + 2q^2\left(1 - \cos\frac{\pi\alpha}{K}\right)^2 + \ldots,$$

$$K(\operatorname{dn}\alpha) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{q\sin^2\frac{\pi\alpha}{2K}}\left(1 + 4q\sin^2\frac{\pi\alpha}{2K} + 4q^2\sin^4\frac{\pi\alpha}{2K} + \ldots\right) - \frac{q^2}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi\alpha}{K}\right)^2 + \ldots. \tag{36}$$

После подстановки соответствующих рядов в (32) получаем

$$\frac{C}{\pi b} = \frac{1}{\ln\frac{4}{q}}\left[1 - 4q + q^2\left(2\ln\frac{4}{q} + 11\right) + \ldots\right], \tag{37}$$

где параметр q связан с геометрическими размерами кольца соотношением

$$q = e^{-\frac{\pi K\left(\frac{a}{b}\right)}{K\sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2}}}}, \tag{38}$$

K — полный эллиптический интеграл первого рода.

Ряд (37) быстро сходится для узких колец ($a \to b$, $q \to 0$). Так, для $a/b = 0.8$, $4q = 0.110$ $q^2\left(2\ln\frac{4}{q} + 11\right) = 0.016$, для $a/b = 0.9$, $4q = 0.059$ $q^2\left(2\ln\frac{4}{q} + 11\right) = 0.005$ и т. д. С увеличением q необходимо соответственно брать большее число членов в разложении (37). Объем вычислений при этом увеличивается, однако схема вычислений остается прежней.

Случай широких колец ($a/b \to 0$, $q \to 1$) может быть также исследован на основе точного решения задачи. Следует отметить, что этот случай является более простым по сравнению с рассмотренным и соответствующее разложение для емкости не содержит логарифмических членов. Выражение для емкости широкого кольца в виде ряда по степеням отношения a/b приведено в работе [8].

В заключение заметим, что результаты расчета емкости по формулам, предложенным в настоящей работе, сравнивались с данными других авторов [5—6]. Для узких колец совпадение численных значений оказалось достаточно хорошим.

Список литературы

[1] *Wangerin A.* Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. Leipzig, 1875.
[2] *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.
[3] *Lebedev N.* // Techn. Phys. (USSR). 1937. Vol. 27. N 1. P. 3—24.
[4] *Губенко В. С., Моссаковский В. И.* // ПММ. 1960. Т. 24. № 2. С. 334—340.
[5] *Sneddon I. N.* Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory. New York: John Wiley, 1966.
[6] *Cook J. C.* // The Quart. J Mech. and Appl. Math. 1963. Vol. 16. N 2. P. 193—203.
[7] *Leppington F. G., Levine H.* // Proc. Edinb. Math. Soc. 1972. Vol. 18 (Ser. II). N 1. P. 55—76.
[8] *Love E. R.* // Proc. Royal Soc. Edinb. 1976. Vol. 74. P. 257—270.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
19 апреля 1991 г.