11

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ. РЕЖИМ ГОРЯЧЕГО ПУЧКА

В. Г. Барышевский, И. Я. Дубовская, А. В. Зеге

Построена теория индуцированного рентгеновского излучения релятивистских электронов в кристалле в режиме горячего пучка. В геометрии дифракции Брэгга кристалл играет роль резонатора распределенной обратной связи. В режиме слабого усиления получены выражения для порогов генерации с учетом многократного рассеяния и для случая прохождения частиц в тонкой цели внутри кристалла. Показано, что применение неодномерной геометрии позволяет добиться заметного уменьшения порога генерации по сравнению с одномерной геометрией. Оценки показывают, что для реализации рассматриваемой схемы необходимо увеличение яркости электронного пучка в накопительных кольцах более чем на порядок.

Введение

На основе явлений индуцированного излучения в магнитостатическом виглере на сегодняшний день успешно действуют лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) в диапазоне от инфракрасного до мягкого ультрафиолетового излучения. Потенциальная возможность перенесения принципов ЛСЭ на рентгеновский диапазон была осознана и обсуждалась еще в пионерской работе [1]. В последние годы эта задача исследовалась в значительном числе работ [2—4]. Основная трудность для достижения генерации в рентгеновском диапазоне связана с падением усиления ЛСЭ при укорочении длины волны излучения

$$G \sim \lambda^{3/2}. \tag{1}$$

Компенсация падения усиления в принципе может быть достигнута за счет увеличения добротности резонатора. Напомним, что порог генерации в режиме слабого усиления, например для резонатора Фабри—Перо, составляет

$$G_t \simeq \frac{1}{R^2} - 1 . \tag{2}$$

где R — коэффициент отражения зеркала.

Из (2) видно, что при $1 - R \ll 1$ генерация может возникать и для $G \ll 1$.

Согласно экспериментам на многослойных структурах [5], а также расчетам для изогнутых металлических поверхностей [6] и многофасеточных отражателей [7], максимальная величина коэффициента отражения в диапазоне $\lambda \sim 100$Å составляет $R \sim 0.6$. В соответствии с (2) это требует усиления $G_t \sim 1.8$. В работах [3, 4] оцениваются параметры, необходимые для получения усиления $G \simeq 1$ в ЛСЭ с электромагнитным виглером в диапазоне длин волн $\lambda = 100 \div 500$ Å. Оценки показывают, что для такого усиления требуется очень высокое качество пучка, на сегодняшний день еще не достигнутое. В диапазоне $\alpha \sim 1$ Å существует созданное самой природой рентгеновское зеркало-кристалл. Для отражения назад коэффициент отражения кристалла может достигать величин $R \sim 0.95$, что соответствует пороговому усилению $G_t \sim 0.1$. Это уменьшение порога недостаточно велико, чтобы компенсировать падение усиления, составляющее, согласно (1), три порядка по сравнению с мягким рентгеном. Однако кристалл может быть использован не только как зеркало в резонаторе Фабри—Перо. Он может служить также резонатором распределенной обратной связи (РОС). При этом активная среда пространственно совмещена с элементом обратной связи (обратная связь обеспечивается отражением излучения от кристаллических плоскостей, играющих в этом случае роль, аналогичную роли зеркал в резонаторе Фабри—Перо). Само понятие РОС было введено в [8] применительно к оптическому диапазону. Возможность использования кристалла в качестве резонатора РОС для рентгеновского лазера впервые была отмечена в [9]. Во всех работах по РОС лазерам традиционно рассматривается одномерная геометрия, когда вектор $\boldsymbol{\tau}$ обратной решетки периодической структуры коллинеарен волновому вектору $\mathbf{k}$ волны (отражение назад). В работе [10] впервые высказана идея использования неодномерной РОС для уменьшения порогового усиления в рентгеновском лазере на пучке релятивистских каналированных в кристалле частиц. Согласно [11], аналогичная ситуация имеет место для любых типов ЛСЭ. Отражение под произвольным углом (векторы $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\tau}$ неколлинеарны) дает возможность изменения длины волны излучения при изменении угла падения. Поскольку порог генерации в кристалле имеет как функция длины волны резкий минимум, то эта свобода, сама по себе достаточно важная, оказывается тем более существенной. Так, значение порога генерации в минимуме составляет, согласно нашим оценкам, $G_t \sim 5\cdot 10^{-4}$, что заметно меньше, чем отражение назад. В разделе 1 изложены постановка задачи, ее кинематика и геометрия, получено общее дисперсионное уравнение. В разделе 2 записаны граничные условия и условие генерации, в разделе 3 получены выражения для порогов генерации. В разделе 4.1 проведено обсуждение смысла формул для порогов генерации, в разделе 4.2 сделаны оценки пороговых токов при учете многократного рассеяния в среде. В разделе 4.3 проводится обсуждение параметров задачи для пучка, распространяющегося внутри узкой щели в кристалле. Наши оценки показывают, что главным препятствием к получению индуцированного излучения при помощи обсуждаемой схемы является недостаточное качество существующих электронных пучков.

1. Дисперсионные уравнения

Пусть пучок электронов со средней скоростью $\mathbf{u}_0$ проходит через трехмерно-периодическую среду (кристалл, объемная решетка), помещенную во внешнее поле. Векторный потенциал внешнего поля записывается в одной из двух следующих формул: 1) магнитостатический виглер

$$\mathbf{A} = A_w \mathbf{x} \sin \mathbf{k}_w \mathbf{r},\ A_w = B_w/k_w,\ k_w = 2\pi/\lambda_w,\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_0 = 0,$$

где B_w — среднеквадратическая напряженность магнитного поля, λ_w — длина волны виглера ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — орты декартовой системы координат); 2) электромагнитный виглер

$$\mathbf{A} = A_c\, \mathbf{x} \sin(\mathbf{k}_e \mathbf{r} - w_e t),\ A_e = E_e/w_e\ \ (c = 1),$$

где E_e — амплитуда напряженности электрического поля электромагнитной волны, w_e и $\mathbf{k}_e$ — соответственно ее частота и волновой вектор.

Внешнее поле возбуждает колебания электронов с поперечной скоростью

$$\mathbf{v}_\perp = -\frac{e\mathbf{A}}{m\gamma_0},\ \gamma_0 = (1 - v_0^2)^{-1/2}.$$

Движущийся осциллятор испускает электромагнитные излучения, частота ω и волновой вектор $\mathbf{k}$ которого удовлетворяют условию синхронизма:

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{\parallel} = \Omega\ ,\ \Omega = \begin{cases} \mathbf{k}_w \mathbf{u}_{\parallel} & \text{(для магнитостатического вигглера)}, \\ \omega_e + \mathbf{k}_e \mathbf{u}_{\parallel} & \text{(для электромагнитного вигглера)}, \end{cases} \tag{3}$$

где продольная скорость электрона $u_{\parallel} = u_0(1 - a_w^2/\gamma^2)$ (соответствующий ей продольный лоренц-фактор $\gamma_{\parallel}^p = \gamma^2/(1 + a_w^2)$, $a_w = (e\,|\mathbf{A}|)\,/m$ — так называемый ондуляторный параметр, $k = n(\omega)\omega$, $k_e = n(\omega_e)\omega_e$, $|n(\omega) - 1| << 1$.

Из (3) следует

$$\omega = \Omega / \left(\frac{1}{2\gamma_{\parallel}^2} + \frac{\theta^2}{2} + 1 - n(\omega) \right) >> \Omega,$$

где $\theta = \mathbf{k},\mathbf{u}$ — угол излучения, который мы в дальнейшем положим равным нулю.

Ориентируя кристалл и выбирая соответствующим образом параметры задачи, можно добиться, чтобы для некоторой системы кристаллических плоскостей (характеризуемой вектором обратной решетки $\boldsymbol{\tau}$) выполнялось условие Вульфа—Брэгга $(\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau})^2 - \mathbf{k}^2 = 0$. При выполнении этого условия кристалл становится резонатором РОС. Одновременно удовлетворение кинематическим условиям — синхронизма и Вульфа—Брэгга приводит к возможности индуцированного излучения.

Система уравнений Максвелла и уравнений движения, описывающая излучательную неустойчивость пучка в кристалле, имеет вид [12]

$$rot\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j},\ rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\ div\mathbf{D} = 4\pi\rho,\ div\mathbf{B} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{6}$$

Здесь е — заряд электрона; E, B, D — векторы напряженности электрического, индукции магнитного и индукции электрического поля в кристалле соответственно; $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ — плотности электрического заряда и электрического тока пучка, связанные следующим образом с функцией распределения по координатам и импульсам:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = en_0 \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, d^3p\ ,\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = en_0 \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, d^3p, \tag{7}$$

где n_0 — плотность числа частиц.

Индукция электрического поля D в рентгеновском диапазоне частот может быть записана с учетом трехмерной периодичности кристалла в виде

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \iint d\mathbf{r}' dt' \chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t')\, \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \tag{8}$$

где

$$\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') = \int d\mathbf{k}\, d\omega \sum_{\tau} \chi_{\tau}(\mathbf{k}, \omega)\, e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\boldsymbol{\tau}\mathbf{r} - i\omega t}, \tag{9}$$

$$\chi_{\tau}(\mathbf{k}, \omega) = -\delta(\mathbf{k}) \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \frac{1}{\Omega_0} \sum_n e^{i\boldsymbol{\tau}\mathbf{R}_n} e^{-\frac{1}{2}W(\boldsymbol{\tau})} \left\{ F_n(\boldsymbol{\tau}) + \Delta f'(\omega) + \Delta f''(\omega) \right\}, \tag{10}$$

где Ω_0 — объем элементарной ячейки; R_n — координата n-го атома в ней; $W(\boldsymbol{\tau})$ — фактор Дебая—Уоллера; $F_n(\boldsymbol{\tau})$ — структурный фактор; $\Delta f'(\omega)$, $\Delta f''(\omega)$ — аномальные дисперсионные поправки [13].

Уравнения Максвелла удобнее записать в фурье-пространстве. Из (4), (8), (9) следует система уравнений, соответствующая набору векторов обратной решетки,

$$(\omega^2 - k_h^2)\,\mathbf{E}_h + \mathbf{k}_h(\mathbf{k}_h\cdot\mathbf{E}_h) + \omega^2\sum_\tau \chi_{h-\tau}\mathbf{E}_\tau = -\,4\pi i\omega\,\mathbf{j}(\mathbf{k}_h,\omega), \tag{11}$$

где $\mathbf{k}_h = \mathbf{k} + \mathbf{h}$, $\mathbf{E}_h = \mathbf{E}(\mathbf{k}+\mathbf{h},\omega)$, а суммирование идет по векторам обратной решетки.

При условии, что соотношение Вульфа—Брэгга выполнено только для одного вектора обратной решетки, система уравнений (11) сводится к двум уравнениям для полей (двухволновое приближение [13]). Можно показать, что при выполнении условия

$$\begin{gathered}\left(\omega^2(1+\chi_0) - k^2\right)\left(\omega^2(1+\chi_0) - k_\tau^2\right) - \omega^4\chi_\tau\chi_{-\tau} \ll \left(\omega^2(1+\chi_0) - k^2\right)\times \\ \times\left(\omega^2(1+\chi_0) - k_\tau^2\right) - (\mathbf{k}\mathbf{k}_\tau)^2\chi_\tau\chi_{-\tau}\end{gathered} \tag{12}$$

имеют место соотношения $\mathbf{E} \simeq \mathbf{e}_\sigma E$, $\mathbf{E}_\tau \simeq \mathbf{e}_\sigma E_\tau$, $E = \mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_\sigma$, $E_\tau = \mathbf{E}_\tau\cdot\mathbf{e}_\sigma$, $\mathbf{e}_\sigma = (\mathbf{k}\times\mathbf{k}_\tau)/|\mathbf{k}\times\mathbf{k}_\tau|$ — орт σ-поляризации. Скалярные амплитуды удовлетворяют при этом системе уравнений

$$\left(k^2 - \omega^2(1+\chi_0)\right)E - \omega^2\chi_{-\tau}E_\tau = 4\pi i\omega j_\sigma, \tag{13а}$$

$$\begin{gathered}-\omega^2\chi_\tau E + \left(k_\tau^2 - \omega^2(1+\chi_0)\right)E_\tau = 4\pi i\omega j_{\tau\sigma}, \\ j_\sigma = \mathbf{j}(\mathbf{k},\omega)\cdot\mathbf{e}_\sigma,\ j_{\tau\sigma} = \mathbf{j}(\mathbf{k}_\tau,\omega)\cdot\mathbf{e}_\sigma.\end{gathered} \tag{13б}$$

Выберем систему координат так, чтобы плоскость yz совпадала с плоскостью дифракции. В этом случае $\mathbf{e}_\sigma = \mathbf{x}$.

Для построения линейной электродинамики системы достаточно решить уравнения движения в линейном по полю излучения приближении. Используя модель бесконечно широкого пучка, запишем

$$f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = f_0(\mathbf{p}) + \sigma f(\mathbf{r},\mathbf{p},t),\ \sigma t\sim E,\ \sigma f \ll f_0. \tag{14}$$

Из (6), (14) следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\sigma f + \frac{d\mathbf{p}}{dt}\frac{df_0}{d\mathbf{p}} = 0. \tag{15}$$

Совершим преобразование Фурье-уравнения (15) и выражения (7) для тока. Выразим возмущение функции распределения из (15) через $E(\mathbf{k},\omega)$ (с учетом (4), (6)) и подставим его в (13). При условии, что разброс по скоростям $\mathbf{v}_{th}$ удовлетворяет соотношениям:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{th} \ll \Omega,\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{th} \ll \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{u}_0, \tag{16}$$

получим дисперсионное уравнение в виде

$$\begin{gathered}\left[k^2 - \omega^2\left(1+\chi_0 - p^3 I(\mathbf{k},\omega)\right)\right]\left[k_\tau^2 - \omega^2(1+\chi_0)\right] - \omega^4\chi_\tau\chi_{-\tau} = 0, \\ I(\mathbf{k},\omega) = \omega\int\frac{df_0}{du}\frac{du}{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{s})u - \omega + \Omega},\ \mathbf{s} = \mathbf{u}/u,\ p^3 = \frac{\omega_p^2 a_w^2}{2\omega^2\gamma^3\gamma_\parallel^2},\end{gathered} \tag{17}$$

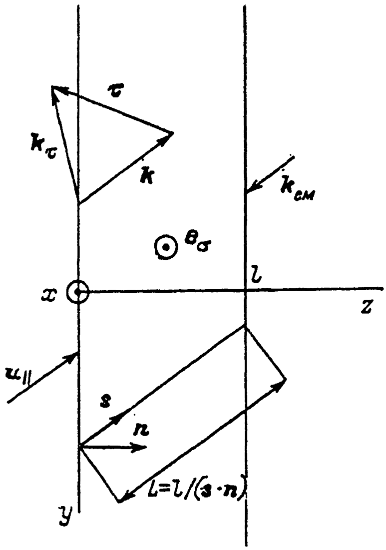

Рис. 1. Геометрия задачи.

p — так называемый параметр Пирса, определяющий взаимодействие электромагнитной волны с пучком; $\omega_p^2 = (4\pi e^2 - n_0)/m$ — плазменная частота пучка.

Заметим, что для выполнения (16) достаточно лишь $\Delta\gamma/\gamma \ll 1$. Соотношение (12) не выполняется для отражения назад $\mathbf{k}_\tau \simeq -\mathbf{k}$. Однако в выбранной нами геометрии $\mathbf{u}_\parallel \cdot \mathbf{x} = 0$, $\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{x} = 0$, $\theta = 0$ как дисперсионное уравнение (17), так и все последующие результаты можно применять и для рассеяния назад.

Пусть кристалл имеет форму плоскопараллельной пластинки толщины l. Длину пути частицы внутри кристалла обозначим через $L = l/(\mathbf{s}\cdot\mathbf{n})$, где $n = \mathbf{z}$ — единичный вектор нормали к поверхности кристалла (рис. 1). В настоящей работе мы рассмотрим только случай слабого усиления, когда $k^{\shortparallel}L << 1$, где $k^{\shortparallel}$ — мнимая часть решения дисперсионного уравнения (17). В дальнейшем мы исследуем случай, когда разброс пучка по скоростям удовлетворяет условию

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_{\text{th}} \ll 1/L. \tag{18}$$

Назовем этот случай режимом "горячего" пучка (отметим, что благодаря $L|\boldsymbol{\tau}|$, $L\Omega >> 1$ условия (16) и (18) согласуются). Проделав интегрирование в (17), находим дисперсионное уравнение в режиме "горячего" пучка

$$\left[k^2 - \omega^2\left(1 + \chi_0 + \frac{2p^3}{v_{th}^3}\left(1 - i\sqrt{\pi}\frac{(\mathbf{k}\mathbf{u}_0 - \omega + \Omega)}{v_{th}}\right)\right)\right](\,k_\tau^2 - \omega^2(1+\chi_0)) - \omega^4\chi_\tau\chi_{-\tau} = 0.$$

При вычислении интеграла по скоростям (17) мы использовали гауссову функцию распределения

$$f_0(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,v_{th}}\,e^{-(u-u_0)^2/v_{th}^2}$$

и полагали, что

$$\frac{|\mathbf{k}\boldsymbol{\omega} - \Omega + \Omega\,|}{v_{th}} \ll 1.$$

2. Граничные условия. Условия генерации

Пусть волновой вектор падающей волны $\mathbf{k}_0 = \omega \mathbf{s}$. Из непрерывности волнового поля на границе следует, что волновой вектор внутри кристалла $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \omega\varepsilon\,\mathbf{n}$, причем в силу $|\chi_0|$, $|\chi_\tau| << 1$ имеет место $\varepsilon << 1$. Вводя обозначения $\gamma_0 = \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{n} / \omega$, $\gamma_1 = (\mathbf{k}_0 + \boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{n} / \omega$, $\beta = \gamma_0 / \gamma_1$, $\alpha = [(\mathbf{k}_0 + \boldsymbol{\tau})^2 - \omega^2] / \omega^2$, $\chi_1 = \chi_0 - \alpha$, $\delta = \gamma_0\,\varepsilon$, $\delta = (1-u_0) - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)$, перепишем в более удобном виде дисперсионное уравнение

$$\left(\delta + |\beta|\frac{\chi_1}{2}\right)\left(\delta\left(1 + \frac{2i\sqrt{\pi}\,p^3}{v_{th}^3}\right) - \frac{\chi_0}{2} - \frac{2p^3}{v_{th}^2}\left(1 + i\sqrt{\pi}\,\frac{\delta_0}{v_{th}}\right)\right) + \frac{|\beta|\chi_\tau\chi_{-\tau}}{4} = 0. \quad (19)$$

Записывая уравнение (19), мы учли, что в рассматриваемой нами геометрии Брэгга (дифрагированная волна выходит через входную поверхность кристалла) $\beta<0$.

Решение относительно δ дисперсионного уравнения (19) дает поправку к вакуумной величине волнового вектора, обусловленного взаимодействием электромагнитной волны с кристаллом и пучком. Общее решение, описывающее рассеяние внешней волны с напряженностью поля $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega t)}$, на системе кристалл—пучок имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega t)} \sum_{j=1}^{2} (E_j + E_{\tau_j} e^{i\boldsymbol{\tau}\mathbf{r}}) e^{i\delta_j \omega z / \gamma_0}, \quad (20)$$

причем в соответствие с (13б)

$$E_{\tau_j} = E_j \frac{\chi_\tau}{2\delta_j + |\beta|\chi_1}. \quad (21)$$

Для нахождения амплитуд полей внутри кристалла необходимо использовать граничные условия. В геометрии Брэгга этими условиями являются 1) непрерывность поля E на входной границе

$$\sum_{j=1}^{2} = E_j = E_0, \quad (22)$$

2) непрерывность поля E_τ на выходной границе, которая с учетом (21) приводит к

$$\sum_{j=1}^{2} E_j e^{i\delta_j \omega L} / (\delta_j + |\beta|\,\frac{\chi_1}{2}) = 0. \quad (23)$$

Решение (22), (23) имеет вид

$$E_1 = \frac{E_0 e^{i\delta_2 \omega L}(\delta_1 + |\beta|\chi_1 / 2)}{D},$$

$$E_2 = -\frac{E_0 e^{i\delta_1 \omega L}(\delta_2 + |\beta|\chi_1 / 2)}{D}, \quad (24)$$

$$D = (\delta_1 + |\beta|\chi_1 / 2) e^{i\delta_2 \omega L} - (\delta_2 + |\beta|\chi_1 / 2) e^{i\delta_1 \omega L} \quad (25)$$

Если знаменатель в (24) обращается в нуль, то даже при нулевой амплитуде падающего извне поля E_0 амплитуды E_1, E_2 внутри кристалла могут быть ненулевыми. Это соответствует явлению самовозбуждения (генерации), возникающему благодаря наличию РОС. Поэтому уравнение $D = 0$ будем называть условием генерации.

3. Порог генерации

Напомним, что фурье-компоненты поляризуемости кристалла имеют следующий вид:

$\chi_0 - |\chi'_0| + i|\chi''_0|, \chi_{\pm\tau} = -|\chi'_{\pm\tau}| + i|\chi''_{\pm\tau}|, |\chi''_0|, |\chi''_\tau| << |\chi'_0|, |\chi'_\tau|$.

Взаимодействие рентгеновской волны с кристаллом и пучком характеризуется рядом безразмерных параметров. Так, параметры $|\chi'_0|$, $|\chi'_\tau|$ определяют преломление и отражение волны кристаллическими плоскостями, параметры $|\chi''_0|$, $|\chi''_\tau|$ — поглощение волны веществом кристалла, параметр Пирса p — усиление волны за счет взаимодействия с электронным пучком. Между ними имеет место следующее соотношение:

$$p,\ |\chi''_0|,\ |\chi''_\tau| << \frac{1}{\omega L} << |\chi'_\tau|,\ |\chi'_0| << 1. \tag{26}$$

Исследуем далее случай, когда для корней дисперсионного уравнения (19) выполняется условие

$$\sqrt{|\chi''_0||\chi'_\tau|} << \delta'_2 - \delta'_1 << |\chi'_\tau|. \tag{27}$$

Как видно из (19), это условие реализуется вблизи следующих значений параметра α:

$$\alpha_\pm = \frac{1}{|\beta|}\left(\pm 2\sqrt{|\beta|}\ |\chi'_\tau| - |\chi'_0|(1 + |\beta|) + \frac{4p^3}{v_{th}^3}\right), \tag{28}$$

т. е. вблизи краев полосы непропускания ($p^3 / v_{th}^3 << |\chi'_\tau|$).

Решения условия генерации с учетом (26), (27) имеют вид 1) при $\alpha \simeq \alpha_+$

$$\frac{2\sqrt{\pi}\ p^3}{v_{th}^3}(\delta_+ - \delta_0)\omega L = \mu_+\omega L + \frac{8\pi^2 n^2}{\omega^2 L^2 |\chi'_\tau|^2 |\beta|}, \tag{29}$$

2) при $\alpha \simeq \alpha_-$

$$\frac{2\sqrt{\pi}\ p^3}{v_{th}^3}(\delta_- - \delta_0)\omega L = \mu_-\omega L + \frac{8\pi^2 h^2}{\omega^2 L^2 |\chi'_\tau|^2 |\beta|}, \tag{30}$$

где

$$\delta_\pm = \pm\frac{|\chi'_\tau|\sqrt{|\beta|}}{2} - \frac{|\chi'_0|}{2},\ \mu_\pm = |\chi''_0|\frac{(1 + |\beta|)}{2} \pm |\chi''_\tau|\sqrt{|\beta|}.$$

Уравнения (29), (30) являются амплитудными условиями генерации. Кроме того, для удовлетворения условию генерации требуется выполнение фазового условия

$$\delta'_1 = \delta'_2 = \frac{2\pi n}{\omega L},\ n = 1,2,\dots . \tag{31}$$

4. Обсуждение

4.1. Анализ условий генерации. Условие (31) приводит к тому, что продольная структура собственных мод оказывается близкой по форме к стоячей волне, т. е.

$$|E|^2,\ |E_\tau|^2 \sim \cos^2 \frac{2\pi n}{\omega L}(z-L).$$

Это условие, таким образом, аналогично хорошо известному условию возникновения стоячей волны в зеркальном резонаторе. Обсудим смысл формул (29), (30). Первое слагаемое в правой части формул представляет собой коэффициент поглощения на краях запрещенной области $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$. На рис. 2 показано стандартное графическое представление решения граничной задачи дифракции [13]. На кристалл падает из вакуума волна с волновым вектором $\mathbf{k}_0$, проведен перпендикуляр к границе кристалла (сфера Лауэ, имеющая центр в начале координат обратной решетки и радиус $|\mathbf{k}_0| = \omega$, показана на рис. 2 штриховой линией). Каждая точка пересечения этого перпендикуляра с гиперболой отвечает волновому вектору $\mathbf{k}$ внутри кристалла, соответствующему вектору $\mathbf{k}_0$ падающей волны. Прямые, перпендикулярные границе, проведены на рис. 2 так, что расстояние между точками пересечения с гиперболами составляет $\delta'_2 - \delta'_1 = 2\pi / \omega L$, т. е. соответствует условию (31). Поскольку расстояние между вершинами гипербол порядка $|\chi'_\tau|$, а $2\pi / \omega L << |\chi'_\tau|$, то секущие перпендикуляры, изображенные в реальном масштабе, выглядели бы касательными к гиперболам. На рис. 2 представлена также зависимость показателя поглощения μ от значения α отклонения от точного условия Вульфа—Брэгга. Разница в величине поглощения между случаями $\alpha=\alpha_+$ и $\alpha=\alpha_-$ наиболее ярко проявляется при симметричной дифракции $|\beta|=1$, а именно поглощение в случае $\alpha=\alpha_+$ оказывается значительно меньше, чем в случае $\alpha=\alpha_-$ (для основных отражений $|\chi''_0| \simeq |\chi''_\tau|$). Это отражает известный факт асимметрии показателя поглощения при отражении по Брэгту, когда интерференция волн E, E_τ приводит к образованию стоячей волны либо с узлами на кристаллических плоскостях ($\alpha=\alpha_+$ — аномальное прохождение), либо с пучностями на кристаллических плоскостях ($\alpha=\alpha_-$ — аномальное поглощение) [13].

Второе слагаемое в правой части (29), (30) равно (при выполнении (31)) отношению плотности энергии электромагнитного поля, теряемой в единицу времени через границы кристалла, к средней плотности энергии внутри резонатора РОС. Аналогом этих потерь в обычном зеркальном резонаторе являются потери, обусловленные отличием от единицы коэффициента отражения зеркал. Левая часть формул (29), (30) представляет собой коэффициент слабого

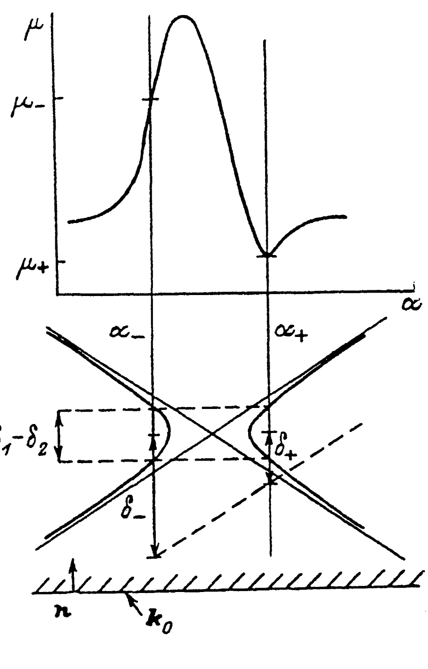

Рис. 2. Амплитуды волновых векторов собственных мод задачи и их коэффициенты поглощения.

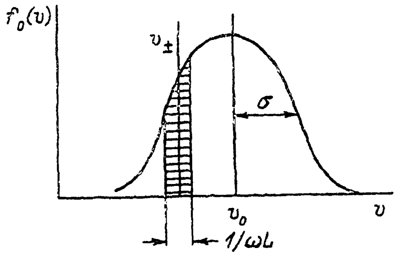

Рис. 3. Функция распределения пучка и область резонансного взаимодействия с пондеромоторной волной, имеющей фазовую скорость $u_\pm$.

усиления в режиме горячего пучка. Стоящая в скобках величина $\delta_\pm - \delta_0 = u_0 - u_\pm$, $u_\pm = \omega / (k_\pm + k_w)$, т. е. является разностью между средней скоростью пучка и фазовой скоростью волны пондеромоторного потенциала (рис. 3). Выполнение условий генерации возможно только при $u_0 > u_\pm$. Смысл этого соотношения очевиден. Действительно, частицы, имеющие скорости $u > u_+$, усиливают волну, а $u < u_\pm$ — поглощают волну. Поскольку при $u_0 > u_\pm$ число частиц с $u > u_\pm$ больше, чем с $u < u_\pm$, то разностным эффектом является усиление волны. Величины векторов $k_\pm = \omega(1+\delta_\pm)$, определяющих фазовую скорость пондеромоторного потенциала, соответствуют краям поглощения (поправки $\delta_\pm$ к вакуумному значению волнового вектора показаны на рис. 2). Таким образом, смысл пороговых условий (29), (30) совершенно естествен: рост поля за счет усиления в активной среде равен потерям на поглощение и "вытекание" энергии через границы.

Построенная нами теория предполагает возможность пренебрежения интегралом столкновения в кинетическом уравнении (5). Такое приближение успешно используется, например, в плазменной электронике. В кристалле, где плотность рассеивателей на много порядков выше, чем в плазме, применимость такого приближения ограничена. Найдем максимальную длину L, на которой еще допустимо пренебрежение интегралом столкновений.

4.2. Влияние многократного рассеяния. В результате многократного упругого рассеяния на атомах кристалла электроны пучка изменяют направления движения. Средняя величина квадрата угла многократного рассеяния определяется формулой

$$\theta_s^2 = \frac{E_s^2}{m^2\gamma^2}\frac{z}{L_R}, \tag{32}$$

где $E_s = 21$ МэВ, L_R — радиационная длина, z — глубина проникновения электронов в кристалл.

Величина средней продольной скорости в свою очередь изменяется в соответствии с формулой

$$u_\parallel = u_\parallel(0)\,\left(1 - \frac{\theta_s^2(z)}{2}\right).$$

В усилении (поглощении) волны в этом случае принимают участие только "резонансные" частицы пучка, т. е. те, которые находятся в слое толщины $\Delta u \sim 1/\omega L$ вокруг $u_\pm$. Может показаться, что как только "резонансные" частицы выйдут благодаря столкновениям из этого слоя (т. е. при $\theta_s^2(z) \sim 1/\omega z$) усиление прекратиться. Надо, однако, учитывать, что в резонансный слой войдут другие частицы. На рис. 4 схематически показана функция распределения $f_0(u,z)$ после прохождения пучком расстояния z в кристалле. Штриховой линией обозначена начальная функция распределения $f_0(u,0)$. Кроме резонансных частиц (область, закрашенная черным цветом) на функции распределения заштрихована область, содержащая частицы, бывшие резонансными при $z=0$. Проходя через кристалл, функция распределения сдвигается в сторону уменьшения продольной скорости, расплываясь по ширине (это показано стрелкой на рис. 4). Очевидно, что усиление будет преобладать над поглощением до тех пор, пока

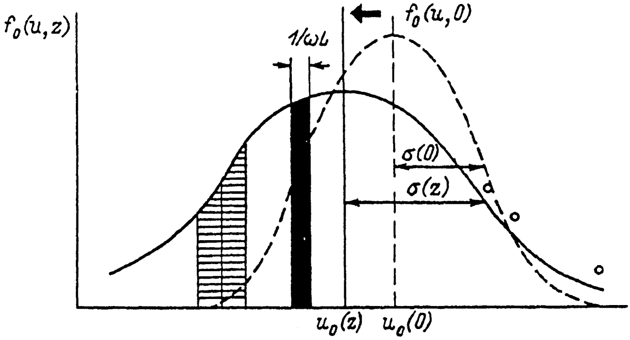

Рис. 4. Изменение функции распределения и области резонансного взаимодействия с пондеромоторной волной при прохождении пучка электронов через среду.

$$\theta_s^2\frac{(z)}{2} < u_0(0) - u_\pm. \tag{33}$$

Для оценки по порядку величины положим $u_0 - u_\pm \sim v_{th}(0)$ и, используя (32), (33), найдем следующее ограничение на длину пути в кристалле в режиме горячего пучка:

$$L < \frac{m^2\gamma^2}{E_s^2}\ L_R v_{th}(0). \tag{34}$$

Оценим пороговый ток, соответствующий (34). При оценках используем параметры кристалла LiH. Коэффициент поглощения в нем один из минимальных, а радиационная длина одна из максимальных среди известных кристаллов. Это обеспечивает минимальную пороговую плотность тока. При оценке ЛСЭ на электромагнитном виглере надо учитывать, что напряженность поля оптической волны ограничена стойкостью кристалла к лазерному разрушению. Напряженность поля накачки выберем $E_e = 5.4\cdot 10^4$ Гс. Эта напряженность соответствует кристаллическому полю для разрушения кристалла LiF (наиболее близкое к LiH вещество, исследованное на лазерное разрушение) на длине волны $\lambda=1$ мкм [16]. В рассматриваемой нами постановке задачи имеется возможность изменения рабочей частоты резонатора РОС $\omega = \tau / 2\cos(\mathbf{u}_\parallel\cdot\boldsymbol{\tau})$ при изменении угла между $\mathbf{u}_\parallel$ и $\boldsymbol{\tau}$. Учитывая эту возможность, запишем параметры кристалла в виде $|\chi'_\tau| = \omega_\tau^2/\omega^2$, $|\chi''_0| \simeq \mu/\omega^4$, $\omega_\tau^2 = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$, $W = 0.143$ — фактор Дебая—Уоллера [13].

Значения констант $\mu = 0.18\cdot 10^{24}$ $см^{-4}$ и $\omega_\tau^2 = 0.28\cdot 10^{12}$ $см^{-2}$, которые мы будем использовать в дальнейшем, получены с помощью расчета комплексной восприимчивости кристалла LiH на ЭВМ.

Подставляя (34) в (29), пренебрегая потерями на поглощение и используя соотношение j [А/см^2]$=1.7\cdot 10^3\,\omega_p^2$ [см$^{-2}$], находим для порогового тока

$$j\left[\frac{\text{А}}{\text{см}^2}\right] > 4\cdot 10^{14}\ \frac{\omega^3\gamma^2}{\Delta\gamma a_w^2 L_R^2 \omega_\tau^4}.$$

Подстановка численных значений параметров приводит к

$$j\left[\frac{\text{A}}{\text{см}^2}\right] > \frac{10^{16}}{a_w^2\lambda^3[\AA]}.$$

Для длины волны излучения $\lambda = 1\,\AA$ и характерных значений $a_c = 5\cdot 10^{-4}$ для электромагнитного и $a_w = 1$ для магнитостатического вигглеров получаем соответственно $j_e > 4\cdot 10^{22}$ А/см^2, $j_w > 10^{16}$ А/см^2. Безнадежность схемы, требующей таких плотностей тока, не требует комментариев.

Губительного воздействия многократного рассеяния можно избежать, если пропускать пучок через щель в кристалле. Известно, что при диаметре отверстия $d < \lambda\gamma_{\|}$ взаимодействие пучка с полем излучения происходит так же, как и в сплошной среде [17]. Оценим пороговые характеристики в этом случае.

4.3. Оценки параметров для порога генерации в щели. Прежде чем перейти непосредственно к оценкам, напомним, что для применимости формулы (29) продольный разброс по скоростям должен удовлетворять условию $\Delta v > \Delta v_{cr}$, $\Delta v_{cr} \simeq 1/\omega L$. Удобно переписать это условие в виде

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma_{\|}} > \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_{\|}}\right)_{cr}, \quad \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_{\|}}\right)_{cr} = \gamma_{\|}^2\,\frac{1}{\omega L}.$$

В дальнейшем мы положим для определенности

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_{\|}}\right) = 5\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_{\|}}\right)_{cr}. \tag{35}$$

Наличие связи между продольным и поперечным движением в ЛСЭ накладывает ограничения и на поперечный угловой разброс. Удобно сопоставить с угловым разбросом соответствующий энергетический разброс $(\Delta\gamma/\gamma_{\|})_\varepsilon = \gamma_{\|}^2\langle\theta^2\rangle/2$ и записать условие пренебрежения угловым разбросом в виде $(\Delta\gamma / \gamma_{\|})_\varepsilon \le \Delta\gamma / \gamma_{\|}$, где $\Delta\gamma / \gamma_{\|}$ определяется формулой (35).

Ни плотность тока, ни разброс $(\Delta\gamma / \gamma_{\|})_\varepsilon$ не могут являться сами по себе характеристиками качества электронного пучка, поскольку эти величины не являются инвариантами ускорителя. Однако, зная их, можно получить инвариантную характеристику ускорителя — нормализованную яркость пучка

$$B_n = \frac{I}{\pi^2\varepsilon_n^2} = \frac{j}{2\pi(\Delta\gamma_{\|} / \gamma_{\|})_\varepsilon}, \tag{36}$$

где I — ток, $\varepsilon_n = \gamma r\langle\theta\rangle$ — нормализованный эмиттанс, r — радиус пучка.

Из (29), (35), (36), подставляя параметры кристалла LiH, получим следующую формулу для пороговой нормализованной яркости пучка:

$$B_n\left[\frac{\text{A}}{\text{см}^2\cdot\text{рад}^2}\right] = 1.35\cdot 10^6\,\frac{\tilde{\lambda}_w^{3/2}[\text{мкм}]\,\lambda^{3/2}[\AA]}{L[\text{см}]}\,\frac{(1 + a_e^2)^{3/2}}{a_e^2}\times$$
$$\times\left((1 + |\beta|)/2 - e^{-w}\sqrt{|\beta|} + 0.073/\lambda^5\,[\AA]\,L^3\right), \tag{37}$$

где

$$\tilde{\lambda}_w = \begin{cases} \lambda_w & \text{— для магнитостатического вигглера,} \\ \dfrac{\lambda_e}{1 + n(\lambda_e)\,u_0} & \text{— для электромагнитного вигглера.} \end{cases}$$

Ускоритель				Виглер		Параметры дифракции			
Енергия E, ГэВ	Нормализованная яркость B_n, $\frac{А}{см^2 \cdot рад^2}$	Энергетический разброс $\frac{\Delta\gamma}{\gamma}$	Плотность тока j, А/см^2	Длина волны, λ_w, мм	Напряженность поля B_w, кГс	Плотность дифракции, LiH	Параметр асимметрии, $\lvert\beta\rvert$	Ширина щели в кристалле a, Å	Длина волны излучения λ, Å
5	$2 \cdot 10^9$	$7.5 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^7$	1	17.5	(220)	9	860	0.15

В случае магнитостатического виглера не удается использовать преимущество симметричной дифракции — эффект Бормана. Рассмотрим условие синхронизма как уравнение для частоты излучения $(|\chi_0'| = \omega_0^2 / \omega^2)$. Его решение имеет вид

$$\omega = \gamma_R^2 \left(\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - \left(\omega_0^2 - \sqrt{|\beta|}\,\omega_\tau^2\right) / \gamma_R^2} \right),$$

где γ_R — лоренц-фактор, соответствующий скорости v_R резонансных с полем частиц, т. е. таких, для которых $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}) v_R - \omega + \Omega = 0$. Как видно из (43), при $|\beta|=1$ излучение возможно только при $\gamma_R > \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\tau^2} / \Omega$. Минимальная возможная частота излучения в симметричном случае заметно превышает частоту, соответствующую минимуму яркости. Это делает нецелесообразным использование симметричной дифракции. Поэтому в проводимых оценках мы положили параметр асимметрии $|\beta| = \omega_0^4 / \omega_\tau^4$. При таком значении $|\beta|$ показатель преломления сравнивается с единицей и ограничение по энергии отпадает. Несмотря на увеличение поглощения по сравнению с симметричным случаем, этот вариант оказывается более предпочтительным. В таблице приведены параметры для случая λ_w=1 мм, что соответствует минимальному реализованному шагу виглера [18]. Полученная пороговая плотность тока (в особенности в случае лазерного виглера) значительно меньше, чем в других предложенных схемах получения индуцированного рентгеновского излучения на релятивистских частицах [21]. Наиболее существенным параметром для реализации режима индуцированного излучения оказывается не плотность тока, а яркость пучка. Значения яркости пучка, приведенные в таблице, не достигнуты в современной ускорительной технике. Для сравнения укажем, что самое высокое значение яркости среди линейных ускорителей составляет $B_n = 10^4$А /см$^2 \cdot$рад^2 [19]. По-видимому, самый яркий пучок среди проектируемых ускорителей рассчитывают получить на накопительном кольце в Lawrense Berkley Laboratory, $B_n = 7 \cdot 10^7$ А/(см$^2 \cdot$рад^2), что все еще на порядок ниже приведенного в таблице (пороговая яркость для лазерного виглера еще больше, чем для магнитостатического, кроме того, требуемые размеры щели в этом случае оказываются слишком малы $d \simeq 70$Å, что делает применение лазерного виглера малоперспективным, во всяком случае с точки зрения современной техники). Что касается параметров магнитного виглера и щели, то они находятся на уровне достижений современной технологии.

Список литературы

[1] *Madey J. M. J.* // J. Appl. Phys. 1971. Vol. 42. N 5. P. 1905—1913.

[2] Free Electron Generation of Extreme Ultraviolet Coherent Radiation / Ed. J. M. J. Madey, C. Pellegrini. AIP Conf. Proc. 1984. N 118.

[3] *Cea-Banacloche J., Moore G. T., Scully O. M.* // Proc. of Free Electron Generators of Coherent Radiation. SPIE. 1984. Vol. 453. P. 393-401.

[4] *Gea-Banacloche J., Moore G. T., Schlichter R. R.* et al. // IEEE J. Quantum Electron. 1987. Vol. QE-23. N 6. P. 1558-1570.

[5] *Barbee T. W., Mrowska S., Hettrick M. C.* // Appl. Opt. 1985. Vol. 24. N 6. P. 883—886.

[6] *Vinogradov A. V., Kozhevnikov I. V., Popov A. V.* // Opt. Commun. 1983. Vol. 47. N 6. P. 361—363.
[7] *Newnam B. E., McVey, Goldstein J. C.* // Nucl. Instrum. and Meth. 1987. Vol. A259.
[8] *Kogelnik H., Shank C. V.* // J. Appl. Phys. 1972. Vol. 43. N 5. P. 2327—2335.
[9] *Yariv A.* // Appl. Phys. Lett. 1974. Vol. 25. N2. P. 105—107.
[10] *Baryshevski V. G., Feranchuk I. D.* // Phys. Lett. 1984. Vol. A102. N 3. P. 141—144.
[11] *Барышевский В. Г., Дубовская И. Я.* Тр. 25-го Всесоюз. совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. М., 1986, С. 60—62.
[12] *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
[13] *Пинскер З. Г.* Рентгеновская кристаллооптика. М.: Наука, 1982. 390 с.
[14] *Colson W. B.* // Phys. Lett. 1977. Vol. A64. N 2. P. 190—192.
[15] *Sturrock P. A.* Phys. Rev. 1958. Vol. 112. N 5. P. 1488—1503.
[16] *Маненков А. А., Прохоров А. М.* // УФН. 1986. Т. 148. № 1. С. 179—211.
[17] *Гинзбург В. Л., Франк И. М.* // ДАН СССР. 1947. Т. 56. № 7. С. 699—702.
[18] *Chen S. C., Bekefi G.* // Appl. Phys. Lett. 1989. Vol. 54. P. 1299—1302.
[19] *Friedman A., Gover A., Kuriski G.* et al. // Rev. Mod. Phys. 1988. Vol. 60. N 2. P. 471—535.
[20] *Adamski J. L., Gallagher W. J., Kennedy R. G.* et al. // Proc. of Free Electron Generation of Coherent Radiation. SPIE. 1984. Vol. 453. P. 59—64.
[21] *Kim K. J., Bisognano J. J., Garren A. A.* et al. // Nucl. Instr. Meth. 1985. Vol. A239. N 1. P. 54—61.

Научно-исследовательский институт
ядерных проблем при Белорусском
государственном университете
им. В. И. Ленина
Минск

Поступило в Редакцию
2 апреля 1990 г.
В окончательной редакции
1 августа 1990 г.