07 Журнал технической физики, т. 62, в. 3, 1992

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ПОЛЕВЫХ СТРУКТУР ДЛЯ МАСС-СЕПАРАЦИИ ИОНОВ

Ю. К. Голиков, К. В. Соловьев

Введение

Конформные преобразования плоскости обладают свойством сохранения структуры уравнения Гамильтона—Якоби, описывающего плоское движение материальной точки в некотором силовом поле. Этот факт, замеченный еще Гурса [1], оказывается весьма плодотворным при синтезе новых корпускулярно-оптических систем [2, 3], поскольку позволяет простыми аналитическими средствами получать как траектории частиц, так и поля в преобразованной системе, решая при этом различные обратные задачи. В данной работе рассмотрены особенности применения метода в случае наличия электрического и магнитного полей, а также указаны приемы построения на этой основе полевых структур, пригодных для сепарации частиц по массам.

Далее используются безразмерные переменные, вводимые соотношениями

$$\mathbf{r} = R\boldsymbol{\rho},\ t = T\tau,\ m = m_0\mu,\ \tilde{\varphi} = \Phi_0\varphi,\ \tilde{\psi} = \Psi_0\psi,$$
$$\tilde{\mathbf{A}} = A_0\mathbf{A},\ \mathbf{E} = E_0\boldsymbol{\varepsilon},\ \mathbf{B} = B_0\boldsymbol{\beta}, \tag{1}$$

где в левой части равенств (1) стоят в указанном порядке размерные величины радиус-вектора, времени, массы, скалярных потенциалов электрического и магнитного полей, векторного потенциала магнитного поля, векторов напряженности электрического поля и магнитной индукции, а справа — произведения соответствующих констант обезразмеривания и безразмерных величин.

Рассмотрение ведется в декартовой системе координат, причем плоскость $X0Y$ совмещена с плоскостью симметрии электрического поля и антисимметрии магнитного поля

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(x,y,z);\quad \psi(x,y,-z) = -\psi(x,y,z). \tag{2}$$

Общий принцип преобразования траекторий и полей

В данном разделе рассматривается движение частицы в плоскости XOY. Условия (2) гарантируют, что если в начальный момент времени частица имела $z{=}0$, $\dot{z}{=}0$, то она будет иметь указанные значения z и $\dot{z}$ и в любой другой момент времени. Второе из условий (2) приводит также к тому, что вектор $\boldsymbol{\beta} = -\nabla\psi$ имеет на плоскости XOY лишь z — компоненту, выраженную через компоненты векторного потенциала $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ следующим образом:

$$\beta_z(x,y,0) = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}. \tag{3}$$

Ввиду произвола в задании $\mathbf{A}$, связанного с градиентной инвариантностью, можно положить

$$A_1 = -\frac{\partial\theta}{\partial y},\ A_2 = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{4}$$

где θ — некоторая дифференцируемая функция x и y.

Заметим, что в этом случае

$$\beta_z(x,y,0) = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Уравнение Гамильтона—Якоби для движения в плоскости XOY имеет с учетом (4) вид

$$(S_x + \theta_y)^2 + (S_y - \theta_x)^2 = 2\mu(\varphi(x,y,0) - w), \tag{6}$$

где w — безразмерная энергия частицы, S — безразмерное действие.

Для удобства дальнейшего рассмотрения введем комплексную переменную $\eta = x + iy$. Используя произвольную аналитическую функцию $\omega = \omega(\eta)$, $\omega = u + iv$, можно преобразовать уравнение (6) в уравнение

$$(\widetilde{S}_u + \widetilde{\theta}_v)^2 + (\widetilde{S}_v - \widetilde{\theta}_u)^2 = -2\mu\Phi(u,v,0), \tag{7}$$

которое легко интерпретировать как уравнение Гамильтона—Якоби с нулевой полной энергией, описывающее плоское движение. Траектории в плоскости UOV являются результатом конформного преобразования исходных траекторий из плоскости $X0Y$; функции потенциала электрического и индукции магнитного полей после преобразования связаны с соответствующими исходными функциями следующими соотношениями:

$$\Phi(u,v,0) = - \left|\frac{d\eta}{d\omega}\right|^2 (\varphi\,(x\,(u,v)\,,\; y\,(u,v)\,,0) - w), \tag{8}$$

$$B(u,v,0) = \left|\frac{d\eta}{d\omega}\right|^2 \beta(\mathrm{x}\,(u,v)\,,\, y\,(u,v)\,,0), \tag{9}$$

где последнее равенство следует из связи

$$B(u,v) = \widetilde{\theta}_{\omega\overline{\omega}} = \theta_{z\overline{z}}\, z_\omega\, \overline{z}_{\overline{\omega}}. \tag{10}$$

Построение новых масс-сепарирующих полевых структур

Новая масс-сепарирующая система полей может быть построена путем конформного преобразования некоторой исходной системы. Поскольку конформное преобразование сохраняет порядок фокусировки, то удобно выбрать в качестве объекта преобразования ортогональные однородные скрещенные поля, обеспечивающие в плоскости идеальную фокусировку по углу и энергии. Движение частицы в поле

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon \mathrm{e_y}, \boldsymbol{\beta} = \beta \mathrm{e_z} \tag{11}$$

описывается уравнениями

$$\ddot{x} = \frac{1}{\mu}\dot{y}\beta, \quad \ddot{y} = \frac{1}{\mu}(\varepsilon - \dot{x}\beta), \quad \ddot{z} = 0 \tag{12}$$

и представляет собой дрейф по координате z и циклоидальное движение в проекции на плоскость XOY

$$\begin{gathered} x = x_0 + \frac{\varepsilon}{\beta}\tau + A\sin\frac{\beta}{\mu}\tau - B(\cos\frac{\beta}{\mu}\tau - 1), \\ y = y_0 + A(\cos\frac{\beta}{\mu}\tau - 1) + B\sin\frac{\beta}{\mu}\tau, \\ z = \dot{z}_0\tau + z_0, \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$A = \frac{\mu}{\beta}(\dot{x}_0 - \frac{\varepsilon}{\beta}), \quad B = \frac{\dot{y}_0\mu}{\beta}. \tag{14}$$

Если $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$, то частица движется в плоскости $X0Y$. Это плоское движение и будет использоваться как исходное для дальнейших трансформаций.

Конформное преобразование, не имеющее особенностей в точках фокусировки системы, сохраняет факт идеальной фокусировки. Однако за счет изменения характера движения и преобразования полей можно удовлетворить требованиям увеличения дисперсии по массе или улучшения качества фокусировки в поперечной плоскости системы.

Для исследования вопроса о поперечной фокусировке в преобразованной системе рассмотрим уравнение, определяющее движение параксиального пучка по координате ζ вблизи прямой $v = 0$, $\zeta = 0$ ($\mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v$)

$$2\Phi_0\zeta'' + \Phi_{0u}\zeta' - \left(\Phi_{0\zeta\zeta} + \frac{\Phi_{0v}\psi_{0\zeta v}}{\Psi_{0\xi}}\right)_\zeta = 0. \tag{15}$$

Обычная замена зависимой переменной

$$\xi = \exp\left(\int_0^u \frac{\Phi_{0u}}{4\Phi_0}\,du\right)\cdot\zeta \tag{16}$$

приводит уравнение (15) к виду

$$\xi'' + Q(u)\xi = 0, \tag{17}$$

где

$$Q(u) = \frac{(4\Phi_{0uu} + 8\Phi_{0w} - 8\Phi_{0u}\psi_{0\zeta v} / \psi_{0\zeta})\Phi_0 + 3\Phi_{0u}^2}{16\Phi_0^2}. \tag{18}$$

Пропорциональность функций ξ и ζ с заведомо ненулевым коэффициентом позволяет однозначно решать вопрос о фокусировке по координате ζ по наличию нулей функции $\xi(u)$. В то же время уравнение (17) более удобно для качественного анализа возможности фокусировки с использованием теорем сравнения [4] в том случае, когда (17) не интегрируется в квадратурах. Дисперсия по массе в преобразованной системе по координате ν связана с дисперсиями по массе в исходной системе следующим образом:

$$\widetilde{D}_{\mu\nu} = \frac{\partial\nu}{\partial x}D_{\mu x} + \frac{\partial\nu}{\partial y}D_{\mu y}, \quad \nu \in \{u,v\}, \tag{19}$$

и повышение дисперсии по сравнению с исходной системой определяется величинами $\partial\nu/\partial x$ и $\partial\nu/\partial y$.

В качестве примера возможного преобразования рассмотрим далее функцию, задаваемую соотношением

$$\eta(\omega) = a\left((\omega+b)^k - b^k\right). \tag{20}$$

В этом случае поля после преобразования будут задаваться в плоскости симметрии-антисимметрии следующими выражениями:

$$\Phi(u,v,0) = a^2k^2\left((u+b)^2 + v^2\right)^{k-1}\times$$
$$\times\left(-\varepsilon\sum_{l=0}^{m} C_{2l+1}^k(-1)^l(v)^{2l+1}(u+b)^{k-2l-1} - W\right), \quad m = [k/2],$$
$$B(u,v,0) = a^2k^2((u+b)^2 + v^2)^{k-1}\,\beta. \tag{21}$$

Координаты траекторий могут быть определены из исходных с помощью формулы

$$\omega = (\eta/a + b^k)^{1/k} - b, \tag{22}$$

где в качестве $\eta=\eta(\omega)$ можно подставить выражение для траектории в плоскости XOY в комплексной форме.

Функция (18) в данном случае будет иметь вид

$$Q(u) = \frac{7k^2 - 12k + 5}{4(u+b)^2} \tag{23}$$

и для переменной ξ даст интегрируемое в элементарных функциях уравнение Эйлера

$$\xi'' + \frac{7k^2 - 12k + 5}{4(u+b)^2}\xi = 0. \tag{24}$$

Функция Q обеспечивает наличие колебательных решений уравнения (24) для $k \in R/[2/7(3-\sqrt{2});\ 2/7(3+\sqrt{2})]$. Эти решения с учетом начального условия $\xi|_{u=0} = 0$ записываются в виде

$$\xi = c\sqrt{u+b}\ [\ -\operatorname{tg}(\gamma\ln b)\cos(\gamma\ln(u+b)) + \sin(\gamma\ln(u+b))\ ], \tag{25}$$

где $\gamma = \sqrt{7k^2 - 12k + 4}\ /\ 2$.

Из уравнения $\xi(u)=0$ находятся точки фокусировки по ζ в параксиальном приближении

$$u_m = b\left(\exp\frac{\pi m}{\gamma} - 1\right),\ m \in Z. \tag{26}$$

Числам $m=0$ и 1 соответствуют значения

$$u_0=0\ ,\ u_1=b\left(\exp\frac{\pi}{\gamma} - 1\right). \tag{27}$$

В плоскости UOV источник расположен в точке $u=0$, идеальная фокусировка осуществляется при

$$u = \left(\frac{2\pi D}{a} + b^k\right)^{1/k} - b, \tag{28}$$

где $D=\mu\varepsilon/b^2$.

Для реализации стигматической фокусировки в системе достаточно выполнения условия

$$b\exp\frac{\pi m}{\gamma} = \left(\frac{2\pi D}{a} + b^k\right)^{1/k}. \tag{29}$$

Таким образом в данной работе приведена методика преобразования полей и потоков произвольной системы, обладающей плоскостью симметрии электрического поля, совмещенной с плоскостью антисимметрии магнитного поля. Дан пример удобной для выполнения дальнейших трансформаций системы и предложено конкретное преобразование, позволяющее создать систему, обладающую улучшенным по сравнению с исходной системой фокусирующими свойствами.

Список литературы

[1] *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1960.
[2] *Голиков Ю. К.* // Труды ЛПИ. № 345. Л., 1975. С. 82—84.
[3] *Голиков Ю. К., Чепарухин В. В.* // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 59. Вып. 2. С. 300.
[4] *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйшая школа, 1974.

С.-Петербургский государственный
технический университет

Поступило в Редакцию
15 января 1991 г.