01;06
© 1992 г.

КОСЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ РЕЖИМА МАГНИТНОЙ ИЗОЛЯЦИИ В ПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

О.И. Василенко

Рассматриваются длинноволновые возмущения односкоростного магнитоизолированного электронного потока в плоской геометрии, распространяющиеся под произвольным углом к направлению скорости пучка, с учетом нелинейных, дисперсионных и дифракционных эффектов. Используется метод разложения по малому параметру зависимых и независимых переменных. Получены выражения для полей и дисперсионное соотношение. Показано, что амплитуда возмущений описывается уравнением Кадомцева—Петвиашвили. Найдены коэффициенты последнего как функции невозмущенного режима.

Введение

Исследование нелинейных волн в линиях с магнитной изоляцией представляет интерес для понимания физики происходящих в них процессов и для изучения возможностей их использования для генерации мощного СВЧ излучения, коллективного ускорения и т. п. Линейные волны в бриллюэновских потоках рассматривались в работах [1-3], причем в [3] анализировались косые возмущения. В работе [4] учитывались нелинейные и дисперсионные эффекты.

В настоящей работе исследуются нелинейные длинноволновые возмущения односкоростного бриллюэновского потока, распространяющиеся под углом к направлению его движения. Учитываются дисперсионные и дифракционные эффекты. Показано, что амплитуда возмущений описывается уравнением Кадомцева—Петвиашвили, имеющим солитонные решения.

Постановка задачи и вывод уравнений

Введем декартову систему координат (X, Y, Z). Рассмотрим полосковую линию, электроды которой параллельны плоскости (Y, Z). Обозначим через X_a, X_k, X_m координаты анода, катода и границы пучок—вакуум соответственно. Считаем, что скорость света, заряд и масса электрона равны единице. Для описания электронного потока используем приближение холодной односкоростной гидродинамики, в которой импульс потока $\mathbf{p}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{p}}{\gamma}, \nabla\right)\mathbf{p} = E + \left[\frac{\mathbf{p}}{\gamma}, B\right], \ \gamma = \sqrt{1 + (\mathbf{p}, \mathbf{p})}. \qquad (1)$$

Электрическое E и магнитное B поля, плотность электронов ρ описываются уравнениями Максвелла

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{E} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\ \mathrm{B} = 0. \qquad (2)$$

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{B} = 4\pi\rho\ \frac{\mathbf{p}}{\gamma} + \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\ \mathrm{E} = 4\pi\rho. \qquad (3)$$

В вакуумной области ($X_m < X < X_a$) поля описываются уравнениями (2), (3), в которых нужно положить $\rho = 0$. Уравнения (1), (2) имеют решение

$$\mathrm{E} = \vec{\nabla}\gamma + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}, \ \mathrm{B} = -\ \mathrm{rot}\ \mathbf{p}, \qquad (4)$$

подстановка которого в (3), после исключения ρ, приводит к соотношению для p и γ

$$\gamma\ \Delta\mathbf{p} - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}(\mathrm{div}\mathbf{p} + \frac{\partial\gamma}{\partial t})\right) = \mathbf{p}(\Delta\gamma + \mathrm{div}\mathbf{p}). \qquad (5)$$

Рассмотрим ситуацию, когда зависимость всех величин от t, Y, Z гораздо более слабая, чем их зависимость от X. Количественно отразим это введением малого параметра ε, в ряд по которому разложим зависимые и независимые переменные [5]

$$(p_z = \gamma,\ E_x,\ B_y) = \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq 1}}^{\infty} \varepsilon^n\ (p_{zn},\ \gamma_n,\ \sigma E_{xn},\ \sigma B_{yn}),$$

$$(E_y,\ E_z,\ B_x) = \sigma\sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon^n (E_{yn},\ E_{zn},\ B_{xn}), \qquad (6)$$

$$(t,\ Y,\ Z) = \frac{1}{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n (t_n,\ y_n,\ z_n),\ x = \sigma(X - X_k),$$

$$(p_x,\ p_y,\ B_z) = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n (p_{xn},\ p_{yn},\ \sigma p_{zn}),$$

где σ — постоянная, равная величине магнитного поля B_y на катоде в невозмущенном режиме при $\varepsilon = 0$.

Условия $\mathbf{p}_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ соответствуют случаю, когда нелинейные, дисперсионные и дифракционные эффекты имеют один порядок. При $\mathbf{p}_1 \neq$ $\neq 0$ доминируют нелинейные явления.

Подставим (6) в (5) и приравняем члены с одинаковыми показателями у ε. Получим систему уравнений, имеющих вид для ε^0,

$$\gamma_0 \frac{\partial^2 p_{z0}}{\partial x^2} = p_{z0} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial x^2}, \quad \gamma_0^2 = 1 + p_{z0}^2, \tag{7}$$

для ε^2

$$\gamma_0 \frac{\partial^2 p_{z2}}{\partial x^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 p_{z0}}{\partial x^2} = p_{z0} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x^2} + p_{z2} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial x^2},$$

$$\gamma_0 \frac{\partial^2 p_{y2}}{\partial x^2} = p_{y2} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial x^2}, \quad \gamma_0 \gamma_2 = p_{z0} p_{z2}, \quad p_{x2} = 0, \tag{8}$$

для ε^3

$$- \gamma_0 \left(\frac{\partial^2 p_{y2}}{\partial x \partial y_1} + \frac{\partial^2 p_{z2}}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x \partial t_1} \right) = p_{x3} \frac{\partial \gamma_0}{\partial x^2},$$

$$\gamma_0 \frac{\partial^2 p_{y3}}{\partial x^2} = p_{y3} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial x^2}, \quad \gamma_0 \gamma_3 = p_{z0} p_{z3},$$

$$\gamma_0 \frac{\partial^2 p_{z3}}{\partial x^2} + \gamma_3 \frac{\partial^2 p_{z0}}{\partial x^2} = p_{z3} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial x^2} + p_{z0} \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial x^2}, \tag{9}$$

для ε^4

$$\gamma_0 \left(\frac{\partial^2 p_{y4}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{y2}}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 p_{y2}}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 p_{x3}}{\partial x \partial y_1} - \frac{\partial^2 p_{z2}}{\partial y_1 \partial z_1} - \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial y_1 \partial t_1} \right) +$$

$$+ \gamma_2 \frac{\partial^2 p_{y2}}{\partial x^2} = p_{y4} \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} + p_{y2} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x^2},$$

$$\gamma_0 \left(\frac{\partial^2 p_{z4}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{z2}}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 p_{z2}}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 p_{x3}}{\partial x \partial z_1} - \frac{\partial^2 p_{y2}}{\partial y_1 \partial z_1} - \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial z_1 \partial t_1} \right) +$$

$$+ \gamma_2 \frac{\partial^2 p_{z2}}{\partial x^2} + \gamma_4 \frac{\partial^2 p_{z0}}{\partial x^2} = p_{z4} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial x^2} + p_{z2} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial x^2} + p_{z0} \left(\frac{\partial^2 \gamma_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial y_1^2} \right.$$

$$+\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2 p_{x3}}{\partial x\partial t_1}+\frac{\partial^2 p_{y2}}{\partial t_1\partial y_1}+\frac{\partial^2 p_{z2}}{\partial t_1\partial z_1}\Bigg),$$

$$2\gamma_0\gamma_4+\gamma_2^2=2p_{z0}p_{z4}+p_{z2}^2+p_{y2}^2. \tag{10}$$

Решение уравнений

Граничные значения величин на катоде в режиме ограничения эмиссии пространственным зарядом пучка таковы:

$$p_n(x=0)=0,\ E_n(x=0)=0,\ B_{y0}(x=0)=1,\ B_{xn}(x=0)=0. \tag{11}$$

Уравнения (7) описывают невозмущенный, стационарный, однородный по Y и Z электронный поток. Решение их имеет вид

$$\gamma_0=\mathrm{ch}x,\ p_{z0}=\mathrm{sh}x. \tag{12}$$

Система (8) относится к линейной части возмущений, для которой получаем

$$p_{z2}=H_2x\mathrm{ch}x,\ \gamma_2=H_2x\mathrm{ch}x,\ p_{y2}=K_2\mathrm{sh}x. \tag{13}$$

Соотношения (9), (10) несут информацию о нелинейных, дисперсионных и дифракционных эффектах. Решая их, находим

$$p_{z3}=H_3x\mathrm{ch}x,\ \gamma_3=H_3x\mathrm{ch}x,\ p_{y3}=K_3\mathrm{sh}x,$$

$$p_{x3}=-\frac{\partial K_2}{\partial y_1}\mathrm{ch}x-\frac{\partial H_2}{\partial z_1}(\mathrm{ch}x+x\mathrm{ch}x)-\frac{\partial H_2}{\partial t_1}(\mathrm{ch}x+x\mathrm{ch}x), \tag{14}$$

$$p_{y4}=K_4\mathrm{sh}x-\frac{\partial^2 H_2}{\partial y_1\partial t_1}x\mathrm{sh}x+\left(K_2H_2+\frac{1}{2}\Box K_2-\frac{\partial^2 H_2}{\partial y_1\partial z_1}\right)x\mathrm{ch}x,$$

$$p_{z4}=M\mathrm{sh}x+N\mathrm{ch}x,\ \gamma_4=M\mathrm{ch}x+N\mathrm{sh}x,\ M=\frac{1}{2}(H_2^2x^2+K_2^2\mathrm{sh}^2x),$$

$$N=xH_4+\frac{x^3}{6}\Box H_2-\left(K_2^2+\frac{\partial^2 H_2}{\partial t_1^2}+\frac{\partial^2 H_2}{\partial z_1^2}\right)\frac{\mathrm{sh}(2x)}{4}-\frac{\partial^2 H_2}{\partial t_1\partial z_1}\mathrm{sh}^2x.$$

Здесь

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial z_1^2},$$

а величины K_n, H_n не зависят от x.

Подстановка (12)—(15) в (4) позволяет получить выражения для полей в области, занятой пучком

$$E_{x0} = \mathrm{sh}x,\quad E_{x2,3} = H_{2,3}(\mathrm{sh}x + x\mathrm{ch}x),\quad E_{x4} = \left(M + \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathrm{sh}x +$$

$$+ \left(\frac{\partial M}{\partial x} + N\right)\mathrm{ch}x - \frac{\partial K_2}{\partial t_1 \partial y_1}\mathrm{ch}x - \frac{\partial^2 H_2}{\partial t_1 \partial z_1}(\mathrm{ch}x + x\mathrm{sh}x) - \frac{\partial^2 H_2}{\partial t_1^2}(\mathrm{sh}x + x\mathrm{ch}x),$$

$$E_{y3} = \frac{\partial H_2}{\partial y_1}x\mathrm{ch}x + \frac{\partial K_2}{\partial t_1}\mathrm{sh}x,\quad E_{y4} = \left(\frac{\partial H_3}{\partial y_1} + \frac{\partial H_2}{\partial y_2}\right)x\mathrm{sh}x + \left(\frac{\partial K_3}{\partial t_1} + \frac{\partial K_2}{\partial t_2}\right)\mathrm{sh}x,$$

$$E_{y5} = \left(\frac{\partial H_3}{\partial y_2} + \frac{\partial H_2}{\partial y_3}\right)x\mathrm{sh}x + \left(\frac{\partial K_3}{\partial t_2} + \frac{\partial K_2}{\partial t_3}\right)\mathrm{sh}x + \frac{\partial M}{\partial y_1}\mathrm{ch}x + \frac{\partial N}{\partial y_1}\mathrm{sh}x +$$

$$+ \frac{\partial K_4}{\partial t_1}\mathrm{sh}x - \frac{\partial^3 H_2}{\partial y_1 \partial t_1^2}x\mathrm{sh}x + \left(\frac{\partial(K_2 H_2)}{\partial t_1} + \frac{1}{2}\square\frac{\partial K_2}{\partial t_1} - \frac{\partial^3 H_2}{\partial t_1 \partial y_1 \partial z_1}\right)x\mathrm{ch}x,$$

$$E_{z3} = \frac{\partial H_2}{\partial z_1}x\mathrm{sh}x + \frac{\partial H_2}{\partial t_1}x\mathrm{ch}x,\quad E_{z4} = \left(\frac{\partial H_3}{\partial z_1} + \frac{\partial H_2}{\partial z_2}\right)x\mathrm{ch}x + \left(\frac{\partial H_3}{\partial t_1} + \frac{\partial H_2}{\partial t_2}\right)x\mathrm{ch}x,$$

$$E_{z5} = \left(\frac{\partial H_3}{\partial z_2} + \frac{\partial H_2}{\partial z_3}\right)x\mathrm{ch}x + \left(\frac{\partial H_3}{\partial t_2} + \frac{\partial H_2}{\partial t_3}\right)x\mathrm{ch}x + \left(\frac{\partial M}{\partial z_1} + \frac{\partial N}{\partial t_1}\right)\mathrm{ch}x +$$

$$+ \left(\frac{\partial M}{\partial t_1} + \frac{\partial N}{\partial z_1}\right)\mathrm{sh}x,$$

$$B_{x3} = \frac{\partial K_2}{\partial z_1}\mathrm{sh}x - \frac{\partial H_2}{\partial y_1}x\mathrm{ch}x,\quad B_{x4}\ \left(\frac{\partial K_3}{\partial z_1} + \frac{\partial K_2}{\partial z_2}\right)\mathrm{sh}x - \left(\frac{\partial H_3}{\partial y_1} + \frac{\partial H_2}{\partial y_2}\right)x\mathrm{ch}x,$$

$$B_{x5} = \left(\frac{\partial K_3}{\partial z_2} + \frac{\partial K_2}{\partial z_3}\right)\mathrm{sh}x - \left(\frac{\partial H_3}{\partial y_2} + \frac{\partial H_2}{\partial y_3}\right)x\mathrm{ch}x - \frac{\partial M}{\partial y_1}\mathrm{sh}x - \frac{\partial N}{\partial y_1}\mathrm{ch}x +$$

$$+ \frac{\partial K_4}{\partial z_1}\mathrm{sh}x - \frac{\partial^3 H_2}{\partial t_1 \partial y_1 \partial z_1}x\mathrm{sh}x + \left(\frac{\partial(K_2 H_2)}{\partial z_1} + \frac{1}{2}\square\frac{\partial K_2}{\partial z_1} - \frac{\partial^3 H_2}{\partial y_1 \partial z_1^2}\right)x\mathrm{ch}x,$$

$$B_{y0} = \text{ch}x, \; B_{y2,3} = H_{2,3}(\text{ch}x + x\text{sh}x), \; B_{y4} = M + \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)\text{ch}x +$$

$$+ \left(\frac{\partial M}{\partial x} + N\right)\text{sh}x + \frac{\partial^2 K_2}{\partial z_1 \partial y_1}\text{ch}x + \frac{\partial^2 H_2}{\partial t_1 \partial z_1}(\text{sh}x + x\text{ch}x) + \frac{\partial^2 H_2}{\partial z_1^2}(\text{ch}x + x\text{sh}x),$$

$$B_{z2,3} = - K_{2,3}\text{ch}x,$$

$$B_{z4} = - K_4\text{ch}x - (K_2 H_2 + \frac{1}{2}\Box K_2)(\text{ch}x + x\text{ch}x) - \frac{\partial^2 K_2}{\partial y_1^2}\text{ch}x. \qquad (16)$$

Получение аналогичной системы уравнений для полей в вакуумной области и нахождение их решений являются менее громоздкой задачей. Граничные условия на аноде имеют вид

$$E_z(x = x_a) = E_y(x = x_a) = B_x(x = x_a) = 0. \qquad (17)$$

Поля в вакууме равны

$$E_{x0,2,3} = e_{x0,2,3}, \; E_{x4} = \frac{(x - x_a)^2}{2}\Box e_{x2} + e_{x4},$$

$$E_{y3} = (x - x_a)\left(\frac{\partial e_{x2}}{\partial y_1} - \frac{\partial b_{z2}}{\partial t_1}\right), \; E_{y4} = (x - x_a)\left(\frac{\partial e_{x3}}{\partial y_1} - \frac{\partial e_{x2}}{\partial y_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial b_{z3}}{\partial t_1} - \frac{\partial b_{z2}}{\partial t_2}\right),$$

$$E_{y5} = (x - x_a)\left(\frac{\partial e_{x4}}{\partial y_1} + \frac{\partial e_{x3}}{\partial y_2} + \frac{\partial e_{x2}}{\partial y_3} - \frac{\partial b_{z4}}{\partial t_1} - \frac{\partial b_{z3}}{\partial t_2} - \frac{\partial b_{z2}}{\partial t_3}\right) +$$

$$+ \frac{(x - x_a)^3}{6}\Box\left(\frac{\partial e_{x2}}{\partial y_1} - \frac{\partial b_{z2}}{\partial t_1}\right),$$

$$E_{z3} = (x - x_a)\left(\frac{\partial e_{x2}}{\partial z_1} - \frac{\partial b_{y2}}{\partial t_1}\right), \; E_{z4} = (x - x_a)\left(\frac{\partial e_{x3}}{\partial z_1} + \frac{\partial e_{x2}}{\partial z_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial b_{y3}}{\partial t_1} + \frac{\partial b_{y2}}{\partial t_2}\right),$$

$$E_{z5} = (x - x_a) \left(\frac{\partial e_{x4}}{\partial z_1} + \frac{\partial e_{x3}}{\partial z_2} + \frac{\partial e_{x2}}{\partial z_3} - \frac{\partial b_{y4}}{\partial t_1} - \frac{\partial b_{y3}}{\partial t_2} - \frac{\partial b_{y2}}{\partial t_3} \right) +$$

$$+ \frac{(x - x_a)^3}{6} \Box \left(\frac{\partial e_{x2}}{\partial z_1} - \frac{\partial b_{y2}}{\partial t_1} \right),$$

$$B_{x3} = (x_a - x) \left(\frac{\partial b_{z2}}{\partial z_1} - \frac{\partial b_{y2}}{\partial y_1} \right), \quad B_{x4} = (x_a - x) \left(\frac{\partial b_{z3}}{\partial z_1} + \frac{\partial b_{z2}}{\partial z_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial b_{y3}}{\partial y_1} + \frac{\partial b_{y2}}{\partial y_2} \right),$$

$$B_{x5} = (x_a - x) \left(\frac{\partial b_{z4}}{\partial z_1} + \frac{\partial b_{z3}}{\partial z_2} + \frac{\partial b_{z2}}{\partial z_3} - \frac{\partial b_{y4}}{\partial y_1} - \frac{\partial b_{y3}}{\partial y_2} - \frac{\partial b_{y2}}{\partial y_3} \right) +$$

$$+ \frac{(x_a - x)^3}{6} \Box \left(\frac{\partial b_{y2}}{\partial y_1} - \frac{\partial b_{z2}}{\partial z_1} \right),$$

$$B_{y0,2,3} = b_{y0,2,3}, \quad B_{y4} = \frac{(x - x_a)^2}{2} \Box b_{y2} + b_{y4},$$

$$B_{z2,3} = b_{z2,3}, \quad B_{z4} = \frac{(x - x_a)^2}{2} \Box b_{z2} + b_{z4}. \qquad (18)$$

Здесь b_{y0}, e_{x0} — постоянные поля, соответствующие невозмущенному режиму, а b_n, e_n ($n = 2, 3, 4$) не зависят от x и связаны соотношениями

$$\frac{\partial b_{z2}}{\partial y_1} - \frac{\partial e_{x2}}{\partial t_1} - \frac{\partial b_{y2}}{\partial z_1} = 0,$$

$$\frac{\partial b_{z2}}{\partial y_2} + \frac{\partial b_{z3}}{\partial y_1} - \frac{\partial b_{x2}}{\partial t_2} - \frac{\partial e_{x3}}{\partial t_1} - \frac{\partial b_{y2}}{\partial z_2} - \frac{\partial b_{y3}}{\partial z_1} = 0,$$

$$\frac{\partial b_{z2}}{\partial y_3} + \frac{\partial b_{z3}}{\partial y_2} + \frac{\partial b_{z4}}{\partial y_1} - \frac{\partial e_{x2}}{\partial t_3} - \frac{\partial e_{x3}}{\partial t_2} - \frac{\partial e_{x4}}{\partial t_1} - \frac{\partial b_{y2}}{\partial z_3} - \frac{\partial b_{y3}}{\partial z_2} -$$

$$- \frac{\partial b_{y4}}{\partial z_2} = 0, \qquad (19)$$

представляющими следствия разложения уравнения Максвелла

$$\left(\mathrm{rot}B - \frac{\partial E}{\partial t}\right)_x = 0,$$

не содержащего производных по x.

Условия на границе пучок-вакуум

Координату границы представим в виде ряда по ε

$$x_m = \psi + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n . \qquad (20)$$

Разложение произвольной величины

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S_n(x)$$

на границе преобразуем к виду

$$S_m = S(x_m) = \sum_{j,k} \varepsilon^l \frac{\partial^k S_j}{\partial x^k}(\psi) \frac{\left(\sum_{r=2}^{\infty} \varepsilon^r \psi_r\right)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S_{nm}. \qquad (21)$$

Поля на границе меняются непрерывным образом, что позволяет связать решения (16) и (18). Непрерывность величин $B_{y2m}\mathrm{ch}\psi - E_{x2m}\mathrm{sh}\psi$, B_{z2m}, $B_{x,3m}$, E_{y3m} приводит вместе с первой связью (19) к системе уравнений для линейных амплитуд

$$b_{y2}\mathrm{sh}\psi - e_{x2}\mathrm{ch}\psi - H_2 = 0, \quad b_{z2} + K_2\mathrm{ch}\psi = 0,$$

$$-\frac{\partial b_{y2}}{\partial y_1}(\psi - x_a) - \frac{\partial b_{z2}}{\partial z_1}(\psi - x_a) - \frac{\partial K_2}{\partial z_1}\mathrm{sh}\psi + \frac{\partial H_2}{\partial y_1}\psi\mathrm{ch}\psi = 0,$$

$$\frac{\partial e_{x2}}{\partial y_1}(\psi - x_a) - \frac{\partial b_{z2}}{\partial t_1}(\psi - x_a) - \frac{\partial K_2}{\partial t_1}\mathrm{sh}\psi - \frac{\partial H_2}{\partial y_1}\psi\mathrm{sh}\psi = 0,$$

$$\frac{\partial b_{z2}}{\partial y_1} - \frac{\partial e_{x2}}{\partial t_1} - \frac{\partial b_{y2}}{\partial z_1} = 0. \qquad (22)$$

Введем в пространстве (t, y, z) скалярное произведение с метрикой $(1, -1, -1)$. Будем считать, что зависимость всех величин от t_1, y_1, z_1 сводится к зависимости от ξ_1, где

$$\xi_n = (\mathbf{k}, \mathbf{r}_n) = \omega t_n - k_y k_n - k_z z_n, \quad \mathbf{k} = (\omega, k_y, k_z),$$

$$\mathbf{r}_n = (t_n, y_n, z_n). \quad (23)$$

Тогда, дифференцируя первые два уравнения в (22) по ξ_1 и преобразуя в остальных уравнениях производные по $\mathbf{r}_1$ в производные по ξ_1, получим систему однородных уравнений для

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}(b_{y2}, e_{x2}, b_{z2}, K_2, H_2).$$

Система имеет ненулевое решение только, если входящие в нее уравнения линейно зависимы. Умножим уравнения системы в их порядке на T_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, сложим и приравняем нулю коэффициенты при неизвестных

$$T_1 \mathrm{ch}\psi + T_3 k_y(\psi - x_a) + T_5 k_z = 0, \quad T_1 \mathrm{sh}\psi + T_4 k_y(\psi - x_a) + T_5 \omega = 0,$$

$$T_2 + T_3 k_z(\psi - x_a) - T_4 \omega(\psi - x_a) - T_5 k_y = 0,$$

$$T_2 \mathrm{ch}\psi + T_3 k_z \mathrm{sh}\psi - T_4 \omega \mathrm{sh}\psi = 0, \quad T_1 + T_3 k_y \psi \mathrm{ch}\psi - T_4 k_y \psi \mathrm{sh}\psi = 0. \quad (24)$$

Получившаяся система для T_1 имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равен нулю, что эквивалентно дисперсионному соотношению,

$$(\mathbf{P}, \mathbf{k}) = (\mathbf{P}', \mathbf{k}') = 0, \quad (25)$$

$$\mathbf{P} = (P'_t, P'_y, P'_z) = \left(x_a \omega', \ \frac{x_a(x_a - \psi)}{x_a - \psi + \mathrm{th}\psi} k_y, \ (x_a - \psi) k'_z \right) \quad (26)$$

и для произвольного вектора $\mathbf{S} = (S_t, S_y, S_z)$ положено

$$\mathbf{S}' = (S'_t, S'_y, S'_z) = (S_t \mathrm{ch}\psi - S_z \mathrm{sh}\psi, \ S_y, \ S_z \mathrm{ch}\psi - S_t \mathrm{sh}\psi). \quad (27)$$

При выполнении (25) решение (24) имеет вид

$$T_1 = -P'_z \psi k_y, \quad T_2 = -P_y k_y \mathrm{th}\psi, \quad T_3 = P_z, \quad T_4 = P_t, \quad T_5 = k_y x_a (x_a - \psi), \quad (28)$$

а неизвестные системы (22) выражаются через линейную амплитуду возмущений F_2 по формулам

$$e_{x2} = F_2 P_t, \quad b_{y2} = F_2 P_z, \quad b_{z2} = -F_2 P_y,$$

$$K_2 = F_2 \frac{P_y}{\mathrm{ch}\psi}, \quad H_2 = F_2 P'_z, \quad \psi_2 = F_2 (P'_t - \psi P'_z). \quad (29)$$

С учетом этих соотношений условия непрерывности для величин $B_{y4m}\mathrm{ch}\psi - E_{x4m}\mathrm{sh}\psi$, B_{z5m}, B_{x5m}, E_{y5m} приводят вместе с третьей связью (18) к системе уравнений

$$b_{y4m}\mathrm{ch}\psi - e_{x4}\mathrm{sh}\psi - H_4 =$$

$$\frac{1}{2}F_2^2(P_t'^2 - P_y^2) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial\xi_1^2}P_z'\left(\frac{k^2}{2}(\psi^2 - (\psi - x_a)^2) + \frac{k_z'^2 - \omega'^2}{2} - \psi k_z'\omega' + \right.$$

$$\left. + P_y\frac{k_y}{x_a - \psi}\right),$$

$$b_{z4} + K_4\mathrm{ch}\psi = -F_2^2\frac{P_yP_z}{\mathrm{ch}\psi} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial\xi_1^2}P_y\left(\frac{k^2}{2}((\psi - x_a)^2 - 1 - \psi\mathrm{th}\psi) - k_y^2\right),$$

$$\frac{\partial b_{y4}}{\partial\xi_1}k_y(\psi - x_a) + \frac{\partial b_{z4}}{\partial\xi_1}k_z(\psi - x_a) + \frac{\partial K_4}{\partial\xi_1}k_z\mathrm{sh}\psi - \frac{\partial H_4}{\partial\xi_1}k_y\psi\mathrm{ch}\psi =$$

$$-\frac{\partial b_{y3}}{\partial y_2}(x_a + \psi\mathrm{sh}^2\psi) + \frac{\partial e_{x3}}{\partial y_2}\psi\mathrm{sh}\psi\mathrm{ch}\psi - \frac{\partial b_{z3}}{\partial z_2}(x_a - \psi + \mathrm{th}\psi) +$$

$$+ x_a(x_a - \psi)\left(\frac{\partial F_2}{\partial z_3}k_y - \frac{\partial F_2}{\partial y_3}k_z\right) + F_2\frac{\partial F_2}{\partial\xi_1}\left(-P_t'k_y\mathrm{sh}\psi + 2\psi(k_yP_t'\mathrm{sh}\psi - k_zP_y)P_z' - \right.$$

$$\left. - P_y^2k_y\frac{\mathrm{th}\psi}{\mathrm{ch}\psi}\right) + \frac{\partial^3 F_2}{\partial\xi_1^3}\left(P_z'k_y(k_zk_z'\psi - (\omega^2 + k_z^2)\frac{\mathrm{sh}\psi\mathrm{ch}^2\psi}{2} + \omega k_z\mathrm{sh}^2\psi\mathrm{ch}\psi) + \right.$$

$$\left. k^2\left(\frac{(x_a - \psi)^3}{6}(k_yP_z - k_zP_y) + \frac{\psi^3}{6}P_z'k_y\mathrm{ch}\psi - \frac{\psi}{2}k_zP_y\right)\right),$$

$$-\frac{\partial e_{x4}}{\partial\xi_1}k_y(\psi - x_a) + \frac{\partial b_{z4}}{\partial\xi_1}\omega(\psi - x_a) + \frac{\partial K_4}{\partial\xi_1}\omega\mathrm{sh}\psi - \frac{\partial H_4}{\partial\xi_1}k_y\psi\mathrm{sh}\psi =$$

$$\frac{\partial b_{y3}}{\partial y_2}\psi\mathrm{sh}\psi\mathrm{ch}\psi + \frac{\partial e_{x3}}{\partial y_2}(x_a + \psi\mathrm{ch}^2\psi) - \frac{\partial b_{z3}}{\partial t_2}(x_a - \psi + \mathrm{th}\psi) +$$

$$+ x_a(x_a - \psi)\left(\frac{\partial F_2}{\partial y_3}\omega + \frac{\partial F_2}{\partial t_3}k_y\right) + F_2\frac{\partial F_2}{\partial\xi_1}\left(-P_t'^2k_y\mathrm{ch}\psi - 2\psi(k_yP_t'\mathrm{ch}\psi - \omega P_y)P_z'\right) +$$

$$+\ \frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_1^3}\Bigg(-\ P'_z k_y (\omega k_z^- \psi - (\omega^2 + k_z^2)\frac{\mathrm{ch}\psi\,\mathrm{sh}^2\psi}{2} + \omega k_z \mathrm{sh}^3\psi) -$$

$$-\ k^2\left(\frac{(x_a - \psi)^3}{6}(k_y P_t - \omega P_y) + \frac{\psi^3}{6} P'_z k_y \mathrm{sh}\psi - \frac{\psi}{2}\omega P_y\right)\Bigg),$$

$$\frac{\partial b_{y4}}{\partial \xi_1} k_z - \frac{\partial e_{x4}}{\partial \xi_1}\omega - \frac{\partial b_{z4}}{\partial \xi_1} k_y =$$

$$= \frac{\partial b_{y2}}{\partial z_3} + \frac{\partial b_{y3}}{\partial z_2} + \frac{\partial e_{x2}}{\partial t_3} + \frac{\partial e_{x3}}{\partial t_2} - \frac{\partial b_{z2}}{\partial y_3} - \frac{\partial b_{z3}}{\partial y_2}. \qquad (30)$$

Величины b_{y4}, e_{x4}, b_{z4}, K_4, H_4 содержатся только в осевых частях уравнений, которые изоморфны левым частям системы (22), что является следствием интерационной процедуры решения уравнений (7)— (10), полученной путем разложения в ряд исходного уравнения (5).

Непрерывность полей E_{x3m}, B_{y3m}, B_{z3m} приводит к соотношениям для H_3 и K_3

$$H_3 = b_{y3}\mathrm{ch}\psi - e_{x3}\mathrm{sh}\psi,\ K_3 = -\ \frac{b_{z3}}{\mathrm{ch}\psi}. \qquad (31)$$

С учетом (31) и (29) условия непрерывности для E_{y4m}, B_{x4m} и вторая связь (19) дают систему уравнений для b_{y3}, e_{x3}, b_{z3}

$$\frac{\partial b_{y3}}{\partial \xi_1} k_y \psi\,\mathrm{sh}\psi\,\mathrm{ch}\psi + \frac{\partial e_{x3}}{\partial \xi_1} k_y (x_a - \psi\,\mathrm{ch}^2\psi) + \frac{\partial b_{z3}}{\partial \xi_1}\omega(x_a - \psi + \mathrm{th}\psi) =$$

$$= x_a(x_a - \psi)\left(\frac{\partial F_2}{\partial y_2}\omega + \frac{\partial F_2}{\partial t_2} k_y\right),$$

$$\frac{\partial b_{y3}}{\partial \xi_1} k_y (x_a + \psi\,\mathrm{sh}^2\psi) - \frac{\partial e_{x3}}{\partial \xi_1} k_y \psi\,\mathrm{sh}\psi\,\mathrm{ch}\psi + \frac{\partial b_{z3}}{\partial \xi_1} k_z (x_a - \psi + \mathrm{th}\psi) =$$

$$= x_a(x_a - \psi)\left(\frac{\partial F_2}{\partial y_2} k_z + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} k_y\right),$$

$$\frac{\partial b_{y3}}{\partial \xi_1} k_z + \frac{\partial e_{x3}}{\partial \xi_1}\omega - \frac{\partial b_{z3}}{\partial \xi_1} k_y = (\mathrm{P},\ \vec{\nabla}_2)F_2, \qquad (32)$$

$$(\mathrm{P},\ \nabla_n) = P_t\frac{\partial}{\partial t_n} + P_y\frac{\partial}{\partial y_n} + P_z\frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Уравнение для амплитуды

Продифференцируем по ξ_1 первые два уравнения системы (30). В силу отмеченного изоморфизма левые части полученных уравнений линейно зависимы. Умножая уравнения на коэффициенты T_i и суммируя, получим уравнение с нулевой левой частью

$$0 = \frac{1}{2P_y}(\mathrm{P},\ \vec{\nabla}_2)b_{z3} + \frac{1}{2k_y}\left(\frac{\partial b_{y3}}{\partial y_2}k_z - \frac{\partial b_{y3}}{\partial z_2}k_y - \frac{\partial e_{x3}}{\partial y_2}\omega - \frac{\partial e_{x3}}{\partial t_2}k_y\right) -$$

$$- (\mathrm{P},\ \vec{\nabla}_3)F_2 + QF_2\frac{\partial F_2}{\partial \xi_1} + R\frac{\partial^3 F_2}{\partial \xi_1^3}, \tag{33}$$

$$Q = \frac{1}{2x_a(x_a - \psi)}\left(3\psi(P_t'^2 - P_y'^2)P_z + 3P_y^2P_z\frac{\mathrm{th}\psi}{\mathrm{ch}\psi} - P_t'^3\right),$$

$$R = \frac{1}{2x_a(x_a - \psi)}\left[P_z'^2\left[\frac{k^2\psi}{3}(\psi^2 - (\psi - x_a)^2) + \frac{k_z'^2 - \omega'^2}{2}\omega - k_z'\omega'\psi^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{k_z'^2 - \omega'^2}{4}\mathrm{sh}(2\Psi) + k_z'\omega'\mathrm{sh}^2\psi + \frac{2k_y^2x_a\psi}{x_a - \psi + \mathrm{th}\psi}\right] +$$

$$\left. + P_y^2\left[k_y^2\mathrm{th}\psi + k^2\left(\frac{\mathrm{th}\psi}{2} - \frac{\psi}{2\mathrm{ch}^2\psi} - \frac{(\psi - x_a)^2}{3}\mathrm{th}\psi\right)\right]\right]. \tag{34}$$

Анализ системы (32) показывает, что левые части ее уравнений линейно зависимы, это приводит к ограничению на вид амплитуды F_2

$$(\mathrm{P},\ \vec{\nabla}_2)F_2 = 0. \tag{35}$$

Решение (32), следовательно, содержит произвольную функцию F_3 Оно имеет вид

$$\frac{\partial b_{y3}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial F_3}{\partial \xi_1}P_z + \psi\mathrm{sh}\psi\mathrm{ch}\psi\frac{\partial F_2}{\partial t_2} - (x_a - \psi\mathrm{ch}^2\psi)\frac{\partial F_2}{\partial z_2},$$

$$\frac{\partial e_{x3}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial F_3}{\partial \xi_1}P_t + (x_a - \psi\mathrm{sh}^2\psi)\frac{\partial F_2}{\partial t_2} + \psi\mathrm{sh}\psi\mathrm{ch}\psi\frac{\partial F_2}{\partial z_2},$$

$$\frac{\partial b_{z3}}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial F_3}{\partial \xi_1}P_y + \frac{x_a(x_a - \psi)}{x_a - \psi + \mathrm{th}\psi}\frac{\partial F_2}{\partial y_2}. \tag{36}$$

Сравнение (36) и (29) показывает, что F_2 и F_3 являются последовательными членами разложения в ряд по ε одной функции, поэтому далее будем считать, что F_3 также удовлетворяет ограничению вида (35)

$$(\mathrm{P},\ \vec{\nabla}_2)F_3 = 0. \tag{37}$$

Продифференцируем (33) по ξ_1 и подставим вместо производных

$$\frac{\partial}{\partial\xi_1}(b_{y3},\ e_{x3},\ b_{z3})$$

их выражения из (36). Получим

$$\psi\mathrm{sh}\psi\mathrm{ch}\psi\,\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2\,\partial t_2} - \frac{1}{2}(x_a - \psi\mathrm{ch}^2\psi)\,\frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2^2} + \frac{1}{2}(x_a + \psi\mathrm{sh}^2\psi)\,\frac{\partial^2 F_2}{\partial t_2^2} -$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{x_a(x_a - \psi)}{x_a - \psi + \mathrm{th}\psi}\,\frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} = \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(-(\mathrm{P},\ \vec{\nabla}_3)F_2 + QF_2\,\frac{\partial F_2}{\partial\xi_1} + R\frac{\partial^3 F_2}{\partial\xi_1^3}\right). \tag{38}$$

Перейдем от переменных $(t_n,\ y_n,\ z_n)$ к переменным $(\xi_n,\ \beta_n,\ \lambda_n)$, где

$$\beta_n = (\mathrm{P},\ \mathbf{r}_n),\ \lambda_n = (\lambda,\ \mathbf{r}_n),\ \lambda = (P_z k_y - P_y k_z,\ P_z\omega - P_t k_z,\ P_t k_y - P_y\omega). \tag{39}$$

Векторы **k**, **P**, λ — взаимно ортогональны. Тогда с учетом (25) и (35) уравнение (38) приобретает вид уравнения Кадомцева—Петвиашвили

$$W\,\frac{\partial^2 F_2}{\partial\lambda_2^2} = \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(P^2\,\frac{\partial F_2}{\partial\beta_3} - QF_2\,\frac{\partial F_2}{\partial\xi_1} - R\,\frac{\partial^3 F_2}{\partial\xi_3^3}\right), \tag{40}$$

$$W = \frac{(P_y k_y\,\mathrm{th}\psi + P'_z k'_z\psi)^2}{2(x_a - \psi + \mathrm{th}\psi)}. \tag{41}$$

Члены уравнения, содержащие коэффициенты Q, R, W, описывают соответственно нелинейные, дисперсионные и дифракционные явления, влияющие на поведение возмущений. Уравнение (40) может быть проинтегрировано прямым методом [7] или методом обратной задачи рассеяния [8,9]. Простейшее односолитонное решение имеет вид

$$F_2 = g^2\,\frac{3P(PR)^{1/3}}{Q}\mathrm{ch}^{-2}\left[\frac{g}{2}\left[\left(\frac{p^2}{R}\right)^{1/3}\xi_1 + q\lambda_2 + \left(g^2 + q^2\,\frac{W}{R^2}\left(\frac{R}{P^2}\right)^{1/3}\right)\beta_3\right]\right]$$

и описывает уединенную волну, амплитуда и фаза которой определяются параметрами g и q.

Таким образом, в линии с магнитной изоляцией возможно существование косых длинноволновых возмущений в условиях взаимного баланса нелинейных, дисперсионных и дифракционных эффектов. В двумерном случае амплитуда таких возмущений описывается уравнением (40), коэффициенты Q, R, W ((34), (41)) которого зависят от характеристик невозмущенного режима магнитной изоляции ((12), (18)).

В условиях эксперимента обычно измеряются величины медэлектронного напряжения V и полного тока J, которые связаны с введенными выше параметрами соотношениями

$$V = \mathrm{ch}\psi - 1 + (x_a - \psi)\,\mathrm{sh}\psi, \quad J = 2\pi\sigma d\,\mathrm{ch}\psi,$$

где d — ширина электродов линии.

Наличие солитонных волн будет выражаться в регистрации возмущений этих величин, распространяющихся со скоростью, зависящей от амплитуды возмущений, согласно виду приведенного выше решения.

Список литературы

[1] *Василенко О.И.* // Вестник МГУ. Физика. Астрономия. 1990. Т. 31. № 1. С. 11—17. Канд. дис. М., 1978. 148 с.

[2] *Swegel J., Ott E.* // Phys. Fluids. 1981. Vol. 24. N 10. P. 1821—1835.

[3] *Chang C.L., Ott E., Antonsen T.M., Jr.* // Phys. Fluids. 1966. Vol. 29. N 11. P. 3851—3857.

[4] *Swegle J., Ott E.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 1982. Vol. 10. N 1. P. 33—39.

[5] *Sandri G.* // Ann. Phys. 1963. Vol. 24. N 332.

[6] *Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И.* // ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 753—756.

[7] *Satsuma J.* // J. Phys. Soc. Jap. 1976. Vol. 40. N 1. P. 286—290.

[8] *Cardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. P. 1095—1097.

[9] *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.

Московский университет им. М.В. Ломоносова
Научно-исследовательский институт
ядерной физики

Поступило в Редакцию
20 декабря 1990 г.
В окончательной редакции
22 июля 1991 г.