

01; 12
© 1992 г.РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ
ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОСТИМУЛИРОВАННЫХ ИОННО-ОБМЕННЫХ ВОЛНОВОДОВ
В СТЕКЛАХ

В. Г. Долуденко, Н. А. Яковенко

В рамках диффузионной модели решено дифференциальное уравнение Пуассона для распределения зарядов (положительных ионов), полученных в результате замены катионов стекла катионами расплава при наличии приложенного напряжения. Получено аналитическое выражение для распределения напряженности электрического поля при формировании электростимулированного волновода в приповерхностной области пространственного заряда. Рассчитаны зависимости напряженности электрического поля от времени ионно-обменного процесса.

В настоящее время для изготовления пассивных оптических интегральных схем (ОИС), осуществляющих функции распределения, преобразования, объединения оптических сигналов широко используется метод ионно-обменной диффузии, стимулированный электрическим полем.

В качестве подложки для ОИС используются оптические стекла различных составов, допускающие внедрение ионов-диффузантов Ag^+ , K^+ , Cs^+ и т. п. при контакте рабочей поверхности стеклянной подложки с расплавом соли [1]. Применение внешнего стимулирующего поля позволяет не только сократить время изготовления, но и управлять формой поперечного сечения оптических канальных волнопроводов, входящих в структуру ОИС [2,3]. Известно, что распределение напряженности электрического поля в пластине из стекла при наличии приложенного напряжения рассчитывается с помощью конформного отображения [4]. Недостатком этого метода является то, что конформное преобразование применяется в основном лишь к плоским задачам, сводящимся к уравнению типа Лапласа.

Качественный анализ движения ионов у поверхности подложки под действием электрического поля рассматривался в работе [5]. В настоящей работе для вычисления распределения напряженности электрического поля в подложке из стекла при электростимулированном обмене применен иной подход по сравнению с работами [4,5], основанный на использовании уравнения Пуассона.

Объемный заряд ρ в неравновесных условиях, возникший в стеклянной подложке вследствие потока положительных ионов, полученных в результате замены катионов стекла катионами расплава, определяется выражением

$$\rho = eC_0, \quad (1)$$

где e — заряд положительного иона, C_0 — концентрация носителей заряда.

Уравнение Пуассона, связывающее потенциал поля V с объемной плотностью пространственного заряда ρ , создающих это поле, в предположении полной замены катионов стекла катионами расплава в одномерном случае имеет вид

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon'\epsilon_0} = \frac{eC_0}{\epsilon'\epsilon_0}, \quad (2)$$

где ϵ' , ϵ_0 — диэлектрические проницаемости подложки и вакуума соответственно; C_0 — концентрация положительных ионов на поверхности подложки (граничная концентрация).

Для изучения зависимости между C_0 и плотностью ионного тока J внутри подложки необходимо также знать зависимость между J и приложенным извне напряжением на границе раздела подложки-расплав. Для этого определим сначала взаимосвязь между плотностью ионного тока внутри подложки и градиентом концентрации ионов, воспользовавшись диффузионной теорией.

В соответствии с диффузионным подходом плотность ионного тока в области подложки представим в виде

$$j = J_1 + J_2 = eC_0\mu\epsilon - eD \frac{dC(x, t)}{dx}, \quad (3)$$

где D — коэффициент диффузии носителей заряда, μ — их подвижность, ϵ — напряженность электрического поля внутри подложки.

Первое слагаемое в правой части обусловлено дрейфом, а второе — диффузией носителей заряда, причем предполагается, что коэффициент диффузии и подвижность не зависят от напряженности поля.

Из зависимости (3) при больших градиентах концентрации ионов можно получить плотность диффузионной составляющей тока ионов

$$j_2 = -eD \frac{dC(x, t)}{dx}, \quad (4)$$

Отсюда видно, что градиент концентрации ионов $(dC(x, t))/dx$ играет роль движущей силы для ионов. Распределение концентрации ионов по глубине подложки при наличии электрического поля может быть представлено в виде дополнительной функции ошибок

$$C(x, t) = C_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \epsilon\mu t}{2\sqrt{Dt}} \right), \quad (5)$$

где C_0 — концентрация диффундирующих ионов на поверхности подложки; $C(x, t)$ — концентрация ионов в плоскости, отстоящей от по-

верхности на расстоянии x ; t — время диффузии; $\mathcal{E} = V/d$ (V — приложенное напряжение, d — толщина подложки).

Теперь опишем распределение ионов, когда процесс диффузии носителей заряда идет через маску. Пусть полубесконечная маска по плоскости $x = 0$ соприкасается с расплавом, занимающим полупространство $y > 0$. Тогда распределение диффундирующих ионов $C(x, y, t)$ в двумерном случае, когда диффузия носителей заряда идет не только в глубь подложки (x), но в горизонтальном (y) и боковых направлениях, при наличии электрического поля можно аппроксимировать следующим распределением:

$$C(x, y, t) = C_0 \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \mathcal{E}\mu t}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erfc} \left(\frac{y - W}{2\sqrt{Dt}} \right) \right\}, \quad (6)$$

где W — координата края маски.

В общем виде уравнение (2) для распределения ионов, соответствующего формуле (6), может быть решено только численным методом. Однако задача существенно упрощается, если диффузия носителей заряда идет в горизонтальном направлении на расстоянии от края полубесконечной маски, равном нескольким $2\sqrt{Dt}$. В этом случае концентрация ионов по глубине подложки перестает зависеть при удалении от края маски (от y) и зависимость (6) совпадает с получающейся из соотношения (5).

Из выражений (4) и (5) можно получить простую связь граничной концентрации ионов с плотностью диффузионного ионного тока. Вначале продифференцируем выражение (5) по x

$$\frac{dC(x, t)}{dx} = - \frac{C_0}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x - \mathcal{E}\mu t)^2}{4Dt}}. \quad (7)$$

Отсюда на основании (4) находим граничную концентрацию ионов, выраженную через плотность диффузионного ионного тока, напряженность электрического поля внутри подложки и время диффузии

$$C_0 = \frac{J_2 \sqrt{\pi Dt}}{eD} e^{\frac{\mathcal{E}^2 \mu^2 t^2}{4Dt}} \cdot e^{\frac{x^2}{4Dt}} - \frac{x \mathcal{E}\mu t}{2Dt}. \quad (8)$$

С учетом соотношения (8) уравнение Пуассона (2) записываем следующим образом:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = - \frac{J_2 \sqrt{\pi Dt}}{\epsilon' \epsilon_0 D} e^{\frac{\mathcal{E}^2 \mu^2 t^2}{4Dt}} \cdot e^{\frac{x^2}{4Dt}} - \frac{x \mathcal{E}\mu t}{2Dt} \quad (9)$$

Интегрируя уравнение (9), получим распределение напряженности электрического поля

$$E(x) = -\frac{J_2 \sqrt{\pi Dt}}{\varepsilon' \varepsilon_0 D} e^{\frac{\varepsilon^2 \mu^2 t^2}{4Dt}} \int_0^{\infty} e^{\frac{x^2}{4Dt} - \frac{x \varepsilon \mu t}{2Dt}} dx + C_1, \quad (10)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Обозначим

$$u(x) = \int_0^{\infty} e^{\frac{x^2}{4Dt} - \frac{x \varepsilon \mu t}{2Dt}} dx. \quad (11)$$

Введем вместо x новую переменную интегрирования

$$\frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \omega, \quad a = \frac{\varepsilon \mu t}{\sqrt{Dt}}, \quad \frac{x \varepsilon \mu t}{2Dt} = a\omega. \quad (12)$$

Тогда формула (11) дает

$$u(\omega) = 2\sqrt{Dt} \int_0^{\infty} e^{\omega^2 - a\omega} d\omega. \quad (13)$$

После подстановки найденного выражения в соотношение (10) получаем

$$E(x) = \frac{J_2 \sqrt{\pi Dt}}{\varepsilon' \varepsilon_0 D} e^{\frac{\varepsilon^2 \mu^2 t^2}{4Dt}} \int_0^{\infty} e^{\omega^2 - a\omega} d\omega + C_1. \quad (14)$$

Для вычисления данного интеграла будем его рассматривать как функцию от параметра a

$$\varphi(a) = \int_0^{\infty} e^{\omega^2 - a\omega} d\omega. \quad (15)$$

Дифференцируя по параметру a выражение (15), находим

$$\varphi'(a) = \int_0^{\infty} (-\omega) e^{\omega^2 - a\omega} d\omega. \quad (16)$$

Правая часть этого равенства может быть преобразована по частям, в результате чего получается соотношение

$$\varphi'(a) = \frac{a}{2} \int_0^{\infty} e^{\omega^2 - a\omega} d\omega. \quad (17)$$

Сравнивая это выражение с формулой (15), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi(a)}{da} = -\frac{a}{2} \varphi(a), \quad (18)$$

которому удовлетворяет интеграл $\varphi(a)$. Интегрируя полученное уравнение, найдем, что

$$\varphi(a) = C e^{-\frac{a^2}{4}}, \quad (19)$$

где C — постоянная интегрирования.

Для ее определения положим в формулах (15) и (19) $a = 0$ и введем вместо ω новую переменную интегрирования y , тогда будем иметь

$$C = \varphi(0) = \int_0^x e^{\omega^2} d\omega = \int_0^x e^{y^2} dy. \quad (20)$$

Внося это значение постоянной C в формулу (19) и учитывая $a = (\varepsilon\mu t)/\sqrt{Dt}$, найдем искомое значение интеграла $\varphi(a)$, а именно

$$\varphi(a) = F(z) = F\left(\frac{\varepsilon\mu t}{2\sqrt{Dt}}\right) = e^{\frac{\varepsilon^2 \mu^2 t^2}{4Dt}} \int_0^{\frac{\varepsilon\mu t}{2\sqrt{Dt}}} e^{y^2} dy. \quad (21)$$

Функция $F((\varepsilon\mu t)/2\sqrt{Dt})$ представляет собой интеграл Досона [6], который численно табулирован, например, в [7]. Интеграл в правой части равенства (21) есть функция ошибок от мнимого аргумента [6]. Поскольку интеграл Досона в точке $x = 0$ равен нулю, то из граничного условия $dV/dx = 0$ при $x = 0$ имеем $C_1 = 0$.

Выражение для распределения напряженности электрического поля с учетом формулы (21) принимает вид

$$E(x) = -\frac{2J_2 \sqrt{\pi Dt} \sqrt{Dt}}{\varepsilon' \varepsilon_0 D} e^{\frac{\varepsilon^2 \mu^2 t^2}{4Dt}} F\left(\frac{\varepsilon\mu t}{2\sqrt{Dt}}\right). \quad (22)$$

Для того чтобы исключить экспоненциально возрастающий член в зависимости (22), необходимо определить плотность диффузионного ионного тока на границе раздела подложка—расплав. Оценивая значение градиента концентрации (7) при $x = 0$ и подставляя полученное выражение в соотношение (4), имеем

$$J_2 /_{x=0} = \frac{eDC_0}{\sqrt{\pi dt}} e^{-\frac{\varepsilon^2 \mu^2 t^2}{4Dt}}. \quad (23)$$

В результате подстановки формулы (23) в выражение (22) окончательно находим распределение напряженности электрического поля в любой точке приповерхностной области пространственного заряда при наличии приложенного напряжения

$$E(x) = - \frac{2eC_0 \sqrt{Dt}}{\varepsilon' \varepsilon_0} F\left(\frac{\varepsilon \mu t}{2\sqrt{Dt}}\right). \quad (24)$$

Причем эффективная глубина x проникновения ионов при электростимулированной диффузии определяется выражением $x = 2\sqrt{Dt} + \varepsilon \mu t$. При этом уравнение (24) имеет следующий вид:

$$E(2\sqrt{Dt} + \varepsilon \mu t) = - \frac{2eC_0 \sqrt{Dt}}{\varepsilon' \varepsilon_0} F\left(\frac{\varepsilon \mu t}{2\sqrt{Dt}}\right). \quad (25)$$

Заменяем при $z > 2$ интеграл Досона его асимптотическим разложением [6]

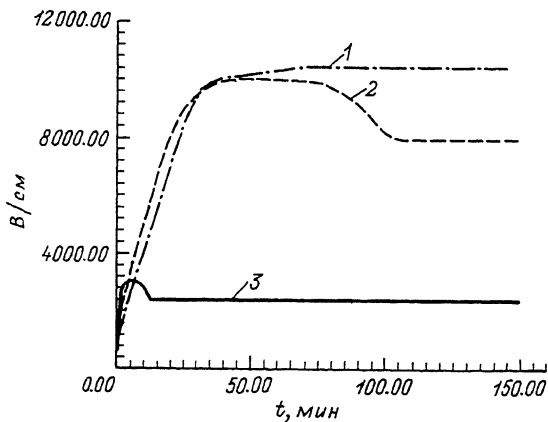
$$F(z) \approx \frac{1}{2z} \quad (26)$$

Распределение напряженности электрического поля в этом случае принимает вид

$$E(2\sqrt{Dt} + \varepsilon \mu t) = - \frac{2eC_0 \sqrt{Dt}}{\varepsilon' \varepsilon_0} \frac{\sqrt{Dt}}{\varepsilon \mu t}. \quad (27)$$

Численное значение величины граничной концентрации ионов C_0 , входящей в формулы (24), (25) и (27), может быть получено из решения уравнений диффузии с разными коэффициентами диффузии для двух сред. В результате „склеивания“ концентрационных профилей в присутствии электрического поля, соответствующих твердой и жидкой фазам, получается интегральное уравнение. При фактическом отыскании функции $C_0(x, t)$ из этого интегрального уравнения возникают серьезные затруднения, связанные с необходимостью численно вычислять несобственные интегралы [8]. Поэтому для простоты будем считать, что величина $C_0(x, t)$ тождественно равна величине C_0 .

В качестве примера проведем расчет по выражениям (25) и (27) численных значений напряженности электрического поля для волноводов, сформированных из расплава AgNO_3 , при значениях параметров $C_0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T = 330 \text{ }^\circ\text{C}$, $\varepsilon = 3.9$. Коэффициент диффузии и подвижность ионов серебра при температуре $330 \text{ }^\circ\text{C}$ равны $D = 2.15 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2/\text{с}$ и $\mu = 4.13 \cdot 10^{-10} \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ соответственно [9].



Распределение напряженности электрического поля при формировании электростимулированных ионно-обменных волноводов в стеклах.

Зависимость напряженности электрического поля от времени t для $\mathcal{E}_1 = 2 \cdot 10^3$ В/см (кривая 1), $\mathcal{E}_2 = 6 \cdot 10^2$ В/см (кривая 2) и $\mathcal{E}_3 = 2 \cdot 10^3$ В/см (кривая 3) представлена на рисунке. График, приведенный на рисунке, показывает, что для $\mathcal{E}_1 = 2 \cdot 10^2$ В/см, $\mathcal{E}_2 = 6 \cdot 10^2$ В/см при времени диффузии меньше 20 мин, а для $\mathcal{E}_3 = 2 \cdot 10^3$ В/см при времени диффузии меньше 3 мин распределение напряженности электрического поля очень близко к прямолинейному. Из рисунка также видно, что для $\mathcal{E}_2 = 6 \cdot 10^2$ В/см при $t_2 > 70$ мин, а для $\mathcal{E}_3 = 2 \cdot 10^3$ В/см при $t_3 > 10$ мин величина напряженности электрического поля убывает до $8 \cdot 10^3$ и $2.4 \cdot 10^3$ В/см соответственно и не снижается ниже этих значений. Изменение распределения напряженности электрического поля от времени диффузии в этом случае определяется асимптотическим характером решения уравнения Пуассона (27).

Следовательно, при малых временах ионно-обменного процесса наблюдается весьма сильная зависимость величины напряженности электрического поля от времени процесса. Стабилизация ионно-обменного процесса наступает при времени диффузии больше 30 мин для напряженности электрического поля меньше $\mathcal{E} = 10^3$ В/см и для значений электрического поля больше $\mathcal{E} = 10^3$ В/см при времени диффузии меньше 10 мин. В связи с этим при времени формирования стимулированных волноводов до 30 мин необходимо с высокой точностью контролировать технологические режимы их изготовления.

Таким образом, в данной работе на основе диффузионной модели с использованием уравнения Пуассона получено аналитическое выражение для распределения напряженности электрического поля в приповерхностной области стеклянной подложки при электростимулированном ионном обмене.

Это позволяет в дальнейшем с помощью уравнения диффузии в совокупности с решениями уравнения Пуассона (25) и (27) найти распределение концентрации ионов по глубине подложки при формировании электростимулированных волноводов.

- [1] Дорош В.С., Хотнянская Е.Б., Яковенко Н.А. // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 9. С. 1854—1856.
- [2] Иванов В.Н., Никитин В.А., Яковенко Н.А., Никитина Е.П. // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 10. С. 2088—2089.
- [3] Ramaswamy R.V., Srivastava R. // J. Lightwave Techn. 1988. Vol. 6. N 6. P. 984—1001.
- [4] Huggins M.L., Kuan-Han. Dun. // J. Am. Cer. Soc. 1943. Vol. 26. P. 4.
- [5] Chartier G., Collier P., Guez A., Jaussand P., Won Y. // Appl. Opt. 1984. Vol. 19. N 7. P. 1092—1098.
- [6] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Изд.-во физ.-мат. лит., 1963. 34 с.
- [7] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 140 с.
- [8] Араманович И.Г., Левин В.И. // Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 224 с.
- [9] Lagu R.K., Ramaswamy R.V. // J. Lightwave Techn. 1986.-Vol. 4. N 2. P. 176—181.

Кубанский университет
Краснодар

Поступило в Редакцию
17 июля 1991 г.
