

01

©1992 г.

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЦИЛИНДРЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ. СЛУЧАЙ *H*-ПОЛЯРИЗАЦИИ

Н.П.Жук, А.Г.Яровой

На основе интегральных уравнений для электрического поля разработан новый алгоритм численного решения двумерной задачи рассеяния *H*-поляризованного поля на диэлектрическом цилиндре в плоскостойстой среде. Предложенный алгоритм применен к решению задачи дифракции плоской волны на включении в однородном диэлектрическом слое.

Введение

К проблеме рассеяния волн на цилиндрических телах в плоскостойстых средах сводятся многочисленные прикладные задачи интегральной оптики, геофизики, дефектоскопии и дистанционного зондирования природных сред [1-3]. Детальное исследование этой задачи для *H*-поляризованных волн проведено в частных случаях тонкого хорошо проводящего включения экрана [4] и однородного кругового цилиндра [5], размещенных в кусочно-однородной среде. Рассеяние плоской волны на неоднородном цилиндре произвольного поперечного сечения, погруженного в диэлектрический слой, ограниченный свободным пространством с одной стороны и идеально проводящей плоскостью — с другой, было рассмотрено в [6] методом конечных разностей. В этой работе существенным образом использованы свойственные геофизическим моделям чисто мнимый характер диэлектрических проницаемостей тела и окружающей среды, а также наличие границ диэлектрик-свободное пространство и диэлектрик-идеальный проводник. Мы обратились к более совершенной модели, в которой учтены как произвольные геометрическая форма и диэлектрическое заполнение цилиндра, так и произвольный плоскостойстый характер окружающей цилиндр среды.

Цель работы — численное решение двумерной задачи дифракции *H*-поляризованной волны на произвольном проницаемом включении в слоистой среде.

Нами разработан новый алгоритм численного решения поставленной задачи, отличительными особенностями которого являются, во-первых, использование в качестве основы алгоритма системы интегральных уравнений для электрического поля, во-вторых, способ вычисления матричных элементов системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), учитывающих как наличие логарифмической особенности у функции Грина, так и расположение полюсов в комплексной плоскости спектрального параметра у ее фурье-образа, в-третьих, решение СЛАУ методом сопряженного градиента с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) по координате вдоль направления однородности среды. Тестирование алгоритма проведено на примере задачи рассеяния плоской волны на цилиндре с круговым поперечным сечением, погруженным в кусочно-однородную среду.

1. В принятой нами модели материальная среда занимает все трехмерное пространство $\mathbf{R} = (x, y, z)$ и описывается комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z)$ ($\text{Im } \varepsilon(z) \geq 0$), зависящей только от вертикальной координаты z . При $z < b$ ($b < 0$) и $z > 0$ функция $\varepsilon(z)$ принимает постоянные значения ε_c и ε_e соответственно, а в пределах интервала $b < z < 0$ представляет собой произвольную кусочно-гладкую функцию. Пусть сторонние монохроматические ($\sim \exp(-i\omega t)$) источники, распределение которых не зависит от координаты x , создают в описанной регулярной среде поле $\mathbf{E}_0 = (0, E_{0y}, E_{0z})$, $\mathbf{H}_0 = (H_0, 0, 0)$. Рассмотрим рассеяние первичного поля $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ на аксиально однородном цилиндре с образующей параллельной оси $0x$ и поперечным сечением S . Введем комплекснозначную кусочно-гладкую функцию $\varepsilon_p(\mathbf{r})$ переменного вектора $\mathbf{r} = (0, y, z)$, равную диэлектрической проницаемости цилиндра при $\mathbf{r} \in S$ и совпадающую с $\varepsilon(z)$ при $\mathbf{r} \in S$. Область локализации сторонних источников в плоскости $y0z$ расположим снаружи от S .

Единственная компонента магнитного поля $\mathbf{H} = H\mathbf{x}_0$ в такой среде, согласно [7], удовлетворяет во всей плоскости $u0z$ соотношению

$$H(\mathbf{r}) = H_0(\mathbf{r}) - ik_0 \int_s d\mathbf{r}' [\varepsilon^{-1}(z')(\varepsilon_p(\mathbf{r}') - \varepsilon(z'))] \times \\ \times [E_z(\mathbf{r}')\partial_{y'}\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - E_y(\mathbf{r}')\partial_{z'}\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]. \quad (1)$$

Дифференцируя соотношение (1) по y и z , получим систему интегральных уравнений для компонент полного электрического поля $\mathbf{E} \equiv E_y\mathbf{y}_0 + E_z\mathbf{z}_0$

$$E_y(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_p(\mathbf{r})} E_{0y}(\mathbf{r}) + \varepsilon_p^{-1}(\mathbf{r}) \int_s d\mathbf{r}' [\varepsilon_p(\mathbf{r}')/\varepsilon(z') - 1] \times \\ \times [E_z(\mathbf{r}')\partial_z\partial_{y'}\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - E_y(\mathbf{r}')\partial_z\partial_{z'}\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')], \\ E_z(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_p(\mathbf{r})} E_{0z}(\mathbf{r}) + \varepsilon_p^{-1}(\mathbf{r}) \int_s d\mathbf{r}' [\varepsilon_p(\mathbf{r}')/\varepsilon(z') - 1] \times \\ \times [E_y(\mathbf{r}')\partial_y\partial_{z'}\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - E_z(\mathbf{r}')\partial_y\partial_{y'}\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')], \quad (2)$$

где $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ — орты осей $0x, 0y, 0z$ соответственно.

Скалярная функция Грина $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, учитываяаяся слоистой характером регулярной среды, подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} [\varepsilon(z)\partial_z\varepsilon^{-1}(z)\partial_z + \partial_y^2 + k_0^2\varepsilon(z)] \mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varepsilon(z)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ -\infty < y, y', z, z' < \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

($k_0 = \omega/c$, c — скорость света в вакууме) и условиям излучения при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. Условия непрерывности функции и ее производной по z , деленной на $\varepsilon(z)$, на поверхностях скачка функции $\varepsilon(z)$ считаются встроенными в (3). Вторые производные $\partial_y\partial_{y'}$ и $\partial_z\partial_{z'}$ от $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ имеют сингулярный характер при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ и понимаются в смысле обобщенных функций [8].

Обозначим через d_1 и d_2 минимальное и максимальное значения координаты z в области S , занятой включением. Предположим, что в слое $d_1 < z < d_2$ регулярная среда однородна, т.е. $\varepsilon(z) = \varepsilon_s$. Тогда функция Грина в области $d_1 < z$, $z' < d_2$ допускает представление $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{H}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$,

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_s H_0^{(1)}(k_0\sqrt{\varepsilon_s}|\mathbf{r}|)/(y_i), \quad (4)$$

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^\infty d\kappa h(\kappa, z, z') \cos(\kappa(y - y'))/\pi. \quad (5)$$

Здесь $\mathcal{H}_0(\mathbf{r})$ — функция Грина однородного пространства с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_s$; контур интегрирования в (5) проходит в комплексной плоскости κ так, что все полюсы подинтегрального выражения, лежащие на положительной части действительной оси, обходятся снизу; функция $h(\kappa, z, z')$ определена соотношением

$$\begin{aligned} h(\kappa, z, z') = \varepsilon_s \left[\exp(i\gamma_s(z - 2d_1)) R(\kappa) (\exp(i\gamma_s z') + Q(\kappa) \exp(-i\gamma_s(z' - 2d_2))) \right. \\ \left. + \exp(-i\gamma_s(z - 2d_2)) Q(\kappa) (\exp(-i\gamma_s z') + R(\kappa) \exp(i\gamma_s(z' - 2d_1))) \right] (2i\gamma_s P(\kappa)), \end{aligned}$$

$$P(\kappa) = 1 - R(\kappa)Q(\kappa) \exp(2i\gamma_s(d_2 - d_1)),$$

$$R(\kappa) = (\gamma_s\nu - k_0)/(\gamma_s\nu + k_0), \quad Q(\kappa) = (\gamma_s\lambda - k_0)/(\gamma_s\lambda + k_0),$$

$$\nu(\kappa) = -ik_0 \frac{\varepsilon(d_1 - 0)\Psi^-(d_1, \kappa)}{\varepsilon_s\partial_z\Psi^-(d_1 - 0, \kappa)}, \quad \lambda(\kappa) = ik_0 \frac{\varepsilon(d_2 + 0)\Psi^+(d_2, \kappa)}{\varepsilon_s\partial_z\Psi^+(d_2 + 0, \kappa)}. \quad (6)$$

Функции $\Psi^\pm(z, \kappa)$ — произвольные решения уравнения $[\varepsilon(z)\partial_z\varepsilon^{-1}(z)\partial_z + k_0^2\varepsilon(z) - \kappa^2]\Psi(z, \kappa) = 0$, $-\infty < z < \infty$, удовлетворяющие условию излучения при $z \rightarrow -\infty(\Psi^-)$ и $z \rightarrow +\infty(\Psi^+)$; $\gamma_3 \equiv \gamma_s(\kappa) = \sqrt{k_0^2\varepsilon_s - \kappa^2}$, $\text{Im} \gamma_s \geq 0$. Функция $\mathcal{H}_0(\mathbf{r})$ учитывает логарифмическую особенность функции Грина в области источника, в то время как $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — регулярная функция обеих переменных, физически соответствующая отраженному от границ $z = d_1$, $z = d_2$ полю точечного источника, расположенного в слое $d_1 < z < d_2$.

Для точек наблюдения \mathbf{r} , лежащих вне слоя $d_1 < z < d_2$, функция Грина $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ рассчитывается по формуле (5), в которой функция $h(\kappa, z, z')$ заменяется на $\mathcal{H}(\kappa, z, z')$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\kappa, z, z') &= \varepsilon_s \exp(i\gamma_s d_2) (1 + Q(\kappa)) [\exp(-i\gamma_s z') + R(\kappa) \times \\ &\times \exp(i\gamma_s(z' - 2d_1))] [\Psi^+(z, \kappa) / \Psi^+(d_2, \kappa)] / (2i\gamma_s P(\kappa)), \\ &z > d_2, \quad d_1 < z' < d_2; \\ \mathcal{H}(\kappa, z, z') &= \varepsilon_s \exp(-i\gamma_s d_1) (1 + R(\kappa)) [\exp(i\gamma_s z') + \\ &+ Q(\kappa) \exp(i\gamma_s(2d_2 - z'))] [\Psi^-(z, \kappa) / \Psi^-(d_1, \kappa)] / (2i\gamma_s P(\kappa)), \\ &z < d_1, \quad d_1 < z' < d_2; \end{aligned} \quad (7)$$

После решения системы уравнений (2) и нахождения электрического поля во всем пространстве единственная компонента магнитного поля определяется по прямой квадратурной формуле (1).

2. Систему уравнений (2) будем решать численно. Мысленно поместим поперечное сечение включения внутрь прямоугольной сетки, состоящей из $m_y \times m_z$ идентичных прямоугольных элементов со сторонами, параллельными осям $0y$ и $0z$, и размерами Δ_y на Δ_z . Каждой ячейке поставим в соответствие пару индексов (i, t) , где $i = 1 \dots m_y$ — порядковый номер ячейки вдоль оси $0y$, а $t = 1 \dots m_z$ — вдоль оси $0z$. Радиус-вектор центра ячейки обозначим через \mathbf{r}_{it} , а поперечное сечение — через S_{it} . Считая размеры ячеек достаточно малыми, применим кусочно-постоянную аппроксимацию диэлектрической проницаемости включения $\varepsilon_p(\mathbf{r})$ и неизвестного поля $E_{y,z}(\mathbf{r})$

$$\varepsilon_p(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{m_y} \sum_{t=1}^{m_z} \varepsilon_p^{it} F_{it}(\mathbf{r}), \quad E_{y,z} = \sum_{i=1}^{m_y} \sum_{t=1}^{m_z} E_{y,z}^{it} F_{it}(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где $\varepsilon_p^{it} \equiv \varepsilon_p(\mathbf{r}_{it})$; $F_{it}(\mathbf{r}) = 1$ при $\mathbf{r} \in S_{it}$ и $F_{it}(\mathbf{r}) = 0$ при $\mathbf{r} \notin S_{it}$.

Если через ячейку проходит граница области S , то в качестве величины ε_p^{it} берется усредненное по S_{it} значение $\varepsilon_p(\mathbf{r})$. Используя аппроксимацию (8) и применяя к системе интегральных уравнений (2) метод моментов [9] с весовыми функциями $V_{it} \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{it})$, получим СЛАУ II-рода для неизвестных величин $E_{y,z}^{it}$

$$\begin{aligned} E_y^{it} + (\varepsilon_p^{it})^{-1} \sum_{j=1}^{m_y} \sum_{q=1}^{m_z} \chi(j, q) \left(g^{(1)}(i, t, j, q) E_y^{jq} + g^{(2)}(i, t, j, q) E_z^{jq} \right) = \\ = \varepsilon_s E_{0y}(\mathbf{r}_{it}) / \varepsilon_p^{it}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z^{it} + (\varepsilon_p^{it})^{-1} \sum_{j=1}^{m_y} \sum_{q=1}^{m_z} \chi(j, q) \left(g^{(3)}(i, t, j, q) E_y^{jq} + g^{(y)}(i, t, j, q) E_z^{jq} \right) = \\ = \varepsilon_s E_{0z}(\mathbf{r}_{it}) / \varepsilon_p^{it}; \end{aligned}$$

$$\chi(j, q) \equiv \varepsilon_p^{jq} / \varepsilon_s - 1, \quad g^{(n)}(i, t, j, q) \equiv \int_{S_{j,q}} d\mathbf{r}' \hat{D}_n \mathcal{H}(\mathbf{r}_{it}, \mathbf{r}'),$$

$$\hat{D}_1 = \partial_z \partial_{z'}, \quad \hat{D}_2 = -\partial_z \partial_{y'}, \quad \hat{D}_3 = -\partial_y \partial_{z'}, \quad \hat{D}_4 = \partial_y \partial_{y'}. \quad (9)$$

При вычислении матричных элементов $g^{(n)}$ воспользуемся представлением (4), (5) для функции $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, в связи с чем $g^{(n)} = f^{(n)} + h^{(n)}$,

$$f^{(n)}(i, t, j, q) = \int_{S_{j,q}} d\mathbf{r}' \hat{D}_n \mathcal{H}_0(\mathbf{r}_{it} - \mathbf{r}'), \quad (10)$$

$$h^{(n)}(i, t, j, q) = \int_{S_{j,q}} d\mathbf{r}' \hat{D}_n h(\mathbf{r}_{it}, \mathbf{r}'). \quad (11)$$

Рассматривая вторые производные от \mathcal{H}_0 как обобщенные функции, проведем интегрирование в (10) по области элементарной ячейки S_{jq} и получим

$$f^{(1)}(i, t, j, q) = -\frac{k_0 \varepsilon_s^{3/2}}{4i} \int_{\xi_1}^{\xi_2} dy' ((z_t - z') H(w)) \Big|_{z'=\zeta_1}^{z'=\zeta_2},$$

$$f^{(2)}(i, t, j, q) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (-1)^{\alpha+\beta} \mathcal{H}_0(\mathbf{r}_{it} - \rho_{\alpha\beta}),$$

$$f^{(3)}(i, t, j, q) = f^{(2)}(i, t, j, q),$$

$$f^{(y)}(i, t, j, q) = -\frac{k_0 \varepsilon_s^{3/2}}{4i} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} dz' ((y_i - y') H(w)) \Big|_{y'=\xi_1}^{y'=\xi_2},$$

$$H(w) \equiv H_1^{(1)}(k_0 \sqrt{\varepsilon_s} |\mathbf{r}_{it} - \mathbf{r}'|) / |\mathbf{r}_{it} - \mathbf{r}'|, \quad (12)$$

где $\rho_{\alpha\beta} = (0, \xi_\alpha, \zeta_\beta)$ ($\alpha, \beta = 1, 2$); $\xi_{1,2} = y_j \mp \Delta_y/2$, $\zeta_{1,2} = z_q \mp \Delta_z/2$.

Оставшиеся интегралы от функций Ханкеля вычисляются по квадратурным формулам Гаусса с 16 узлами.

Интегралы по площади элементарной ячейки в (11) вычисляются аналитически с учетом разложения функции $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в интеграл Фурье (5). При наличии полюсов у функции $h(\kappa, z, z')$ на действительной оси или вблизи нее в комплексной плоскости κ необходима деформация контура интегрирования в (5) (для применяемых в геофизике моделей из-за чисто мнимой диэлектрической проницаемости среды такая деформация не требуется [3,6]). Нами установлено, что при $k_0 |y - y'| \leq 40$ универсальным (не зависящим от явного вида профиля $\varepsilon(z)$) является путь интегрирования,

состоящий из отрезков прямых в комплексной плоскости κ , соединяющих точки 1 — $\kappa = 0$; 2 — $\kappa = -ik_0 T_\alpha$, $T_\alpha \geq 0$; 3 — $\kappa = k_0(\sqrt{\varepsilon_m} + 1 - iT_\alpha)$, $\varepsilon_m \equiv \max_{b \leq z \leq 0} \varepsilon(z)$; 4 — $\kappa = k_0(\sqrt{\varepsilon_m} + 1)$; 5 — $\kappa = k_0 T_b$, $T_b > 0$. Подбором констант T_α , T_b осуществляется «привязка» контура к конкретной модели среды.

Поскольку решение СЛАУ (9) методами прямого обращения матрицы [10] требует значительных затрат машинного времени, то мы применим метод сопряженного градиента [11], ранее успешно использованный в задачах рассеяния электромагнитных волн на телах в свободном пространстве. Так как ядра исходной системы интегральных уравнений (2) являются разностями по переменным y, y' , то матричные элементы $g^{(n)}(i, t, j, q)$ зависят не от всех четырех индексов порознь, а от t, q и разности $i - j$. Поэтому возникающие в методе сопряженного градиента произведения матриц $\chi g^{(n)}$ на вектор $X(j, q)$ выполним с применением БПРФ [12] по паре индексов i, j .

После нахождения электрического поля внутри цилиндра рассеянное магнитное поле $H_s(\mathbf{r}) \equiv H(\mathbf{r}) - H_0(\mathbf{r})$ найдем по прямой квадратурной формуле

$$H_s(\mathbf{r}) = -ik_0 \sum_{i=1}^{m_y} \sum_{t=1}^{m_z} \chi(i, t) [E_z^{it} \int_{z_t - \Delta_z/2}^{z_t + \Delta_z/2} dz' (\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{y'=y_i + \Delta_y/2}^{y'=y_i + \Delta_y/2}) - E_y^{it} \int_{y_i - \Delta_y/2}^{y_i + \Delta_y/2} dy' (\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{z'=z_t - \Delta_z/2}^{z'=z_t + \Delta_z/2})], \quad (13)$$

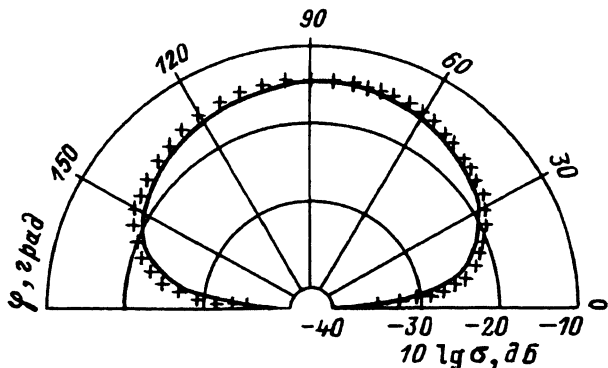
вытекающей из интегрального соотношения (1). Интегралы в (13) при $z < d_1$ или $z > d_2$ вычисляются аналитически на основании разложения функции Грина в интеграл Фурье (5), (7). Интегрирование по κ выполняется численно по описанному выше контуру в комплексной плоскости.

В дальней зоне цилиндра в верхнем ($z > 0$) или нижнем ($z < b$) однородном полупространстве, используя геометрическое приближение функции Грина, для величины плотности потока энергии рассеянного поля получим

$$P_s(L, \varphi) = \frac{c}{4\pi^2} \frac{\varepsilon_e \varepsilon_s^2}{k_0 L} \sin^2 \varphi \frac{\sin^2(\kappa_s \Delta_y/2)}{\kappa_s^2} \left| \frac{\sin(\gamma_s \Delta_z/2)}{\varepsilon_s - \varepsilon_e \cos^2 \varphi} \right. \times \\ \times \frac{\Psi^+(0, \kappa_s)}{\Psi^+(d_2, \kappa_s)} \frac{1 + Q(\kappa_s)}{P(\kappa_s)} \sum_{i=1}^{m_y} \sum_{t=1}^{m_z} \chi(i, t) \exp(-i\kappa_s(y_i - y_0)) \times \\ \times [(\kappa_s E_z^{it} - \gamma_s E_y^{it}) \exp(-i\gamma_s z_t) + R(\kappa_s)(\kappa_s E_z^{it} + \gamma_s E_y^{it}) \times \\ \times \exp(i\gamma_s(z_t - 2d_1))]^2, \quad z > 0, \quad \kappa_s = k_0 \sqrt{\varepsilon_e} \cos \varphi; \\ P_s(D, \psi) = \frac{c}{4\pi^2} \frac{\varepsilon_c \varepsilon_s^2}{k_0 D} \sin^2 \psi \frac{\sin^2(\kappa_s \Delta_y/2)}{\kappa_s^2} \left| \frac{\sin(\gamma_s \Delta_z/2)}{\varepsilon_s - \varepsilon_c \cos \psi} \right. \times$$

Рис. 1. Индикатриса рассеяния кругового цилиндра, погруженного в однородное полупространство.

Сплошная кривая — предлагаемый алгоритм при $m_y = m_z = 4$, крестики — результаты из [5].



$$\begin{aligned} & \times \frac{\Psi^-(b, \kappa_s)}{\Psi^-(d_1, \kappa_s)} \frac{1 + R(\kappa_s)}{P(\kappa_s)} \sum_{i=1}^{m_y} \sum_{t=1}^{m_z} \chi(i, t) \exp(-i\kappa_s(y_i - y_0)) \times \\ & \times [(\kappa_s E_z^{it} + \gamma_s E_y^{it}) \exp(i\gamma_s z_t) + (\kappa_s E_z^{it} - \gamma_s E_y^{it}) Q(\kappa_s) \times \\ & \times \exp(-i\gamma_s(z_t - 2d_2))]^2, \quad z < b, \quad \kappa_s = k_0 \sqrt{\epsilon_c} \cos \psi; \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь L и φ (D и ψ) — радиус и азимутальный угол, отсчитываемый от положительного направления оси Oy , полярной системы координат с центром в точке $y = y_0, z = 0 (z = b)$: $L = \sqrt{z^2 + (y - y_0)^2}$, $\sin \varphi = z/L$; $D = \sqrt{(z - b)^2 + (y - y_0)^2}$, $\sin \psi = |z - b|/D$, $\gamma_s = \gamma_s(\kappa_s)$. Диэлектрические проницаемости ϵ_2, ϵ_c в формулах (14) считаются вещественными.

3. Тестирование предложенного алгоритма было проведено на задаче рассеяния плоской волны на неоднородном круговом цилиндре с радиусом a и проницаемостью ϵ_p , погруженном на глубину z_p в однородное полупространство $z < 0$ с проницаемостью ϵ_s (расстояние z_p отсчитывается от поверхности $z = 0$ до оси цилиндра). Контрольное решение было получено численно-аналитическим методом [5], использующим специфическую форму рассеивателя. Сравнивались значения рассеянного поля в дальней зоне цилиндра в верхнем ($z > 0$) полупространстве. На рис. 1 представлены индикатрисы рассеяния

$$\sigma(\varphi) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} (LP_s(L, \varphi) / (\lambda P_0)), \quad z > 0; \quad \lambda \equiv 2\pi/k_0, \quad (15)$$

(P_0 — плотность потока энергии вышеупомянутой плоской волны, приходящей из верхнего полупространства для значений параметров $\epsilon_s = 4 + 0.36i$; $\epsilon_p = \epsilon_e = 1$; $k_0 z_p = 1$; $k_0 a = 0.5$).

Результаты расчетов по предложенному алгоритму изображены сплошной линией, а контрольные результаты — крестиками. Незначительное расхождение, наблюдаемое на рисунке, связано с погрешностью аппроксимации кругового поперечного сечения цилиндра прямоугольными элементами.

Обсудим вычислительные аспекты предложенного алгоритма. Число точек дискретизации m_y, m_z при выбранной аппроксимации поля и использованных пробных функций зависит от соотношения размеров цилиндра и длин волн внутри и снаружи последнего, формы поперечного

сечения цилиндра, а также требуемой точности. В контрольном примере относительное изменение найденной величины поля внутри включения при переходе от $m_y = m_z = 4$ к $m_y = m_z = 8$ не превосходило по модулю 10^{-1} , а к $m_y = m_z = 16 - 2 \cdot 10^{-2}$. Для практических приложений обычно достаточно выбирать $10 \div 20$ точек аппроксимации на длину волны внутри или снаружи включения.

Число итераций, необходимых для решения СЛАУ (9), определяется размерностью системы, мерой обусловленности матрицы коэффициентов СЛАУ, начальным приближением для искомого поля и требуемой точностью. В контрольном примере в качестве начального приближения выбиралось падающее поле и приближенное решение с невязкой, равной 10^{-8} , достигалось не более, чем за $m_y \times m_z / 10$ итераций (здесь под невязкой приближенного решения \tilde{u} уравнения $\tilde{L}u = f$ понимается норма вектора $\tilde{L}\tilde{u} - f$). Эффективность используемой процедуры решения СЛАУ характеризуется следующими показателями: решение СЛАУ методом Гаусса требует $64C_t m_y^3 m_z^3$ с процессорного времени и $0.256C_p m_y^2 m_z^2$ кб памяти (C_t и C_p — векторные константы; вычисления проводятся с 12 значащими цифрами), в то время как используемый метод требует не более $32\tilde{C}_t m_y^2 m_z^2 \log_2 m_y$ с и $0.128\tilde{C}_p m_y^2 m_z^2$ кб ($\tilde{C}_t \sim C_t$, $\tilde{C}_p \sim C_p$). Таким образом, с увеличением характерного размера поперечного сечения цилиндра вдоль оси Oy отношение затрачиваемого на решение СЛАУ времени методами Гаусса и использованного растет как $2m_y \log_2 m_y$, а отношение требуемой памяти — как $2m_y$.

К сожалению, отсутствие данных по численной реализации алгоритма из работы [6] не позволяют непосредственно сравнивать с ним предложенный нами алгоритм по эффективности. Однако использование метода конечных разностей всегда сопряжено с необходимостью тем или иным способом ограничить область, в которой ищется рассеянное поле. В [6] ограничение рассматриваемой области по координате z проводится за счет выбора специальной модели регулярной среды — слой $b < z < 0$ с чисто мнимой диэлектрической проницаемостью, ограниченный при $z = b$ идеальной проводящей плоскостью и свободным полупространством при $z = 0$. Граничные условия на поверхностях $y = \text{const}_{1,2}$ ставятся приближенно: считается, что на некотором конечном расстоянии от включения полное поле в слое $b < z < 0$ совпадает с первичным полем H_0 . В результате рассматриваемая в методе конечных разностей область $\text{const}_1 \leq y \leq \text{const}_2$, $b \leq z \leq 0$ существенно больше поперечного сечения цилиндра S . Следовательно, при дискретизации исходных уравнений для электромагнитного поля размерности СЛАУ, получаемой методом конечных разностей, намного превосходит СЛАУ, получаемой на основе системы интегральных уравнений (2). Увеличение размерности в свою очередь приводит к возрастанию требуемой оперативной памяти и затрачиваемого процессорного времени ЭВМ на решение СЛАУ. Кроме того, произвол при выборе плоскостей $y = \text{const}_{1,2}$ требует проведения дополнительных исследований на величину ошибки, вносимой приближенными граничными условиями на этих плоскостях, для каждой модели регулярной среды и включения. Таким образом, предложенный в настоящей работе алгоритм оказывается по сравнению с описанными в [6] не только более универсальным (в силу более общей модели регулярной среды), но и более эффективным при численной реализации.

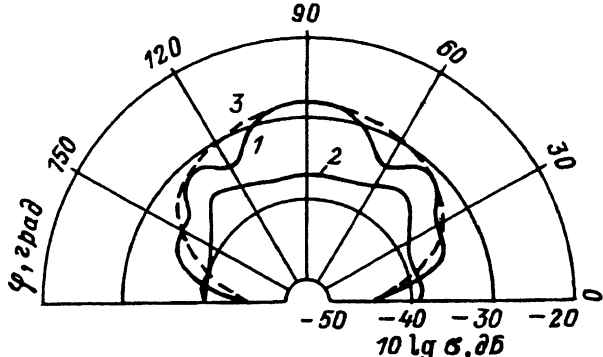


Рис. 2. Индикатриса рассеяния цилиндра прямоугольного поперечного сечения, погруженного в однородный диэлектрический слой.

$k_0 a = 0.6$, $k_0 h = 0.15$, $k_0 |b| = 20.0$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varepsilon_s = 3$, $\varepsilon_p = 1$; $k_0 z_p$: 1 — 2, 2 — 10, 3 — 18.

4. В качестве примера рассмотрим рассеяние плоской волны на цилиндрических включениях в однородном диэлектрическом слое, расположенном в свободном пространстве. Такая задача представляет интерес для интегральной оптики и дефектоскопии полимерных композиционных материалов [1,2]. Специфика задачи состоит в том, что регулярная среда характеризуется малыми значениями тангенса угла потерь. Следовательно, фурье-образ функции Грина $\mathcal{H}(x, z, z')$ имеет полюсы вблизи вещественной оси в комплексной плоскости спектрального параметра x .

Положим диэлектрическую проницаемость среды в области $b < z < 0$ равной вещественной константе $\varepsilon_s > 1$ (т.е. $d_1 = b$, $d_2 = 0$), диэлектрические проницаемости верхнего и нижнего полупространств $\varepsilon_e = \varepsilon_c = 1$. При этом выражения для функций $R(x)$, $Q(x)$ из (6) принимают вид $R(x) = Q(x) = (\gamma_s - \varepsilon_s \gamma_e) / (\gamma_s + \varepsilon_s \gamma_e)$, $\gamma_t \equiv \sqrt{k_0^2 - x^2}$ ($\text{Im } \gamma_e \geq 0$). Оптимальные (по критериям точности и времени вычислений) значения констант T_a , T_b , определяющих контур интегрирования в (5), следующие: $T_a = 2/\sqrt{k_0|y-y'|}$ при $1 < k_0|y-y'| \lesssim 40$ и $T_a = 2$ при $k_0|y-y'| \leq 1$; $T_b = \sqrt{\varepsilon_s} + 20/\min(k_0(z+z'-2b), k_0|z+z'|)$.

Численно исследованы сечения рассеяния $\sigma(\varphi)$ в верхнее ($z > 0$) полупространство, когда первичным полем H_0 является плоская волна, приходящая из $z = +\infty$ под углом скольжения φ_0 . Сечения рассеяния тонких цилиндров (максимальный характерный размер поперечного сечения меньше, чем $\lambda/20$), нормированные на максимум, определяются характеристиками слоя (диэлектрической проницаемостью и толщиной) и расстоянием z_p от центра поперечного сечения цилиндра до верхней границы слоя. Величина сечения рассеяния в максимуме зависит от формы и строения включения. На рис. 2 представлены сечения рассеяния цилиндра с поперечным сечением в виде прямоугольника со сторонами, параллельными осям Oy и Oz , размерами a и h соответственно. Сечения рассеяния тонких цилиндров, расположенных в тонких ($k_0|b|\sqrt{\varepsilon_s} \leq 1$) диэлектрических слоях, при угле скольжения φ_0 первичного поля $\varphi_0 = 90^\circ$ имеют единственный максимум при $\varphi = 90^\circ$. В толстых слоях ($k_0|b|\sqrt{\varepsilon_s} > 2\pi$) сечение рассеяния может иметь несколько максимумов. Причем сечение рассеяния имеет максимум (минимум) при угле рассеяния φ_m , если включение попадает в пучность (узел) стоячей волны, образовавшейся в результате падения на слой плоской волны под углом скольжения φ_m .

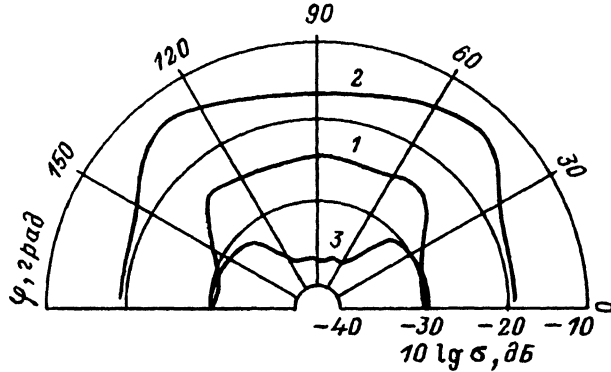


Рис. 3. Индикатрисы рассеяния цилиндров прямоугольного (1, 2) и ромбоидального (3) сечения.

$k_0 a = 3.2$, $k_0 |b| = 20.0$, $k_0 z_p = -10.0$, $\varphi_0 = 90^\circ$, $\epsilon_p = 5$, $\epsilon_s = 3$, $k_0 h$: 1 — 0.15, 2 — 0.60, 3 — 0.60.

Сечения рассеяния включений, сравнимых с длиной волны, определяются в первую очередь формой и строением включения, а во вторую — расположением включения в слое. Сечения рассеяния цилиндров с поперечным сечением в виде прямоугольника и ромба (с диагоналями параллельными осям Oy Oz и длинами a и h) показаны на рис. 3.

Таким образом, в работе предложен новый высокоэффективный алгоритм численного решения двумерной задачи дифракции H -поляризованных волн на диэлектрическом цилиндре произвольного сечения в плоскостной среде. Применение системы интегральных уравнений по поперечному сечению цилиндра позволили существенно сократить время вычислений и снизить объем требуемой памяти по сравнению с существующим алгоритмом [6]. Кроме того, использованные нами метод интегральных уравнений и способ расчета коэффициентом СЛАУ позволяет расширить область применимости алгоритма на среды с малыми (и даже отсутствующими) омическими потерями. Поскольку алгоритм одинаково эффективен для включений как однородных, так и неоднородных, как с координатной, так и с некоординатной формой поперечного сечения, то он может служить основой для решения задач визуализации широкого класса проникаемых объектов в слоистых средах.

В заключение авторы выражают благодарность профессору Третьякову О.А. за внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *Uzunoglu N.K., Fikioris J.S.* // J. Opt. Soc. Amer. 1982. Vol. 72. N 5. P. 628.
- [2] *Потапов А.И., Игнатов В.М., Александров Ю.Б., Баранов Г.Л., Гржецник-Жуковский В.М.* // Технологический неразрушающий контроль пластмасс / Л.: Химия, 1979. 288 с.
- [3] *Дмитриев В.И., Барышникова И.А., Затаров Е.В.* // Аномальные электромагнитные поля пластмассовых тел. Л.: Недра, 1977. 168 с.
- [4] *Назарчук Э.Т.* // Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наукова думка, 1989. 252 с.
- [5] *Kanellopoulos J.D., Cottis P.G., Daniel P.G.* // Int. J. Electronics. 1985. Vol. 59. N 4. P. 423.
- [6] *Дмитриев В.И., Барашков И.С., Мерцикова Н.А.* // Математическое моделирование магнитотеллурических полей в неоднородных средах. М., 1985. 88 с.
- [7] *Хижняк Н.А.* // Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
- [8] *Владимиров В.С.* // Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [9] *Richmond J.H.* // IEEE Trans. Antennas Propagation. 1966. Vol. AP-14. N 7. P. 460.

- [10] *Базвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* // Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
- [11] *Mitra R., Chan C.H.* // *Electromagnetics*. 1985. N 5. P. 123.
- [12] *Воеводин В.В., Тартышников Е.Е.* // Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987. 319 с.

Харьковский университет

Поступило в Редакцию
21 июня 1991 г.

В окончательной редакции
31 октября 1991 г.

