

- [1] Гинзбург В.Л. // Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 683 с.
- [2] Бухман Н.С. // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. № 8. С 912–918.
- [3] Брезовски Л.М. // Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
- [4] Годин О.А. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 11. С. 2094–2104.
- [5] Годин О.А. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 1. С. 17–25.
- [6] Годин О.А. // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 1. С. 31–36.
- [7] Виноградов М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. // Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
- [8] Радиотехнические цепи и сигналы / Под ред. К.А.Самойло. М.: Радио и связь, 1982. 528 с.
- [9] Бухман Н.С. // Физика плазмы. 1991. Т. 17. № 2. С. 185–195.
- [10] Бухман Н.С., Гутман А.Л. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 1. С. 163–165.
- [11] Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З. // Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
- [12] Бухман Н.С. // Физика плазмы. 1989. Т. 15. № 12. С. 1527–1530.

Флодоовощной институт им.И.В.Мичурина
Воронеж

Поступило в Редакцию
5 марта 1991 г.
В окончательной редакции
14 апреля 1992 г.

01;12
© 1992 г.

Журнал технической физики, т. 62, в. 7, 1992

РАСЧЕТ СОЛЕНОИДА ДЛЯ СОЗДАНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ С ЗАДАННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ПРОДОЛЬНОЙ КООРДИНАТЫ

В.И.Бутенко

Введение

Получение аксиально-симметричных постоянных магнитных полей с заданной зависимостью от продольной координаты — одна из актуальных задач экспериментальной физики. Она возникает в электронной оптике, масс-спектрографии, ускорительной технике и во многих других приложениях. Перед нами данная задача возникла в связи с работами по коллективным методам ускорения [1,2]. Обычно такие поля создаются при помощи секционированных соленоидов, состоящих из коаксиально расположенных секций (катушек). Напряженность магнитного поля, создаваемого каждой секцией, зависит от ряда параметров, варьируя которые, можно установить в принципе любое, не слишком быстро меняющееся в пространстве поле по оси соленоида. В ряде трудов разработаны методы расчета таких параметров секций, от которых напряженность магнитного поля зависит линейно. Так, в работах [3–5] рассчитывается соленоид, состоящий из достаточно большого числа секций одинаковых размеров, а расчетными параметрами являются плотности токов в секциях.

В работе [6] та же задача решается для соленоида, состоящего из секций произвольных размеров и количества. В ней описан метод, позволяющий найти оптимальное (в смысле минимального среднеквадратичного отклонения) распределение плотностей токов по секциям соленоида, который основан на минимизации функционала. Однако найденное таким методом решение не является регуляризованным в связи с отсутствием в минимизируемом функционале стабилизирующего члена [7]. Поэтому при достаточно большом количестве секций система линейных уравнений, к решению которой сводится задача, оказывается плохо обусловленной, что вызывает затруднения при ее решении.

Общий недостаток всех этих методов связан с выбором в качестве искомых величин именно токов, а не других параметров секций, от которых зависит напряженность создаваемого ими магнитного поля. В результате такого выбора не все секции загружены оптимально, что приводит к неэкономному расходу обмоточного провода. Кроме того, усложняется запитка соленоида. Чтобы установить требуемое распределение плотностей токов по секциям, нужно либо иметь для каждой секции отдельный источник питания, либо последовательно с каждой секцией включать реостат. Можно, конечно, поступить иначе. Например, в описываемом в [3] соленоиде все секции соединены последовательно, имеют одинаковые размеры, но разное число витков. Однако для изготовления катушки с заданными толщиной намотки и количеством витков необходимо очень тщательно подбирать сечение провода и толщину изоляции, соблюдать постоянство натяжения провода при намотке, что вызывает большие затруднения [3].

Теория

В данной работе решается более общая задача — отыскиваются параметры секций соленоида (N_1, N_2, \dots, N_n) определенного вида. Это могут быть, например, толщина намотки, длина секции, внутренний радиус и т.д., т.е. величины, от которых напряженность поля зависит, вообще говоря, нелинейно.

Рассмотрим секционированный соленоид, состоящий из n коаксиальных секций произвольного сечения. Пусть напряженность поля, создаваемого i -й секцией в точке z , описывается функцией $H_i(N_i, z)$, а напряженность поля, которое нужно создать по оси соленоида на интервале $[a, b]$, — функцией $B(z)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n H_i(N_i, z) = B(z), \quad (1)$$

и задача сводится к нахождению вектора $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_n)$. Поскольку уравнение (1) в общем случае точных решений не имеет, то речь идет о нахождении квазирешения, минимизирующего сглаживающий функционал [7]

$$F(N_1, \dots, N_n, \beta) = \int_a^b \alpha(z) \left[\sum_{i=1}^n H_i(N_i, z) - B(z) \right]^2 dz + \beta \sum_{j=1}^n N_j^2, \quad (2)$$

где $\alpha(z)$ — весовая функция, β — параметр регуляризации.

Весовая функция $\alpha(z)$ вводится для улучшения аппроксимации функции $B(z)$ на концах интервала $[a, b]$.

Условия минимума функционала (2)

$$\frac{\partial F(N_1, \dots, N_n, \beta)}{\partial N_k} = 0$$

дают систему нелинейных уравнений

$$\int_a^b \alpha(z) \left[\sum_{i=1}^n H_i(N_i, z) - B(z) \right] \frac{\partial H_k(N_k, z)}{\partial N_k} dz + \beta N_k = 0, \quad (3)$$

которую можно решить одним из известных методов (см., например, [9]). Для решения системы (3) методом Ньютона разложим функцию $H_i(N_i, z)$ в ряд Тейлора в точке N_i^{l-1} и ограничимся линейными членами ряда. Получим

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} N_i^l + \beta N_k^l = C_k, \quad (4)$$

где

$$A_{ik} = \int_a^b \alpha(z) \frac{\partial H_i(N_i, z)}{\partial N_i} \Big|_{N_i=N_i^{l-1}} \frac{\partial H_k(N_k, z)}{\partial N_k} \Big|_{N_k=N_k^{l-1}} dz, \quad (5)$$

$$C_k = \int_a^b \alpha(z) \left\{ B(z) - \sum_{i=1}^n \left[H_i(N_i^{l-1}, z) - \frac{\partial H_i(N_i, z)}{\partial N_i} \Big|_{N_i=N_i^{l-1}} N_i^{l-1} \right] \right\} \times \\ \times \frac{\partial H_k(N_k, z)}{\partial N_k} \Big|_{N_k=N_k^{l-1}} dz, \quad (6)$$

N_i^l — значение искомого вектора на l -й итерации.

Параметр регуляризации β можно определить из уравнения

$$\int_a^b \alpha(z) [H(N_1^0, \dots, N_n^0, z) - B(z)]^2 dz + \beta \sum_{j=1}^n N_j^{02} = \delta^2, \quad (7)$$

где δ — относительная погрешность; вектор $N^0 = (N_1^0, \dots, N_n^0)$ удовлетворяет системе уравнений (3), если функционал $H(N_1, \dots, N_n, z) = \sum_{i=1}^n H_i(N_i, z)$ выпуклый [7].

В случае произвольного нелинейного функционала $H(N_1, \dots, N_n, z)$ можно использовать так называемый альтернативный способ выбора параметра регуляризации [8].

Весовая функция $\alpha(z)$ должна иметь подъемы на концах интервала $[a, b]$ (рис. 2), так как там ухудшается аппроксимация поля. Но в простейшем случае весовая функция может быть просто константой.

Решение задачи по расчету соленоида включает в себя следующие этапы: выбор величин, определяемых параметрами физической установки, условиями теплоотвода и другими факторами; определение типа искомых параметров N_i ; выбор начального приближения N_i^0 ; решение системы уравнений (4)–(6); корректировка параметра регуляризации β , весовой функции $\alpha(z)$ и других исходных данных (при необходимости); повторное решение системы (4)–(6) и т.д. до получения удовлетворительного результата.

Наиболее часто на практике применяются соленоиды, состоящие из секций прямоугольного сечения. В этом случае аппроксимирующие функции $H_i(N_i, z)$ имеют вид

$$H_i(z) = \frac{2\pi J_i \delta_i}{c} \left[(z - \xi_i) \ln \frac{R_i + \sqrt{R_i^2 + (z - \xi_i)^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + (z - \xi_i)^2}} - (z - a_i - \xi_i) \ln \frac{R_i + \sqrt{R_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2}} \right], \Theta,$$

где J_i — плотность тока, ед. ГС; δ_i — коэффициент заполнения; ξ_i — координата начала секции, см; r_i — внутренний радиус секции, см; R_i — внешний радиус секции, см; a_i — длина секции, см; c — скорость света, см/с.

Исходными величинами, задаваемыми на первом этапе, являются длина участка, на котором требуется создать заданное магнитное поле $[a, b]$, внутренний радиус секций r_i , плотность тока J_i , количество секций n и их координаты ξ_i . Две последние величины выбираются исходя из требуемой точности вычислений, учитывая, что напряженность магнитного поля, создаваемого одной секцией, уменьшается на $\sim 70\%$ на расстоянии порядка внутреннего радиуса от торца секции.

За искомые величины могут быть приняты в принципе любые параметры секций, от которых зависит магнитное поле соленоида, однако наибольшее практическое значение имеют три из них: толщина катушки $d_i = R_i - r_i$, длина секции a_i и координата секции ξ_i .

Выбор начального приближения зависит от типа искомых параметров, поэтому рассмотрим каждый случай в отдельности.

а) Решение задачи относительно толщины катушки d_i . Это наиболее простой случай. Производные

$$\frac{\partial H_i}{\partial N_i} \equiv \frac{\partial H_i}{\partial d_i}$$

имеют вид

$$\frac{\partial H_i(d_i, z)}{\partial d_i} = \frac{2\pi J_i \delta_i}{c} \left[\frac{z - \xi_i}{\sqrt{(r_i + d_i)^2 + (z - \xi_i)^2}} - \frac{z - a_i - \xi_i}{\sqrt{(r_i + d_i)^2 + (z - a_i - \xi_i)^2}} \right], \frac{\Theta}{\text{см}}.$$

За начальное приближение можно принять $d_i^0 = 0$, хотя итерационный процесс сходится практически при любых разумных d_i^0 . Длины секций a_i выбираются из геометрических соображений. Лучше всего их сделать одинаковыми.

б) Решение задачи относительно длины секции a_i . Производные

$$\frac{\partial H_i}{\partial N_i} \equiv \frac{\partial H_i}{\partial a_i}$$

в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i(a_i, z)}{\partial a_i} = & \frac{2\pi J_i \delta_i}{c} \left[\ln \frac{R_i + \sqrt{R_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2}} + (z - a_i - \xi_i)^2 \times \right. \\ & \times \left(\frac{1}{\sqrt{R_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2} (R_i + \sqrt{R_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2})} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{r_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2} (r_i + \sqrt{r_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2})} \right) \right], \frac{\partial}{\partial \text{см}}. \end{aligned}$$

Здесь задача осложняется необходимостью правильного выбора толщины катушки d_i , так как при слишком малых d_i возможно перекрытие секций. Рекомендуется оценить ее, решив систему (4)–(6) относительно a_i , считая весь соленоид одной секцией. Длины секций a_i можно принять равными зазорам между соседними секциями и затем использовать эти значения в качестве начального приближения a_i^0 .

в) Решение задачи относительно координат секций ξ_i . Этот вариант может быть использован при небольших значениях неоднородности магнитного поля, но зато имеется возможность использования одинаковых секций. Производные

$$\frac{\partial H_i}{\partial N_i} \equiv \frac{\partial H_i}{\partial \xi_i}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_i(\xi_i, z)}{\partial \xi_i} = & \frac{2\pi J_i \delta_i}{c} \left[\ln \left(\frac{R_i + \sqrt{R_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2}} \cdot \frac{r_i + \sqrt{r_i^2 + (z - \xi_i)^2}}{R_i + \sqrt{R_i^2 + (z - \xi_i)^2}} \right) + \right. \\ & + (z - a_i - \xi_i)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{R_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2} (R_i + \sqrt{R_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2})} - \right. \\ & - \frac{1}{(r_i + \sqrt{r_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2}) \sqrt{r_i^2 + (z - a_i - \xi_i)^2}} \left. \right) - \\ & \left. - (z - \xi_i)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{R_i^2 + (z - \xi_i)^2} (R_i + \sqrt{R_i^2 + (z - \xi_i)^2})} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{1}{\left(r_i + \sqrt{r_i^2 + (z - \xi_i)^2} \right) \sqrt{r_i^2 + (z - \xi_i)^2}} \right], \frac{\partial}{\partial \dots}$$

Здесь, как и в предыдущем случае, остается проблема определения толщины намотки d_i , однако перекрытие секций может возникнуть и при неправильном выборе начального приближения ξ_i^0 . Практический расчет показывает, что в данном варианте задачи функционал (2) имеет множество локальных минимумов, в которые „сваливается“ итерационный процесс при неудачном выборе ξ_i^0 . Нужный экстремум, как правило, достигается, если принять за начальное приближение равномерное размещение секций соленоида относительно интервала $[a, b]$.

При неудовлетворительных результатах решение системы (4)–(6) (не достигнута точность, нарушены геометрические ограничения и т.п.) необходимо откорректировать параметр регуляризации β и (или) весовую функцию $\alpha(z)$ и повторить решение системы. Параметр регуляризации влияет на скорость сходимости итерационного процесса, на среднеква-

дратичную погрешность $\delta^2 = \int_a^b [H(N_1^0, \dots, N_n^0, z) - B(z)]^2 dz$ и на характер

решения. С уменьшением β итерации сходятся быстрее, уменьшается δ^2 , но решение становится менее „гладким“, т.е. возрастает разница между значениями искомым параметров соседних секций или даже появляются отрицательные значения принципиально положительных параметров (например, толщины намотки d_i). Если итерационный процесс сходится очень медленно и при этом не достигается заданная точность вычислений, то, значит, параметр β слишком велик. Заметим, что медленная сходимость и даже расхождение итераций могут возникнуть и по причине неудачного расположения секций соленоида относительно интервала $[a, b]$: например, из-за чрезмерной близости границ последнего к краям соленоида.

Необходимость введения весовой функции $\alpha(z)$ обусловлена тем, что в большинстве случаев требуется минимизировать не среднеквадратичную невязку δ^2 , а наибольшее значение абсолютной ошибки на интервале $[a, b]$ $\Delta = \max |f(z)|$, $a \leq z \leq b$, где $f(z) = H(N_1^0, \dots, N_n^0, z) - B(z)$. Функция $f(z)$ имеет периодический характер с переменной амплитудой, которая как правило, минимальна в центре интервала $[a, b]$ и возрастает вблизи его границ. Роль весовой функции $\alpha(z)$ заключается в том, чтобы сделать амплитуду $f(z)$ постоянной. Зависимость между $\alpha(z)$ и амплитудой функции $f(z)$ обратная: чем больше весовая функция, тем меньше амплитуда $f(z)$ в той же точке. Речь здесь идет, разумеется, не об абсолютной величине $\alpha(z)$, а об отношении

$$\frac{\alpha(z)}{\min \alpha(z)},$$

так как, как видно из (2), весовая функция $\alpha(z)$ может быть определена с точностью до постоянного множителя. Чтобы выбор параметра регуляризации β не зависел от корректировки $\alpha(z)$, рекомендуется зафиксировать ее минимальное значение $\min \alpha(z) = \alpha_m = \text{const}$. При этом условии

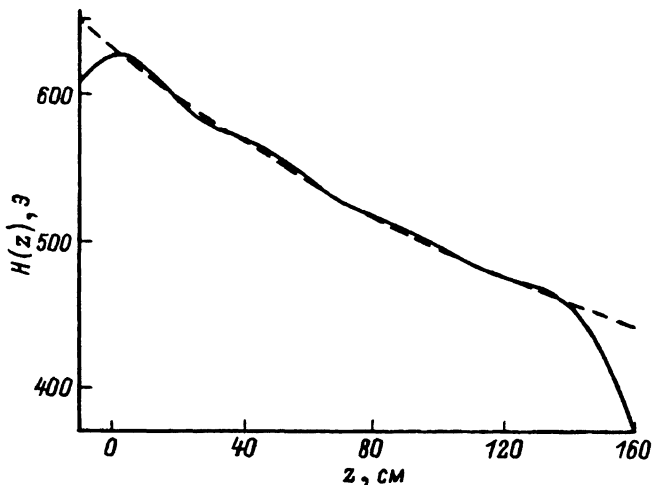


Рис. 1.

скорость сходимости итерационного процесса практически не зависит от выбора весовой функции $\alpha(z)$.

Результаты расчета для случая вычисления толщины намотки приведены на рис. 1. Здесь функция $B(z)$ обозначена штриховой линией (поле, которое требовалось создать по оси соленоида), а функция $H(d_1^0, \dots, d_n^0, z) = \sum_{i=1}^n H_i(d_i^0, z)$ — сплошной (поле, создаваемое соленоидом с расчетными параметрами (d_1^0, \dots, d_n^0) , $n = 15$). Как видим, наблюдается хорошее совпадение этих функций на всем интервале $[0, b]$, $b = 140$ см. В качестве весовой функции $\alpha(z)$ использовалась следующая функция

$$\alpha(z) = 1 + \left(\frac{z - \gamma}{e} \right)^4.$$

Ее график для $\gamma = 70$, $e = 26$ приведен на рис. 2. Параметр регуляризации $\beta = 10$. Заметим, что плотность тока во всех секциях задавалась одинаковой, что исключает перегрузку концевых секций. Благодаря этому более рационально расходуется обмоточный провод и снижается потребляемая мощность по сравнению с соленоидами, у которых требуемое магнитное поле обеспечивается распределением плотностей токов по секциям. Упрощается также запитка соленоида, так как при общем для всех секций токе их можно соединить последовательно и подключить к общему источнику питания. Все это в конечном итоге сказывается на габаритах, массе и стоимости соленоида.

Для проверки описанного в данной работе метода был изготовлен соленоид, состоящий из девяти одинаковых секций, причем заданная конфигурация магнитного поля достигалась их взаимным расположением.

Результаты измерений магнитного поля представлены на рис. 3, где штриховая линия — расчет, сплошная — эксперимент. Максимальная погрешность на рабочем участке от 0 до 80 см, обусловленная в основном точностью измерений и точностью изготовления катушек, не превышает 5%.

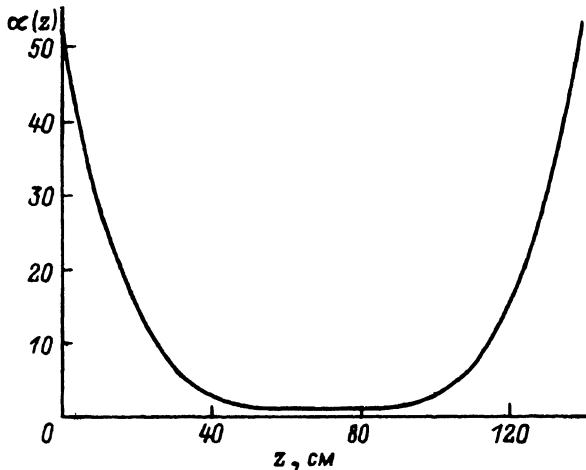


Рис. 2.

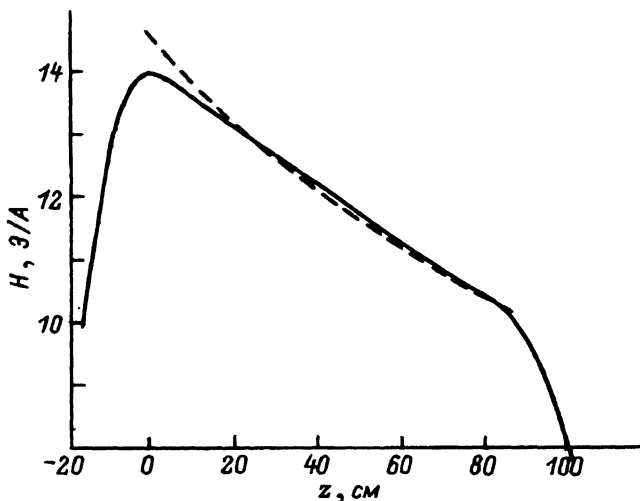


Рис. 3.

Список литературы

- [1] *Ivanov B.I., Goroghanin D.V., Miroschnichenko V.A., Prishchpov V.P.* // Proc. 3rd Intern. Conf. on High Power Electron and Ion Beem. Novosibirsk, 1979. Vol. 1. P. 327-332.
- [2] *Бутенко В.И., Егоров А.М., Иванов Б.И. и др.* // Тез. докл. Всесоюз. семинара „Плазменная электроника“. Харьков, 1988. С. 27-28.
- [3] *Капица С.П.* // Электроника больших мощностей. М.: Наука, 1963. № 2. С. 109-118.
- [4] *Грабарь Л.П.* // Электроника больших мощностей. М.: Наука, 1968. № 5. С. 195-208.
- [5] *Adamiak K.* // Appl. Phys. 1978. Vol. 16. N 4. P. 417-423.
- [6] *Луганский Л.Б.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1263-1265.

- [7] Тилонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
 [8] Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. // ДАН СССР. 1974. Т. 214. № 3. С. 499–500.
 [9] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.

Харьковский физико-технический институт

Поступило в Редакцию
 1 апреля 1991 г.
 В окончательной редакции
 31 октября 1991 г.

01;04;10
 © 1992 г.

Журнал технической физики, т. 62, в. 7, 1992

К ТЕОРИИ ИНЖЕКЦИИ СВЕРХПЛОТНЫХ ПУЧКОВ В ПЛАЗМУ

Э. В. Ростомян

Как известно, при инжекции электронного пучка в плазму его фронт индуцирует электромагнитное поле, которое по существу является начальным возмущением для развивающейся плазменно-пучковой неустойчивости [1]. Динамика дальнейшего развития неустойчивости зависит от многих факторов, основным из которых является величина тока пучка. При малых токах структура возбуждаемых полей зависит лишь от свойств и геометрии плазмы [2,3]. С увеличением тока пучка все большую роль начинают играть поля высокочастотного пространственного заряда пучка [4–9]. Они могут влиять не только на структуру возбуждаемых пучком полей и динамику их роста [8,10], но и определять физический механизм воздействия пучка с плазмой. В качестве параметра, характеризующего взаимодействие электронного пучка с плазмой, может служить величина

$$\alpha = \frac{\omega_b^2}{\gamma^3 k_{\perp}^2 u^2}, \quad (1)$$

где $\omega_b^2 = 4\pi n_b e^2 / m$, n_b — плотность пучка, u — его скорость, e и m — заряд и масса электрона, $\gamma = (1 - u^2 c^{-2})^{-1/2}$, k_{\perp} — поперечное волновое число.

При малых токах пучка, когда он меньше предельного вакуумного $I \ll I_0 = \gamma t u^3 / 16e$ и соответственно $\alpha \ll \gamma^{-2}$, взаимодействие пучка с плазмой определяется индуцированным излучением плазменных волн электронами пучка. Возбуждаемые колебания оторваны от пучка в том смысле, что существуют в его отсутствие. Иная ситуация имеет место для пучков с токами, превышающими предельный вакуумный, т.е. в условиях $\gamma^{-2} \ll \alpha \ll 1$. Здесь механизм неустойчивости связан либо с возбуждением пучковых волн с отрицательной энергией либо с аперриодической модуляцией пучка и возникновением полей, связанных с пучком и увлекаемых им [8,10]. В результате меняется зависимость инкремента от