1992 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 62, N 8

01;09
©1992

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СРЕДАХ

И.Г.Абламунец

Рассматривается задача возбуждения электромагнитных волн во вращающейся среде неподвижными и в неподвижной среде вращающимися сторонними электрическими токами и зарядами. В качестве исходных использованы уравнения электродинамики в ковариантной форме, дополненные материальными соотношениями, записанными в четырехмерной форме. Для случая $1-\beta^2 \approx 1$, где $\beta = v/c$, v — линейная скорость точек среды, c — скорость света, характеризующего собой медленное движение, получены представления электромагнитного поля с помощью двух скалярных функций — аналогов потенциалов Дебая, зависящих от распределения сторонних источников поля в пространстве и их частоты вращения или частоты вращения среды. Приведены примеры использования полученных результатов.

Введение

Задача возбуждения вращиющимися источниками электромагнитного поля во вращающейся и неподвижной системах отсчета рассмотрена в [1]. Полученные в [1] результаты позволяют рассчитывать электромагнитные поля в вакууме и решать задачи дифракции на телах, когда последние можно считать идеально проводящими или на границе можно задать поверхностный импеданс. Однако если среда обладает электрофизическими свойствами, отличными от свойств вакуума, то связи между полями, индукциями и током проводимости (материальные соотношения) усложняются [2] и непосредственное использование результатов работы [1] оказывается затруднительным. Для таких вращающихся сред задача определения электромагнитного поля, возбуждаемого сторонними источниками, до сих пор не решена. В этой связи определенный интерес представляют ее приближенные решения, одно из которых приводится в настоящей работе.

Постановка задачи

Введем в свободном пространстве инерциальную систему отсчета $K(x, y, z, t)$ с покоящейся в ней точкой наблюдения $P(x, y, z, t)$. В системе

K относительно P вращается с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ некоторое однородное тело, внутри которого в области V заданы сторонние токи и заряды частоты ω. Совместим начало системы отсчета K с центром вращения и направим ось $\mathbf{z}$ вдоль оси вращения. Введем вращающуюся жесткую систему отсчета $K'(x', y', z', t)$, в которой область V, занятая сторонними токами и зарядами, покоится. Обозначим через $P'(x', y', z', t)$ точку наблюдения поля, покоящуюся в K'. Необходимо найти электромагнитные поля в системах отсчета K и K'.

Для описания электромагнитных процессов в произвольной системе криволинейных координат сформулируем исходные уравнения электродинамики в ковариантной форме [1,3]

$$\frac{\partial \hat{f}^{ik}}{\partial x^k} = \hat{j}^i + \hat{j}^{i,\text{ст}}, \qquad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0$$

$$(i, k, l = 1, 2, 3, 0), \tag{1}$$

где $\hat{f}^{ik}$ — контравариантная тензорная плотность электромагнитного поля и F_{ik} — ковариантный тензор электромагнитного поля определяются выражениями

$$\hat{f}^{\alpha\beta} = -\hat{f}^{\beta\alpha} = \hat{H}^{\alpha\beta}, \qquad \hat{f}^{\alpha 0} = -\hat{f}^{0\alpha} = -\hat{D}^{\alpha},$$

$$\hat{f}^{ik} = 0 \quad \text{при} \quad i = k,$$

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha} = -B_{\alpha\beta}, \qquad F_{\alpha 0} = -F_{0\alpha} = -E_{\alpha},$$

$$F_{ik} = 0 \quad \text{при} \quad i = k,$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3, \tag{2}$$

в которых $E_\alpha = \mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ — напряженность электрического поля (ковариантный вектор), $\hat{H}^{\alpha\beta} = \hat{\mathbf{H}} = (\hat{H}^{23}, -\hat{H}^{13}, \hat{H}^{12})$ — напряженность магнитного поля (контравариантная бивекторная плотность веса + 1), $\hat{D}^\alpha = \hat{\mathbf{D}} = (\hat{D}^1, \hat{D}^2, \hat{D}^3)$ — электрическая индукция (контравариантная векторная плотность веса +1), $B_{\alpha\beta} = \mathbf{B} = (B_{23}, -B_{13}, B_{12})$ — магнитная индукция (ковариантный бивектор), $\hat{j}^i$ и $\hat{j}^{i,\text{ст}}$ - плотность полного четырехмерного тока в среде и плотность стороннего четырехмерного тока (контравариантные векторные плотности веса +1). Компоненты четырехмерного тока образованы вектором плотности тока $\hat{j}^\alpha = \hat{\mathbf{j}} = (\hat{j}^1, \hat{j}^2, \hat{j}^3)$ и скалярной плотностью $\hat{\rho}$ электрического заряда $\hat{j}^i = (\hat{j}^\alpha, \hat{\rho})$.

Тензоры электромагнитного поля $\hat{f}^{ik}$ и F_{ik} связаны соотношением [2]

$$\hat{f}^{ik} = i(c\mu_\alpha)^{-1} \cdot \sqrt{\mathcal{G}} \left[\mathcal{G}^{im}\mathcal{G}^{kp} + \varkappa \left(\mathcal{G}^{im} U^k U^p + \mathcal{G}^{kp} U^i U^m\right)\right] F_{mp}, \tag{3}$$

а плотность $\hat{j}^i$ полного тока в среде находится через тензор F_{ik} [2]

$$\hat{j}^i - \mathcal{G}_{lk} \cdot \hat{j}^k \cdot U^l \cdot U^i = \sigma \cdot \sqrt{\mathcal{G}} \cdot \mathcal{G}^{ip} \cdot U^m \cdot F_{mp} \qquad (i, k, l, m, p = 1, 2, 3, 0), \tag{4}$$

где $U^i = (dx^i)/(ds)$ — четырехмерная скорость материальной точки; $\mathcal{G}_{ik}$ — ковариантный, а $\mathcal{G}^{ik}$ — контравариантный метрические тензоры четырехмерного пространства-времени; $\mathcal{G} = \det(\mathcal{G}_{ik})$; $\bar{\varkappa} = c^2\mu_\alpha\varepsilon_\alpha - 1$; $c = (\mu_o \cdot \varepsilon_o)^{-1/2}$ — скорость света; $\varepsilon_\alpha, \mu_\alpha, \sigma$ — электрофизические характеристики среды, о которых будем предпологать, что они не зависят от выбранной системы отсчета K или K' и могут быть измерены наблюдателем, покоящимся относительно среды.

Заметим,что из (4) следует разложение четырехмерного тока на четырехмерный ток проводимости $\hat{j}^i_c$ и конвекционный четырехмерный ток $\hat{j}^i_v$, которые вычисляются по формулам [4]

$$\hat{j}^i_c = \sigma \cdot \sqrt{\mathcal{G}} \cdot \mathcal{G}^{ip} \cdot U^m \cdot F_{mp}, \qquad \hat{j}^i_v = \hat{j}^i - \hat{j}^i_c. \tag{5}$$

Отметим также, что соотношение (4) определяет только три компоненты четырехмерного тока $\hat{j}^i$. Четвертая компонента находится из уравнения непрерывности электрического тока

$$\frac{\partial \hat{j}^i}{\partial x^i} = 0. \tag{6}$$

С системами координат x, y, z и x', y', z' свяжем обычным образом системы сферических координат r, θ, φ и r', θ', φ'. Тогда в системе отсчета $K(r, \theta, \varphi, t)$ с криволинейными координатами $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$ и $x^0 = t$ метрический тензор имеет следующие компоненты:

$$\mathcal{G}_{11} = 1, \qquad \mathcal{G}_{22} = r^2 \qquad \mathcal{G}_{33} = (r \cdot \sin\theta)^2, \qquad \mathcal{G}_{00} = -c^2,$$

$$\mathcal{G}^{11} = 1, \qquad \mathcal{G}^{22} = r^{-2}, \qquad \mathcal{G}^{33} = (r \cdot \sin\theta)^{-2}, \qquad \mathcal{G}^{00} = -c^{-2},$$

$$\mathcal{G}_{ik} = \mathcal{G}^{ik} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k. \tag{7}$$

При этом его определитель $\mathcal{G} = -(cr^2 \cdot \sin\theta)^2$.

Пусть система отсчета $K'(r', \theta', \varphi', t)$ с криволинейными координатами $x'^1 = r'$, $x'^2 = \theta'$, $x'^3 = \varphi'$ и $x'^0 = t$ вращается так, что связь последних с координатами инерциальной системы отсчета $K(r, \theta, \varphi, t)$ осуществляется по формулам

$$r' = r, \qquad \theta' = \theta, \qquad \varphi' = \varphi - \Omega t \tag{8}$$

В этом случае метрические тензоры $\mathcal{G}'_{ik}$ и $\mathcal{G}'^{ik}$ имеют следующие отличные от нуля компоненты:

$$\mathcal{G}'_{11} = 1, \qquad \mathcal{G}'_{22} = r'^2, \qquad \mathcal{G}'_{33} = (r' \cdot \sin\theta')^2, \qquad \mathcal{G}'_{00} = -c^2 \cdot (1 - \beta^2),$$

$$\mathcal{G}'_{03} = \mathcal{G}'_{30} = \Omega \cdot (r' \cdot \sin\theta')^2, \qquad \mathcal{G}'^{11} = 1, \qquad \mathcal{G}'^{22} = r'^{-2},$$

$$\mathcal{G}'^{33} = \frac{1 - \beta^2}{(r' \cdot \sin\theta')^2}, \qquad \mathcal{G}'^{00} = -c^{-2}, \qquad \mathcal{G}'^{03} = \mathcal{G}'^{30} = \Omega c^{-2}, \tag{9}$$

где $\beta = (\Omega r' \cdot \sin\theta')/c$ и его определитель $\mathcal{G} = -(cr'^2 \cdot \sin\theta')^2$.

В собственной системе координат компоненты четырехмерного вектора скорости имеют вид

$$U'^{i} = \frac{1}{\sqrt{-c^2(1-\beta^2)}}(0,0,0,1). \tag{10}$$

В системе отсчета $K(x^i)$ с пространственными сферическими координатами четырехмерная скорость вращающегося тела будет

$$U^{i} = \frac{1}{\sqrt{-c^2(1-\beta^2)}}(0,0,\Omega,1). \tag{11}$$

Сведение задачи к неоднородному уравнению для векторного потенциала

Для интегрирования уравнений электродинамики (1), как и в случае покоящихся сред, вводится четырехмерный вектор-потенциал A_n, компоненты которого образованы трехмерным вектором $\mathbf{A}$ (векторный потенциал поля) и скаляром φ (скалярный потенциал поля), так что $A_n = (-\mathbf{A}, \varphi)$. Связь его с магнитной индукцией и напряженностью электрического поля установим соотношением

$$F_{mp} = A_{p;m} - A_{m;p} = \frac{\partial A_p}{\partial x^m} - \frac{\partial A_m}{\partial x^p}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (3), а результат в первое уравнение из (1) и учитывая (4), получим уравнение для определения вектор-потенциала

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\sqrt{\mathcal{G}}\left[\mathcal{G}^{im}\mathcal{G}^{kp} + \bar{\varkappa}\left(\mathcal{G}^{im}U^kU^p + \mathcal{G}^{kp}U^iU^m\right)\right]\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^m} - \frac{\partial A_m}{\partial x^p}\right)\right\} +$$

$$+ic\mu_a\sigma\cdot\sqrt{\mathcal{G}}\mathcal{G}^{ip}U^m\cdot\left(\frac{\partial A_p}{\partial x^m} - \frac{\partial A_m}{\partial x^p}\right) = -ic\mu_a\hat{j}^{i,\text{ст}}. \tag{13}$$

Отметим, что уравнение (13) будет справедливо при любых скоростях движения, которые только возможно реализовать с помощью материальных объектов. Однако в реальных условиях движение различных объектов хоть и происходит с весьма большими скоростями, но по отношению к скорости света, эти скорости малы. Поэтому параметр β мал, что позволяет принять

$$1 - \beta^2 \approx 1. \tag{14}$$

Тогда компоненты четырехмерной скорости в системе отсчета $K(x^i)$ запишутся так:

$$U^{i} = \frac{1}{\sqrt{-c^2}}(0,0,\Omega,1). \tag{15}$$

При этом значительно упрощается решение рассматриваемой задачи, так как удается исключить компоненту $A_0 = \varphi$ — скалярный потенциал и свести задачу к решению дифференциальных уравнений только для векторного потенциала $\mathbf{A}$.

Полагая в (13) последовательно $i = 1, 2, 3, 0$, сворачивая (13) по индексам m, k, p и учитывая (4), получим систему четырех дифференциальных уравнений для тензорных компонент вектор-потенциала A_n

$$\frac{1}{r^2 \cdot \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_1}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} -$$

$$-\frac{\bar{\varkappa}}{c^2}\left(\Omega^2 \cdot \frac{\partial^2 A_1}{\partial\varphi^2} + 2\Omega \cdot \frac{\partial^2 A_1}{\partial\varphi\partial t} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2}\right) - \frac{1}{r^2 \cdot \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_2}{\partial r}\right) -$$

$$-\frac{1}{r^2 \cdot \sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_3}{\partial\varphi\partial r} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial t\partial r} + \frac{\bar{\varkappa}}{c^2}\left(\Omega^2 \cdot \frac{\partial^2 A_3}{\partial\varphi\partial r} + \Omega \cdot \frac{\partial^2 A_0}{\partial\varphi\partial r} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial t\partial r} +\right.$$

$$\left. +\Omega \cdot \frac{\partial^2 A_3}{\partial t\partial r}\right) - \mu_a\sigma\left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial r}\right) + \Omega\left(\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_3}{\partial r}\right)\right] = \frac{\mu_a}{r^2 \cdot \sin\theta}\hat{j}^{1,\text{ст}}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_2}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} -$$

$$-\frac{\bar{\varkappa}}{c^2}\left(\Omega^2 \cdot \frac{\partial^2 A_2}{\partial\varphi^2} + 2\Omega \cdot \frac{\partial^2 A_2}{\partial\varphi\partial t} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial^2 A_1}{\partial r\partial\theta} -$$

$$-\frac{1}{r^2 \cdot \sin^2\theta}\frac{\partial^2 A_3}{\partial\varphi\partial\theta} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial t\partial\theta} + \frac{\bar{\varkappa}}{c^2}\left(\Omega^2\frac{\partial^2 A_3}{\partial\varphi\partial\theta} + \Omega \cdot \frac{\partial^2 A_0}{\partial\varphi\partial\theta} + \frac{\partial^2 A_0}{\partial t\partial\theta} +\right.$$

$$\left. +\Omega \cdot \frac{\partial^2 A_3}{\partial t\partial\theta}\right) - \mu_a\sigma\left[\left(\frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial\theta}\right) + \Omega\left(\frac{\partial A_2}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_3}{\partial\theta}\right)\right] = \frac{\mu_a}{\sin\theta}\hat{j}^{2,\text{ст}}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2 \cdot \sin\theta\left[\frac{1 - \bar{\varkappa}\beta^2}{r^2 \cdot \sin^2\theta}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_3}{\partial r}\right) - \frac{\bar{\varkappa}\Omega}{c^2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial r}\right)\right]\right\} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{r^2 \cdot \sin\theta\left[\frac{1 - \bar{\varkappa}\beta^2}{r^2 \cdot \sin^2\theta}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_3}{\partial\theta}\right) - \frac{\bar{\varkappa}\Omega}{c^2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial\theta}\right)\right]\right\} -$$

$$-\frac{\mu_a\varepsilon_a}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_0}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_3}{\partial t}\right) + \frac{\mu_a\sigma}{\sin\theta}\left(\frac{\partial A_3}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial\varphi}\right) = -\mu_a \cdot \hat{j}^{3,\text{ст}}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2 \cdot \sin\theta\left[\mu_a\varepsilon_a \cdot \left(\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial r}\right) + \frac{\bar{\varkappa}\Omega}{c^2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_3}{\partial r}\right)\right]\right\} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{r^2 \cdot \sin\theta\left[\mu_a\varepsilon_a\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial\theta}\right) + \frac{\bar{\varkappa}\Omega}{c^2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_3}{\partial\theta}\right)\right]\right\} -$$

$$-\frac{\mu_a\varepsilon_a}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial A_0}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_3}{\partial t}\right) - \frac{\mu_a\sigma}{\sin\theta}\frac{\Omega r^2 \cdot \sin^2\theta}{c^2}\left(\frac{\partial A_3}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial\varphi}\right) = \mu_a \cdot \hat{j}^{0\ \text{ст}}. \quad (19)$$

Умножим уравнение (19) на $(\bar{\varkappa}\Omega)/(c^2\mu_a\varepsilon_a)$ и сложим с (18), учитывая при этом, что в силу (14)

$$1-\bar{\varkappa}\beta^2+\frac{\bar{\varkappa}^2\beta^2}{c^2\mu_a\varepsilon_a}\approx 1, \quad \text{и} \quad 1-\frac{\bar{\varkappa}\beta^2}{c^2\mu_a\varepsilon_a}\approx 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_3}{\partial r}\right)+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial A_2}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_3}{\partial\theta}\right)\right]-$$

$$-\mu_a\varepsilon_a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_0}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_3}{\partial t}\right)-\mu_a\sigma\cdot\left(\frac{\partial A_0}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_3}{\partial t}\right)-\frac{\bar{\varkappa}\Omega}{c^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial A_0}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_3}{\partial t}\right)=$$

$$=-\mu_a\left(\hat{j}^{3,\text{ст}}-\frac{\bar{\varkappa}\Omega}{c^2\mu_a\varepsilon_a}\hat{j}^{0,\text{ст}}\right)\cdot\sin\theta. \tag{20}$$

Для того чтобы исключить из уравнений (16), (17) и (20) временную компоненту A_0, воспользуемся условием Лоренца

$$\left(\left[\mathcal{G}^{kp}+\bar{\varkappa}U^kU^p\right)A_p\right]_k-ic\mu_a\sigma\cdot U^kA_k=0,$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{-\mathcal{G}}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\sqrt{-\mathcal{G}}\left(\mathcal{G}^{kp}+\bar{\varkappa}U^kU^p\right)A_p\right]-ic\mu_a\sigma\cdot U^kA_k=0. \tag{21}$$

Сворачивая (21) по индексам k и p, получим

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_1\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_2\right)+\frac{1-\bar{\varkappa}\beta^2}{r^2\cdot\sin^2\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\varphi}-$$

$$-\mu_a\varepsilon_a\frac{\partial A_0}{\partial t}-\frac{\bar{\varkappa}\Omega}{c^2}\left(\frac{\partial A_0}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_3}{\partial t}\right)-\mu_a\sigma\cdot\left(A_0+\Omega A_3\right)=0. \tag{22}$$

Дифференцируя (22) по r и складывая с (16), а также дифференцируя по θ,φ и складывая соответственно с (17) и (20), находим, что пространственные компоненты вектор-потенциала A_n должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial^2A_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)+\frac{1-\bar{\varkappa}\beta^2}{r^2\cdot\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_1}{\partial\varphi^2}-\mu_a\varepsilon_a\frac{\partial^2A_1}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{2\bar{\varkappa}\beta}{cr\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2A_1}{\partial\varphi\partial t}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_1}{\partial r}-\frac{2}{r^2}A_1-\frac{2}{r^3\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot A_2\right)-$$

$$-\frac{2}{r^3\cdot\sin^2\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\varphi}-\mu_a\sigma\cdot\left(\frac{\partial A_1}{\partial t}+\Omega\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}\right)=\frac{\mu_a}{r^2\cdot\sin\theta}\hat{j}^{1,\text{ст}},$$

$$\frac{\partial^2A_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2A_2}{\partial\theta^2}+\frac{1-\bar{\varkappa}\beta^2}{r^2\cdot\sin^2\theta}\frac{\partial^2A_2}{\partial\varphi^2}-\mu_a\varepsilon_a\frac{\partial^2A_2}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{2\bar{\varkappa}\beta}{cr\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2 A_2}{\partial\varphi\partial t}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_1}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial A_2}{\partial\theta}-\frac{A_2}{r^2\sin^2\theta}-$$

$$-\frac{2\cdot\operatorname{ctg}\theta}{r^2\cdot\sin^2\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\varphi}-\mu_a\sigma\cdot\left(\frac{\partial A_2}{\partial t}+\Omega\cdot\frac{\partial A_2}{\partial\varphi}\right)=\frac{\mu_a}{\sin\theta}\hat{j}^{2,\text{ст}},$$

$$\frac{\partial^2 A_3}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_3}{\partial\theta^2}+\frac{1-\bar{\varkappa}\beta^2}{r^2\cdot\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 A_3}{\partial\varphi^2}-\mu_a\varepsilon_a\frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{2\bar{\varkappa}\beta}{cr\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2 A_3}{\partial\varphi\partial t}-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial A_3}{\partial\theta}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}+\frac{2\cdot\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial A_2}{\partial\varphi}-$$

$$-\mu_a\sigma\cdot\left(\frac{\partial A_3}{\partial t}+\Omega\cdot\frac{\partial A_3}{\partial\varphi}\right)=\mu_a\left(\hat{j}^{3,\text{ст}}-\frac{\bar{\varkappa}\Omega}{c^2\mu_a\varepsilon_a}\hat{j}^{0,\text{ст}}\right)\cdot\sin\theta. \tag{23}$$

Для перехода от тензорных компонент A_i и $\hat{j}^{i,\text{ст}}$ к составляющим векторного потенциала A_r, A_θ, A_φ, плотности тока $j_r^{\text{ст}}$, $j_\theta^{\text{ст}}$, $j_\varphi^{\text{ст}}$ и плотности $\rho^{\text{ст}}$ электрического заряда необходимо воспользоваться отождествлениями $A_1=-A_r$, $A_2=-rA_\theta$, $A_3=-r\cdot\sin\theta A_\varphi$, $\hat{j}^{1,\text{ст}}=r^2\cdot\sin\theta\cdot j_r^{\text{ст}}$, $\hat{j}^{2,\text{ст}}=$ $=r\cdot\sin\theta\cdot j_\theta^{\text{ст}}$, $\hat{j}^{3,\text{ст}}=r\cdot j_\varphi^{\text{ст}}$, $\hat{j}^{0,\text{ст}}=r^2\cdot\sin\theta\cdot\rho^{\text{ст}}$. При этом из (23) получаем систему уравнений для составляющих векторного потенциала

$$\mathcal{L}A_r-\frac{2}{r^2}A_r-\frac{2}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot A_\theta)-\frac{2}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}=-\mu_a\cdot j_r^{\text{ст}},$$

$$\mathcal{L}A_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{A_\theta}{r^2\cdot\sin^2\theta}-\frac{2\cdot\operatorname{ctg}\theta}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}=-\mu_a\cdot j_\theta^{\text{ст}},$$

$$\mathcal{L}A_\varphi+\frac{2}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cdot\operatorname{ctg}\theta}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}-\frac{A_\varphi}{r^2\cdot\sin^2\theta}=-\mu_a\cdot\left(j_\varphi^{\text{ст}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{\varkappa}\Omega r\cdot\sin\theta}{c^2\mu_a\varepsilon_a}\rho^{\text{ст}}\right), \tag{24}$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен оператор

$$\mathcal{L}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1-\bar{\varkappa}\beta^2}{r^2\cdot\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-$$

$$-\frac{2\bar{\varkappa}\beta}{cr\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial t}-\mu_a\varepsilon_a\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\mu_a\sigma\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Omega\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{25}$$

Умножив первое, второе и третье уравнения системы (24) соответственно на $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ и объединив слагаемые, приходим к векторному неоднородному уравнению

$$\mathcal{L}\mathbf{A}=-\mu_a\cdot\mathbf{j}_\Omega^{\text{ст}}, \tag{26}$$

где

$$\mathbf{j}_\Omega^{\text{ст}}=\left(j_r^{\text{ст}},j_\theta^{\text{ст}},j_\varphi^{\text{ст}}-\frac{\bar{\varkappa}\Omega r\cdot\sin\theta}{c^2\mu_a\varepsilon_a}\rho^{\text{ст}}\right),$$

которое можно рассматривать как обобщение уравнения Гельмгольца на случай вращающейся среды.

Полученная система содержит слагаемые, зависящие от угловой скорости вращения и точки наблюдения поля. Поэтому решение (24) может существенно отличаться от случая евклидова пространства. Для интегрирования (24) необходимо применить [1] аппарат векторных собственных функций и разделить электромагнитное поле на волны электрического и магнитного типов.

Поля электрического и магнитного типов во вращающейся среде

В работе [2] электромагнитное поле во вращающейся среде представлено в виде суперпозиции полей электрического (э) и магнитного (м) типов. Эти разложения для физических компонент поля имеют вид

$$E_r^{э} = \frac{1-\bar{\varkappa}\beta^2}{\varepsilon'}\left(D_r^{э} + \frac{1}{i\omega}j_r^{э}\right) + \frac{\bar{\varkappa}'\beta}{\varepsilon' c}H_\theta^{э}, \qquad E_\theta^{э} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV^{э})}{\partial r\partial\theta},$$

$$E_\varphi^{э} = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2(rV^{э})}{\partial r\partial\varphi}, \qquad H_r^{э} = -\frac{\bar{\varkappa}\beta}{\mu_a c}E_\theta^{э}, \qquad B_r^{э} = 0,$$

$$H_\theta^{э} = \frac{i\omega\varepsilon'}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial(rV^{э})}{\partial\varphi} - \frac{\bar{\varkappa}\beta}{\mu_a c r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(rV^{э})}{\partial\theta}\right),$$

$$H_\varphi^{э} = -\frac{i\omega\varepsilon'}{r}\frac{\partial(rV^{э})}{\partial\theta} - \frac{\bar{\varkappa}\beta}{\mu_a c r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2(rV^{э})}{\partial\theta\partial\varphi},$$

$$E_r^{м} = \frac{\bar{\varkappa}'\beta}{\varepsilon' c}H_\theta^{м}, \qquad D_r^{м} + \frac{1}{i\omega}j_r^{м} = 0,$$

$$E_\theta^{м} = -\frac{i\omega\mu_a}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial(rV^{м})}{\partial\varphi} + \frac{\bar{\varkappa}'\beta}{\varepsilon' c r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(rV^{м})}{\partial\theta}\right), \tag{27}$$

$$E_\varphi^{м} = \frac{i\omega\mu_a}{r}\frac{\partial(rV^{м})}{\partial\theta} + \frac{\bar{\varkappa}'\beta}{\varepsilon' c r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2(rV^{м})}{\partial\theta\partial\varphi},$$

$$H_r^{м} = \frac{1-\bar{\varkappa}\beta^2}{\mu_a}B_r^{м} - \frac{\bar{\varkappa}\beta}{\mu_a c}E_\theta^{м},$$

$$H_\theta^{м} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV^{м})}{\partial r\partial\theta}, \qquad H_\varphi^{м} = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2(rV^{м})}{\partial r\partial\varphi}, \tag{28}$$

где

$$\varepsilon' = \varepsilon_a\cdot\left(1 + \frac{\sigma}{i\omega\varepsilon_a}\right) \qquad \bar{\varkappa}' = c^2\mu_a\varepsilon' - 1,$$

$$D_r^{э} + \frac{1}{i\omega}j_r^{э} = -\varepsilon'\left[\frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(rV^{э})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\theta}\frac{\partial^2(rV^{э})}{\partial\varphi^2}\right], \tag{29}$$

$$B_r^{м} = -\mu_a\left[\frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(rV^{м})}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\theta}\frac{\partial^2(rV^{м})}{\partial\varphi^2}\right], \tag{30}$$

а скалярные функции $V^э$, $V^м$ удовлетворяют уравнению $\mathcal{L}V^{э,м} = 0$ и являются потенциалами Дебая для вращающейся среды.

Разложения (27), (28) построены в [2] формально, так как не указана связь функций $V^э$, $V^м$ со сторонними источниками поля. Эту связь будем искать, решая (24) с помощью векторных собственных функций.

Векторные собственные функции сферической системы координат

Для построения векторных собственных функций в качестве характеристической функции используем пространственную гармонику

$$V_{nm} = e^{i\omega t}\psi_n(\varkappa r)P_n^m(\cos\theta)e^{-im\varphi}, \tag{31}$$

где $\psi_n(\varkappa r)$ — сферическая функция Бесселя, а $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра.

Тогда векторными собственными функциями сферической системы координат будут [5]

$$\mathbf{l}_{nm}^1 = \mathbf{i}_r\frac{\partial V_{nm}}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial V_{nm}}{\partial\theta} + \mathbf{i}_\varphi\frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial V_{nm}}{\partial\varphi},$$

$$\mathbf{l}_{nm}^2 = \mathbf{i}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_{nm}}{\partial\varphi} - \mathbf{i}_\varphi\frac{\partial V_{nm}}{\partial\theta},$$

$$\mathbf{l}_{nm}^3 = \mathbf{i}_r\frac{n(n+1)}{\varkappa r}V_{nm} + \mathbf{i}_\theta\frac{1}{\varkappa r}\frac{\partial^2(rV_{nm})}{\partial r\partial\theta} + \mathbf{i}_\varphi\frac{1}{\varkappa r\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2(rV_{nm})}{\partial r\partial\varphi}. \tag{32}$$

Введем сопряженную характеристическую функцию

$$V_{nm}^* = e^{i\omega t}\psi_n(\varkappa r)P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{33}$$

для которой по аналогии с (32) можно построить сопряженные векторные функции $\mathbf{l}_{nm}^{*q}(q = 1, 2, 3)$.

Образуя скалярные произведения $(\mathbf{l}_{nm}^q \cdot \mathbf{l}_{\nu\mu}^{*p})$ и выполняя интегрирование по всему пространству, получим условие ортогональности

$$\int\limits_{r=0}^{\infty}\int\limits_{\theta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\mathbf{l}_{nm}^q\cdot\mathbf{l}_{\nu\mu}^{*p}\right)\cdot r^2\cdot\sin\theta\cdot dr d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi^2}{\tilde{C}_{nm}}\cdot\delta_m^\mu\cdot\delta_n^\nu\cdot\delta(\varkappa-\varkappa')\cdot\begin{cases}1, & p=q=1,\\ \frac{n(n+1)}{\varkappa^2}, & p=q=2,3,\\ 0, & p\neq q,\end{cases} \tag{34}$$

где

$$\tilde{C}_{nm} = (2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!},$$

δ_m^μ — символ Кронекера, $\delta(x-x')$ — дельта-функция.

Интегрирование неоднородного уравнения для векторного потенциала

Представим векторный потенциал **A** в виде разложения по системе векторных собственных функций (32)

$$\mathbf{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \int_{\varkappa=0}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{3} \alpha_{nm}^{q} \cdot \mathbf{l}_{nm}^{q} \right) \cdot \varkappa^2 d\varkappa. \tag{35}$$

Для нахождения спектральных плотностей α_{nm}^{q} подставим (35) в (26) и объединим слагаемые при α_{nm}^{q}

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \int_{\varkappa=0}^{\infty} \left\{ \sum_{q=1}^{3} \alpha_{nm}^{q} \cdot \left[\mathbf{i}_r \left(\mathcal{L} l_{nmr}^{q} - \frac{2}{r^2} \mathbf{l}_{nmr}^{q} - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{2}{r^2 \cdot \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \cdot l_{nm\theta}^{q}) - \frac{2}{r^2 \cdot \sin\theta} \frac{\partial l_{nm\varphi}^{q}}{\partial\varphi} \right) +$$

$$+ \mathbf{i}_\theta \left(\mathcal{L} l_{nm\theta}^{q} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial l_{nmr}^{q}}{\partial\theta} - \frac{l_{nm\theta}^{q}}{r^2 \cdot \sin^2\theta} - \frac{2 \cdot \operatorname{ctg}\theta}{r^2 \cdot \sin\theta} \frac{\partial l_{nm\varphi}^{q}}{\partial\varphi} \right) +$$

$$+ \mathbf{i}_\varphi \left(\mathcal{L} l_{nm\varphi}^{q} + \frac{2}{r^2 \cdot \sin\theta} \frac{\partial l_{nmr}^{q}}{\partial\varphi} + \frac{2 \cdot \operatorname{ctg}\theta}{r^2 \cdot \sin\theta} \frac{\partial l_{nm\theta}^{q}}{\partial\varphi} - \right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{l_{nm\varphi}^{q}}{r^2 \cdot \sin^2\theta} \right) \right] \right\} \cdot \varkappa^2 d\varkappa = -\mu_a \cdot \mathbf{j}_{\Omega}^{\text{ст}}.$$

Подставляя в это уравнение значения компонент векторов $\mathbf{l}_{nm}^{q}$, выполняя операции дифференцирования и объединяя подобные члены, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \int_{\varkappa=0}^{\infty} (k_m^2 - \varkappa^2) \left(\sum_{q=1}^{3} \alpha_{nm}^{q} \cdot \mathbf{l}_{nm}^{q} \right) \cdot \varkappa^2 d\varkappa = -\mu_a \cdot \mathbf{l}_{\Omega}^{\text{ст}},$$

где

$$k_m = \sqrt{k_0^2 - \frac{\bar{\varkappa}\omega\Omega m}{c^2} - \frac{\bar{\varkappa}'\omega\Omega m}{c^2} + \frac{\bar{\varkappa}(\Omega m)^2}{c^2}}, \tag{36}$$

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon', \qquad \bar{\varkappa}' = c^2 \mu_a \varepsilon' - 1, \qquad \varepsilon' = \varepsilon_a \cdot (1 + \sigma / i\omega\varepsilon_a).$$

Умножим это равенство на $\mathbf{l}_{\nu\mu}^{*p}$ и проинтегрируем результат по объему шара. Используя условия ортогональности (34) векторных собственных функций, получим

$$\alpha_{nm}^{1} = -\frac{\mu_a}{2\pi^2} \tilde{C}_{nm} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{j}_{\Omega}^{\text{ст}} \cdot \mathbf{l}_{nm}^{*1})'}{\varkappa^2 (k_m^2 - \varkappa^2)} r'^2 \cdot \sin\theta' dr' d\theta' d\varphi',$$

$$\alpha_{nm}^2 = -\frac{\mu_a}{2\pi^2}\frac{\tilde{C}_{nm}}{n(n+1)}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\left(\mathbf{j}_\Omega^{\text{ст}}\cdot\mathbf{l}_{nm}^{*2}\right)'}{k_m^2-\varkappa^2}r'^2\cdot\sin\theta' dr' d\theta' d\varphi',$$

$$\alpha_{nm}^3 = -\frac{\mu_a}{2\pi^2}\frac{\tilde{C}_{nm}}{n(n+1)}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\left(\mathbf{j}_\Omega^{\text{ст}}\cdot\mathbf{l}_{nm}^{*3}\right)'}{k_m^2-\varkappa^2}r'^2\cdot\sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'.$$

Штрих к круглым скобкам означает, что функции, стоящие в них, зависят от переменных r', θ', φ'.

Если подставить коэффициенты α_{nm}^q в (35) и учесть, что сторонние ток и заряд являются финитными функциями, то получим

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_a}{2\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\tilde{C}_{nm}\int_{V'}dv'\int_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\varkappa^2 d\varkappa}{k_m^2-\varkappa^2}\left[\varkappa^{-2}\left(\mathbf{j}_\Omega^{\text{ст}}\cdot\mathbf{l}_{nm}^{*1}\right)'\cdot\mathbf{l}_{nm}^1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n(n+1)}\left(\mathbf{j}_\Omega^{\text{ст}}\cdot\mathbf{l}_{nm}^{*2}\right)'\cdot\mathbf{l}_{nm}^2+\frac{1}{n(n+1)}\left(\mathbf{j}_\Omega^{\text{ст}}\cdot\mathbf{l}_{nm}^{*3}\right)'\cdot\mathbf{l}_{nm}^3\right], \tag{37}$$

где $dv' = r'^2\cdot\sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'$ — элемент объема, а интегрирование ведется по объему v', занятому сторонними током и зарядом.

Скалярный потенциал поля $A_0 = \varphi$ может быть найден из условия Лоренца (22) с помощью (37) в виде

$$A_0 = -\frac{\mu_a}{2\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\tilde{C}_{nm}\int_{V'}dv'\int_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\varkappa^2 d\varkappa}{k_m^2-\varkappa^2}\frac{i\omega}{k_0^2-\frac{\bar{\varkappa}\omega\Omega m}{c^2}}\times$$

$$\times\left[-\varkappa^{-2}\left(\mathbf{j}_\Omega^{\text{ст}}\cdot\mathbf{l}_{nm}^{*1}\right)'\cdot\left(k_0^2-\frac{\bar{\varkappa}\omega\Omega m}{c^2}\right)\cdot V_{nm}+\right.$$

$$+\frac{1}{n(n+1)}\left(\mathbf{j}_\Omega^{\text{ст}}\cdot\mathbf{l}_{nm}^{*2}\right)'\cdot\left(\frac{-i\bar{\varkappa}\Omega^2 m}{c^2}+\frac{i\bar{\varkappa}'\omega\Omega}{c^2}\right)\cdot r\cdot\sin\theta\frac{\partial V_{nm}}{\partial\theta}+$$

$$\left.+\frac{1}{n(n+1)}\left(\mathbf{j}_\Omega^{\text{ст}}\cdot\mathbf{l}_{nm}^{*3}\right)'\cdot\left(\frac{\bar{\varkappa}(\Omega m)^2}{c^2}-\frac{\bar{\varkappa}'\omega\Omega m}{c^2}\right)\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial(rV_{nm})}{\partial r}\right]. \tag{38}$$

Электромагнитное поле во вращающейся среде

Вернемся теперь от вектор-потенциала A_n к векторам электромагнитного поля. В первую очередь нас интересуют продольные составляющие индукций B_r и

$$D_r + \frac{1}{i\omega}j_r,$$

которые как и в случае неподвижных сред определяют волны магнитного (м) и электрического (э) типов [6]. Их можно найти из (2), используя (3) и (2)

$$B_r = \frac{1}{r^2 \cdot \sin\theta} B_{23} = -\frac{1}{r^2 \cdot \sin\theta} F_{23} = -\frac{1}{r^2 \cdot \sin\theta} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right),$$

$$D_r + \frac{1}{i\omega} j_r = \varepsilon E_r - \frac{\bar{\varkappa}\beta}{c\mu_a} B_\theta + \frac{\bar{\varkappa}\beta^2}{c^2\mu_a} E_r + \frac{\sigma}{i\omega}(E_r - \beta c \cdot B_\theta) =$$

$$= \varepsilon' \left(E_r - \frac{\bar{\varkappa}'\beta}{c\mu_a\varepsilon'} B_\theta \right) = \varepsilon' \left(F_{01} + \frac{\bar{\varkappa}'\beta}{c\mu_a\varepsilon'} \frac{1}{r \cdot \sin\theta} F_{31} \right) =$$

$$= \varepsilon' \left[\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} + \frac{\bar{\varkappa}'\Omega}{c^2\mu_a\varepsilon'} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \right) \right]. \tag{39}$$

Подставляя сюда векторный (37) и скалярный (38) потенциалы и вычисляя с помощью теории вычетов интеграл по переменной $\varkappa$, окончательно получим

$$B_r = e^{i\omega t} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} n(n+1) U_{nm}^{\text{м}}, \tag{40}$$

$$D_r + \frac{1}{i\omega} j_r = e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} n(n+1) U_{nm}^{\text{э}}, \tag{41}$$

$$U_{nm}^{\text{э(м)}} = P_n^m(\cos\theta) e^{-im\varphi} \begin{cases} \xi_n(k_m r) \cdot F_{nm}^{2\text{э(м)}}, & r > r', \\ \psi_n(k_m r) \cdot F_{nm}^{1\text{э(м)}}, & r < r', \end{cases} \tag{42}$$

$$F_{nm}^{s(\text{м})} = -\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{i\mu_a k_m}{4\pi} \int\limits_{V'} \left[j_\theta^{\text{ст}} \frac{im}{\sin\theta'} R_n^s(k_m r') P_n^m(\cos\theta') - \right.$$

$$\left. - \left(j_\varphi^{\text{ст}} \frac{\bar{\varkappa}\Omega r' \cdot \sin\theta'}{c^2\mu_a\varepsilon_a} \rho^{\text{ст}} \right) R_n^s(k_m r') \frac{\partial P_n^m(\cos\theta')}{\partial\theta'} \right] e^{im\varphi'} r'^2 \cdot \sin\theta' d\theta' dr' d\varphi', \tag{43}$$

$$F_{nm}^{s(\text{э})} = -\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{n(n+m)!} \frac{k_0^2 - \frac{\bar{\varkappa}'\omega\Omega m}{c^2}}{4\pi\omega \cdot k_m} \int\limits_{V'} \left[j_r^{\text{ст}} \frac{n(n+1)}{r'} R_n^s(k_m r') P_n^m(\cos\theta') + \right.$$

$$+ j_\theta^{\text{ст}} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' R_n^s(k_m r') \right) \frac{\partial P_n^m(\cos\theta')}{\partial\theta'} + \left(j_\varphi^{\text{ст}} - \frac{\bar{\varkappa}\Omega r' \cdot \sin\theta'}{c^2\mu_a\varepsilon_a} \rho^{\text{ст}} \right) \times$$

$$\left. \times \frac{im}{\sin\theta'} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' R_n^s(k_m r') \right) P_n^m(\cos\theta') \right] e^{im\varphi'} r'^2 \cdot \sin\theta' d\theta' dr' d\varphi', \tag{44}$$

где при $s = 1$ $R_n^1(x) = \xi_n^{(2)}(x) = (\pi/2x)^{1/2} \cdot H_{n+0.5}^{(2)}(x)$, а при $s = 2$ $R_n^2(x) = \psi_n(x) = (\pi/2x)^{1/2} \cdot J_{n+0.5}(x)$; $J_{n+0.5}(x)$, $H_{n+0.5}^{(2)}(x)$ — функции Бесселя и Ганкеля второго рода.

Сравнивая (40), (41) с (29), (30), находим выражения для потенциалов Дебая

$$V^{\text{э}} = e^{i\omega t}\frac{1}{\varepsilon'}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} U_{nm}^{\text{э}}, \qquad V^{\text{м}} = e^{i\omega t}\frac{1}{\mu_a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} U_{nm}^{\text{м}}. \tag{45}$$

Таким образом, формулы (27), (28) совместно с (45) и (40)–(44) дают решение поставленной задачи.

Поле электрического диполя, расположенного на оси вращения среды

В качестве примера использования полученных результатов найдем поле электрического диполя во вращающейся среде. Поместим диполь на полярной оси на расстоянии b от начала сферической системы координат и ориентируем его вдоль оси $\mathbf{z}$. Объемное распределение тока диполя представим в виде

$$j_r^{\text{ст}} = \frac{I\cdot l}{r^2\cdot\sin\theta}\delta(r-b)\cdot\delta(\theta-0)\cdot\delta(\varphi-0), \tag{46}$$

где $I\cdot l$ — момент тока диполя.

Так как электромагнитное поле в соответствии с (43), (44) зависит от плотности электрического заряда $\rho^{\text{ст}}$, то найдем плотность из уравнения непрерывности тока

$$\rho^{\text{ст}} = -\frac{1}{i\omega}\operatorname{div}\mathbf{j}^{\text{ст}} = -\frac{1}{i\omega}\frac{I\cdot l}{\sin\theta}\delta(\theta-0)\cdot\delta(\varphi-0)\frac{\partial\delta(r-b)}{\partial r}. \tag{47}$$

Подставляя (46), (47) в (43), (44) найдем коэффициенты разложения поля $F_{nm}^{s(\text{м})}$ и $F_{nm}^{s(\text{э})}$

$$F_{nm}^{s(\text{м})} = 0,$$

$$F_{nm}^{s(\text{э})} = -\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{I\cdot l}{b}\frac{k_0^2-\frac{\bar{\varkappa}'\omega\Omega m}{c^2}}{4\pi\omega\cdot k_m}n(n+1)\cdot P_n^m(1)\cdot R_n^s(k_m b). \tag{48}$$

Из (48) следует, что поле магнитных волн равно нулю ($F_{nm}^{s(\text{м})}=0$), а для поля электрических волн, поскольку функция $P_n^m(1)$ равна единице при $m=0$ и нулю при $m\neq 0$, получаем

$$F_{nm}^{s(\text{э})} = -(2n+1)\frac{I\cdot l}{b}\frac{k_0}{4\pi\omega}\cdot R_n^s(k_0 b) \quad \text{при} \quad m=0,$$

$$F_{nm}^{s(\text{э})} = 0 \quad \text{при} \quad m=\pm1,\pm2,\pm3,\dots. \tag{49}$$

Т.е. существуют отличные от нуля коэффициенты разложения поля только при $m=0$, причем эти коэффициенты не зависят от угловой скорости вращения Ω, так как при $m=0$ постоянная распространения поля $k_m=k_0$ и тоже не зависит от Ω (см. формулу (36)). Однако из (27) следует, что составляющие напряженности магнитного поля $H_r^{\text{э}}$ и $H_\theta^{\text{э}}$ все же остаются пропорциональными угловой скорости вращения Ω, хотя остальные составляющие как электрического, так и магнитного полей либо равны нулю в силу того, что производная $\partial/(\partial\varphi)\equiv 0$, либо полностью не зависят от Ω /bf(для составляющей $E_r^{э}$ надо учесть (14) и (29))

$$E_r^{э}=-\frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(rV^{э})}{\partial\theta}\right),\qquad E_\theta^{э}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV^{э})}{\partial r\partial\theta},$$

$$E_\varphi^{э}=0,\qquad H_r^{э}=-\frac{\bar{\varkappa}\beta}{\mu_a c}\cdot E_\theta^{э},\qquad B_r^{э}=0,$$

$$H_\theta^{э}=-\frac{\bar{\varkappa}\beta}{\mu_a c r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(rV^{э})}{\partial\theta}\right),\qquad H_\varphi^{э}=-\frac{i\omega\varepsilon'}{r}\frac{\partial(rV^{э})}{\partial\theta},$$

где

$$V^{э}=e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\begin{cases}\xi_n^{(2)}(k_0r)\cdot F_{nm}^{2(э)}, & r>r',\\ \psi_n(k_0r)\cdot F_{nm}^{1(э)}, & r<r',\end{cases}$$

а коэффициенты $F_{nm}^{s(э)}$ $(s=1,2)$ находятся из (49).

И только в случае свободного пространства, характеризующегося тем, что параметр $\bar{\varkappa}=0$, поле диполя не зависит от вращения среды и совпадает с полем излучения в неподвижной среде [6].

Случай вращающейся системы отсчета

Если источник поля вращается, то задачу удобнее решать в системе отсчета $K'(x',\ y',\ z',\ t)$. Опуская выкладки, аналогичные приведенным выше, а также для упрощения записи опуская штрихи у координат системы K', дадим конечные формулы решения задачи в этой системе отсчета

$$B_r=e^{i\omega t}\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}n(n+1)U_{nm}^{м},\tag{50}$$

$$D_r+\frac{1}{i\omega}j_r=e^{i\omega t}\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}n(n+1)U_{nm}^{э},\tag{51}$$

$$U_{nm}^{э(м)}=P_n^m(\cos\theta)e^{-im\varphi}\begin{cases}\xi_n(k_mr)\cdot F_{nm}^{2э(м)}, & r>r',\\ \psi_n(k_mr)\cdot F_{nm}^{1э(м)}, & r<r',\end{cases}\tag{52}$$

$$F_{nm}^{s(м)}=-\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{i\mu_a k_m}{4\pi}\int\limits_{V'}\left[j_\theta^{ст}\frac{im}{\sin\theta'}R_n^s(k_mr')P_n^m(\cos\theta')-\right.$$

$$\left.-\left(j_\varphi^{ст}+\frac{\Omega r'\cdot\sin\theta'}{c^2\mu_a\varepsilon_a}\rho^{ст}\right)R_n^s(k_mr')\frac{\partial P_n^m(\cos\theta')}{\partial\theta'}\right]e^{im\varphi'}r'^2\cdot\sin\theta'd\theta'dr'd\varphi',\tag{53}$$

$$F_{nm}^{s(э)}=-\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{k_0^2+\frac{\omega\Omega m}{c^2}}{4\pi\omega\cdot k_m}\int\limits_{V'}\left[j_r^{ст}\frac{n(n+1)}{r'}R_n^s(k_mr')P_n^m(\cos\theta')+\right.$$

$$+j_\theta^{\text{ст}}\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'R_n^s(k_m r')\right)\frac{\partial P_n^m(\cos\theta')}{\partial\theta'}+\left(j_\varphi^{\text{ст}}+\frac{\Omega r'\cdot\sin\theta'}{c^2\mu_a\varepsilon_a}\rho^{\text{ст}}\right)\times$$

$$\left.\times\frac{im}{\sin\theta'}\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'R_n^s(k_m r')\right)P_n^m(\cos\theta')\right]e^{im\varphi'}r'^2\cdot\sin\theta' d\theta' dr' d\varphi', \qquad (54)$$

где при $s=1$ $\quad R_n^1(x)=\xi_n^{(2)}(x)$, а при $s=2$ $\quad R_n^2(x)=\psi_n(x)$;

$$k_m=\sqrt{k_0^2+\frac{2\omega\Omega m}{c^2}+\frac{(\Omega m)^2}{c^2}}, \qquad K_0^2=\omega^2\mu_a\varepsilon'. \qquad (55)$$

Остальные составляющие поля находятся по формулам [2]

$$E_r^{\text{э}}=\frac{1}{\varepsilon'}\left(D_r^{\text{э}}+\frac{1}{i\omega}j_r^{\text{э}}\right)-\frac{\beta}{\varepsilon' c}H_\theta^{\text{э}}, \qquad E_\theta^{\text{э}}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV^{\text{э}})}{\partial r\partial\theta},$$

$$E_\varphi^{\text{э}}=\frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2(rV^{\text{э}})}{\partial r\partial\varphi}, \qquad H_r^{\text{э}}=\frac{\beta}{\mu_a c}E_\theta^{\text{э}}, \qquad B_r^{\text{э}}=0,$$

$$H_\theta^{\text{э}}=\frac{i\omega\varepsilon'}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial(rV^{\text{э}})}{\partial\varphi}+\frac{\beta}{\mu_a c r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(rV^{\text{э}})}{\partial\theta}\right),$$

$$H_\varphi^{\text{э}}=-\frac{i\omega\varepsilon'}{r}\frac{\partial(rV^{\text{э}})}{\partial\theta}+\frac{\beta}{\mu_a c r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2(rV^{\text{э}})}{\partial\theta\partial\varphi},$$

$$E_r^{\text{м}}=-\frac{\beta}{\varepsilon' c}H_\theta^{\text{м}}, \qquad D_r^{\text{м}}+\frac{1}{i\omega}j_r^{\text{м}}=0,$$

$$E_\theta^{\text{м}}=-\frac{i\omega\mu_a}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial(rV^{\text{м}})}{\partial\varphi}-\frac{\beta}{\varepsilon' c r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(rV^{\text{м}})}{\partial\theta}\right), \qquad (56)$$

$$E_\varphi^{\text{м}}=\frac{i\omega\mu_a}{r}\frac{\partial(rV^{\text{м}})}{\partial\theta}-\frac{\beta}{\varepsilon' c r^2\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2(rV^{\text{м}})}{\partial\theta\partial\varphi},$$

$$H_r^{\text{м}}=\frac{1}{\mu_a}B_r+\frac{\beta}{\mu_a c}E_\theta^{\text{м}},$$

$$H_\theta^{\text{м}}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV^{\text{м}})}{\partial r\partial\theta}, \qquad H_\varphi^{\text{м}}=\frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2(rV^{\text{м}})}{\partial r\partial\varphi}, \qquad (57)$$

где

$$V^{\text{э}}=e^{i\omega t}\frac{1}{\varepsilon'}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}U_{nm}^{\text{э}}, \qquad V^{\text{м}}=e^{i\omega t}\frac{1}{\mu_a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}U_{nm}^{\text{м}}.$$

Полученные результаты позволяют решать различные задачи возбуждения электромагнитных волн вращающимися и неподвижными источниками, а также находить поля в присутствии движущихся границ раздела сред. Например, из (56), (57) следует, что собственные частоты вращающегося сферического резонатора, имеющего радиус R, для волн электрического типа можно найти из условия

$$\frac{d}{dr}\left(r \cdot \psi_n(k_m r)\right)\big|_{r=R} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \tag{58}$$

а для волн магнитного типа

$$\psi_n(k_m R) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n. \tag{59}$$

Из (58), (59) вытекает, что для вращающегося резонатора дополнительно резонансные частоты зависят от частоты вращения резонатора Ω и индекса m пространственной гармоники. Следовательно, собственные частоты вращающегося резонатора не являются вырожденными, как это имеет место для неподвижной сферы [7]. Выбор оси $\mathbf{z}$ $(\theta = 0)$ для сферы также не является произвольным, при ином выборе получаются новые колебания с иными собственными частотами.

Пусть q-й положительный корень уравнения (58) дает собственные частоты колебаний E_{mnq}, а q-й положительный корень уравнения (59) — частоты колебаний H_{mnq} в сферическом резонаторе. Тогда наименьшие собственные частоты имеют колебания E_{m11} и H_{m11}, которые являются основными. Частоты колебаний E_{011} и h_{011} не зависят от частоты Ω вращения сферы. Однако колебания E_{+111}, E_{-111}, и H_{+111}, H_{-111} уже имеют иные собственные частоты, которые зависят от величины Ω. Причем индексу $m = +1$ соответствует уменьшение, а индексу $m = -1$ — увеличение собственной частоты основных типов колебаний, что совпадает с результатами работы [8], в которой использовалась "мгновенная сопутствующая система координат", рассматриваемая как инерциальная система отсчета.

Список литературы

[1] *Петров Б.М.* // Антенны / Под ред. А.А. Пистолькорса. М.: Связь, 1976. Вып. 24. С. 81–94.
[2] *Абламунец И.Г.* // Изв. вузов. Электромеханика. 1988. № 3. С. 10–17.
[3] *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974. 520 с.
[4] *Новаку В.* Введение в электродинамику. М.: Ил, 1963. 303 с.
[5] *Стреттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 539 с.
[6] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
[7] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
[8] *Heer C.V.* // Phys. Rev. 1964. 134. N 4. P. A799–A804.

Самарский
инженерно-строительный
институт

Поступило в Редакцию
1 августа 1991 г.
В окончательной редакции
13 февраля 1992 г.