

01
©1992

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В СЛУЧАЕ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Л.Г.Гликман, В.В.Радченко, И.Ф.Спивак-Лавров, А.К.Шектыбаев

Показано, что если многосвязная область с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии такова, что при задании дополнительных граничных условий на осях симметрии она разбивается на четыре одинаковые односвязные области, то решение исходной задачи в каждой из четвертей может быть представлено в виде суммы четырех различных решений для соответствующей односвязной области. В качестве примера решается задача электромагнитостатики, возникающая в электронной оптике.

Решение широкого класса задач Дирихле для двумерного уравнения Лапласа удается найти в достаточно простом аналитическом виде в тех случаях, когда рассматриваемая область является односвязной. Для многосвязных областей класс решаемых в аналитическом виде задач резко сужается. В данной работе развивается метод, предложенный в [1], для некоторых двумерных краевых задач в многосвязной области, имеющей оси симметрии.

Пусть многосвязная область, в которой ищется решение плоской задачи, симметрична относительно осей x и y декартовой системы координат. Предположим, что при задании дополнительных краевых условий на этих осях область распадается на четыре одинаковые односвязные области. Тогда решение $\varphi(x, y)$ исходной задачи Дирихле в каждой из четвертей равно сумме решений четырех краевых задач для соответствующей односвязной области

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^4 \varphi_k(x, y), \quad (1)$$

где

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x, y) + \varphi(-x, y) + \varphi(x, -y) + \varphi(-x, -y)], \quad (2)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x, y) + \varphi(-x, y) - \varphi(x, -y) - \varphi(-x, -y)], \quad (3)$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x, y) - \varphi(-x, y) + \varphi(x, -y) - \varphi(-x, -y)], \quad (4)$$

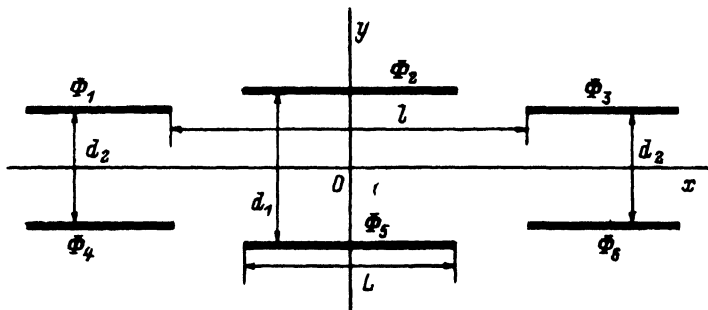


Рис. Схема рассматриваемой электронно-оптической системы.

$$\varphi_4(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x, y) - \varphi(-x, y) - \varphi(x, -y) + \varphi(-x, -y)]. \quad (5)$$

Функции (2)–(5) удовлетворяют простым краевым условиям на осях координат

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x, 0) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \varphi_2(x, 0) = 0; \quad (7)$$

$$\varphi_3(0, y) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(x, 0) = 0; \quad (8)$$

$$\varphi_4(0, y) = 0 \quad \varphi_4(x, 0) = 0. \quad (9)$$

На части границы исходной многосвязной области, расположенной в рассматриваемой четверти, новые краевые условия определяются соотношениями (2)–(5). Нахождение функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ сводится к решению задачи Келдыша–Седова [2], а функция находится путем решения соответствующей задачи Дирихле.

Рассмотрим в качестве примера задачу электростатики для многосвязной области, возникающую при расчете поля иммерсионной трехэлектродной цилиндрической линзы и электростатической отклоняющей иммерсионной системы. На рисунке рассматриваемая система электродов схематически представлена в проекции на плоскость xz декартовой системы координат x, y, z . Электроды представляют собой пластины, расположенные параллельно плоскости xz и симметрично относительно плоскостей xz и yz . При проведении расчетов толщина всех пластин считается бесконечно малой, их протяженность в направлении, параллельном оси z , а также протяженность пластин крайних электродов в направлении, параллельном оси x , бесконечной. Расстояние между средними пластинами обозначено через d_1 , между крайними – через d_2 , ширина средних пластин – через L , расстояние между краями пластин, расположенных симметрично относительно оси y , – через l , а постоянные значения потенциалов на пластинах – через $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_6$.

При нахождении распределения потенциала $\varphi(x, y)$ в исследуемой системе воспользуемся конформным преобразованием

$$\tau(w) = i\frac{d_1}{2} + C \int_0^w f(w)dw, \quad (10)$$

отображающим верхнюю полуплоскость плоскости $w = u + iv$ в семиугольник, расположенный в первой четверти ($x \geq 0, y \geq 0$) плоскости $\tau = x + iy$. Вершины этого семиугольника обозначены на рисунке цифрами 1, 2, ..., 7, причем вершины 5 и 7 находятся в бесконечно удаленных точках. В формуле (10)

$$f(w) = \frac{(w - a_2)(w - a_6)}{(w - a_5)\sqrt{w(w - a_3)(w - 1)}}. \quad (11)$$

Значения коэффициентов C, a_2, a_3, a_5, a_6 находятся из соответствия вершин семиугольника точкам $0, a_2, a_3, 1, a_5, a_6, \pm\infty$ действительной оси плоскости w .

После введения комплексных потенциалов

$$\Omega_k(w) = \psi_k(u, v) + i\varphi_k(u, v), \quad (K = 1, 2, 3) \quad (12)$$

нахождение функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ в плоскости w сводится к решению задачи Келдыша-Седова для производных этих потенциалов. Получим

$$\frac{d\Omega_1}{dw} = \frac{\gamma_1}{\sqrt{w(w - a_3)(w - a_5)}}, \quad (13)$$

$$\frac{d\Omega_2}{dw} = \frac{\beta_2 + \gamma_2(w - a_5)}{(w - a_5)\sqrt{w(w - a_3)(w - 1)}}, \quad (14)$$

$$\frac{d\Omega_3}{dw} = \frac{\gamma_3}{\sqrt{(w - 1)(w - a_5)}}, \quad (15)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \beta_2, \gamma_3$ - действительные постоянные, определяемые граничными значениями функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ на электродах после интегрирования (13)–(15). У производных $\frac{d\Omega_k}{dw}$ ($k = 1, 2, 3$) равна нулю либо действительная, либо мнимая часть на соответствующих участках действительной оси плоскости w . Искомые решения $\varphi_k(U, V)$ можно представить в виде

$$\varphi_1(u, v) = \gamma_1 \operatorname{Im} \int_{a_3}^w \frac{dw}{\sqrt{w(w - a_3)(w - a_5)}} + C_1, \quad (16)$$

$$\varphi_2(u, v) = \operatorname{Im} \int_{a_3}^w \frac{\beta_2 + \gamma_2(w - a_5)}{(w - a_5)\sqrt{w(w - a_3)(w - 1)}} + C_2, \quad (17)$$

$$\varphi_3(u, v) = \gamma_3 \operatorname{Im} \left(\ln \frac{\sqrt{w-1} + \sqrt{w-a_5}}{\sqrt{w-1} - \sqrt{w-a_5}} \right) + C_3. \quad (18)$$

Здесь

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{a_5}}{8F\left(\frac{\pi}{2}, P_1\right)} (\Phi_1 + \Phi_3 + \Phi_4 + \phi_6 - 2\Phi_2 - 2\Phi_5),$$

$$C_1 = \frac{1}{2} (\Phi_2 + \Phi_5),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4\pi} \sqrt{a_5(a_5 - a_3)(a_5 - 1)} (\Phi_4 + \Phi_6 - \Phi_1 - \Phi_3),$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4F\left(\frac{\pi}{2}, P_2\right)} \left[\Phi_5 - \Phi_2 + \frac{4\beta_2}{a_5 - 1} \Pi \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1 - a_3}{1 - a_5}, P_2 \right) \right],$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (\Phi_2 - \Phi_5),$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{4\pi} (\Phi_1 + \Phi_4 - \Phi_3 - \Phi_6), \quad C_3 = -\pi\gamma_3.$$

В последних формулах введены следующие обозначения: $F\left(\frac{\pi}{2}, P\right)$ и $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, p\right)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода соответственно,

$$P_1 = \sqrt{1 - \frac{a_3}{a_5}}, \quad P_2 = \sqrt{1 - a_3}.$$

Функция $\varphi_4(u, v)$ находится по известной формуле Шварца, дающей решение задачи Дирихле для верхней полуплоскости,

$$\varphi_4(u, v) = \frac{1}{4\pi} (\Phi_3 + \Phi_4 - \Phi_1 - \Phi_6) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a_5 - u}{v} \right). \quad (19)$$

Распределение искомого потенциала в w -плоскости находится простым суммированием

$$\varphi(u, v) = \sum_{k=1}^4 \varphi_k(u, v). \quad (20)$$

В частном случае, когда исследуемая система представляет собой трехэлектродную цилиндрическую линзу, у которой $\Phi_4 = \Phi_1, \Phi_5 = \Phi_2, \Phi_6 = \Phi_3$, функции φ_2 и φ_4 обращаются в нуль. В отклоняющей иммерсионной системе, где $\Phi_4 = \Phi_1, \Phi_5 = -\Phi_2, \Phi_6 = \Phi_3$, обращается в нуль функция φ_4 . Таким образом, нами найдено выражение для распределения потенциала в плоскости w . Теперь для нахождения распределения потенциала в плоскости τ необходимо найти параметры конформного преобразования (10), (11). Интегрируя (10) по бесконечно малой окружности около точки a_5 , найдем

$$C = -\frac{d_2 \sqrt{a_5(a_5 - a_3)(a_5 - 1)}}{2\pi (a_5 - a_2)(a_5 - a_6)}. \quad (21)$$

Таблица 1. Значения коэффициентов конформного преобразования

H_1	H_2				
		0.5	1	1.5	2
1	a_2	0.834419	0.765482	0.732735	0.716128
	a_3	0.993130	0.986930	0.983610	0.981890
	a_4	1.080110	1.283260	1.595910	2.013500
	a_5	1.263534	1.573535	1.967281	2.455779
2	a_2	0.908315	0.866379	0.840227	0.827198
	a_3	0.999834	0.999681	0.999576	0.999523
	a_4	1.046210	1.152800	1.344499	1.579992
	a_5	1.144352	1.305965	1.544299	1.814889
3	a_2	0.884601	0.901619	0.884775	0.874142
	a_3	0.999992	0.999989	0.999986	0.999985
	a_4	1.241795	1.121999	1.240800	1.404999
	a_5	1.378220	1.231431	1.376542	1.563390

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением систем, у которых $d_1 = d_2 = d$. Для них можно записать следующие равенства:

$$d = 2C \int_{a_3}^1 |f(u)| du, \quad L = 2C \int_0^{a_2} |f(u)| du,$$

$$L = 2C \int_{a_2}^{a_3} |f(u)| du, \quad l - L = 2C \int_{a_2}^{a_6} f(w) dw. \quad (22)$$

Учитывая конкретный вид подынтегральной функции (11), из соотношений (21), (22) получим систему двух квадратных уравнений относительно коэффициентов a_2 и a_6

$$a_2 a_6 (J_5 + 1) - a_2 (J_3 + a_5) - a_6 (J_3 + a_5) + a_5^2 + J_1 = 0,$$

$$a_2 a_6 J_6 - a_2 J_4 - a_6 J_4 + J_2 = 0, \quad (23)$$

где

$$J_k = \frac{\pi}{\sqrt{a_5(a_5 - a_3)(a_5 - 1)}} \int_{a_3}^1 \frac{u^{\frac{5-k}{2}} du}{(u - a_5) \sqrt{u(u - a_3)(1 - u)}},$$

$$J_n = \int_0^{a_3} \frac{u^3 - \frac{n}{2} du}{(u - a_5) \sqrt{u(u - a_3)(u - 1)}} \quad (k = 1, 3, 5; n = 2, 4, 6)$$

— интегралы, зависящие только от коэффициентов a_3 и a_5 .

Используя аналитическое решение системы уравнений (23), равенства (22) сведем к двум соотношениям, связывающим коэффициенты a_3 и a_5

с геометрией рассматриваемой системы. Задавая a_3 и a_5 , можно вычислить безразмерные параметры $H_1 = L/d$ и $H_2 = (l - L)/d$, определяющие геометрию системы.

В таблице приведены значения a_2 , a_3 , a_5 и a_6 , соответствующие системам, для которых параметр H_1 принимает значения 1, 2, 3, а параметр H_2 — 0.5, 1, 1.5, 2.

Очевидно, что результаты произведенных расчетов могут быть использованы и при решении задач магнитостатики с аналогичными граничными условиями.

Список литературы

- [1] Гликман Л.Г., Радченко В.В., Спивак-Лаеров И.Ф. // Тез. докл. Республиканского семинара по методам расчета электронно-оптических систем (IX семинар "Методы расчета ЭОС"). Ташкент, 1988. С.15.
- [2] Лаурентьев Н.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Актюбинский
педагогический институт

Поступило в Редакцию
2 августа 1991 г.