01

БЫСТРОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЯ ВНУТРИ СОЛЕНОИДА

Л.Б.Луганский, Д.Б.Диатроптов

При расчете магнитного поля внутри аксиально-симметричных магнитных систем методом центральной зоны необходимо вычислять коэффициенты в разложении поля в ряд по сферическим гармоникам. До сих пор в литературе были известны аналитические выражения лишь для нескольких младших коэффициентов этого разложения. В данной работе описывается регулярный метод вычисления указанных коэффициентов произвольного порядка для круговых катушек прямоугольного сечения с однородным распределением тока по сечению катушки $j = \mathrm{const}$ и распределением вида $j(\rho) \propto 1/\rho$, где ρ — расстояние элемента тока от оси соленоида.

Разложение поля по сферическим гармоникам

Вычисление магнитного поля вне оси соленоида, который нельзя считать тонким, требует численного интегрирования, занимающего большое время. В большинстве задач оптимизация токовых систем представляет интерес поле только в окрестности некоторой точки на оси системы. В этом случае для нахождения поля удобен математический аппарат разложения поля по сферическим гармоникам — так называемый метод центральной зоны, основывающийся на том, что в аксиально-симметричной системе компоненты магнитного поля в окрестности центра системы могут быть представлены в виде рядов [1].

$$B_z(R, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R^n P_n(\cos\vartheta), \tag{1.1}$$

$$B_r(R, \vartheta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} R^n P_n^1(\cos\vartheta). \tag{1.2}$$

Здесь R, ϑ — сферические, а $z = R\cos\vartheta$, $r = R\sin\vartheta$ — цилиндрические координаты точки наблюдения (см. рисунок), P_n, P_n^1 — полином и присоединенный полином Лежандра.

Коэффициенты C_n определяются геометрией катушек системы и токами в них. Ряды заведомо сходятся при $R < R_0$, где R_0 — радиус сферы, не содержащей токовых элементов.

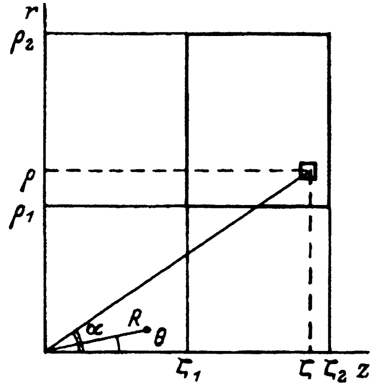

Рис. Координаты, используемые в расчетах.

При $\vartheta = 0$ поле рассматривается на оси соленоида, ряд (1.1) принимает вид

$$B_z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \tag{1.3}$$

откуда следует, что коэффициенты C_n связаны с пространственными производными поля соотношениями

$$C_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n B_z(z)}{dz^n}\bigg|_{z=0}. \tag{1.4}$$

Первичным элементом аксиально-симметричной обмотки является круговой виток, несущий ток I. Для него коэффициенты C_n известны [1] и в гауссовой системе единиц имеют вид

$$C_n = \frac{2\pi}{c} I \varphi_n(\zeta,\rho), \quad \varphi_n(\zeta,\rho) = \frac{\sin^{n+2}\alpha}{\rho^{n+1}} P^1_{n+1}(\cos\alpha), \quad \operatorname{tg}\alpha = \rho/\zeta, \tag{1.5}$$

где ζ, ρ — цилиндрические координаты витка.

Для круговой катушки произвольного сечения S с плотностью тока $j(\zeta,\rho)$ коэффициенты разложения C_n получаются из (1.5) интегрированием по сечению катушки

$$C_n = \frac{2\pi}{c} \iint\limits_S j(\zeta,\rho)\varphi_n(\zeta,\rho)d\zeta d\rho. \tag{1.6}$$

В большинстве случаев на практике используются катушки прямоугольного сечения с однородным распределением тока по сечению $j =$ $=$ const или с зависимостью вида $j(\rho)$. Для такой катушки коэффициенты C_n являются функциями плотности тока $j(\rho)$ и координат вершин сечения катушки ζ_1, ζ_2, ρ_1, ρ_2

$$C_n = \frac{2\pi}{c} F_n\Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2}\Big|_{\rho_1}^{\rho_2}, \quad F_n\Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2}\Big|_{\rho_1}^{\rho_2} = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} j(\rho)\varphi_n(\zeta,\rho)d\zeta d\rho. \tag{1.7}$$

В литературе имеются [2] аналитические выражения нескольких младших коэффициентов C_n с четными n для круговой катушки прямоугольного сечения, полученные дифференцированием (1.4) известной формулы для магнитного поля на оси такой катушки при $j = \text{const}$ и $j = A/\rho$. Регулярной процедуры расчета произвольных коэффициентов C_n до сих пор не было известно.

В настоящей работе описывается регулярный метод вычисления коэффициентов C_n любого порядка для круговой катушки прямоугольного сечения с $j = \text{const}$ и $j = A/\rho$. Он основан на вычислении интеграла (1.7). Обозначим

$$f_n(\zeta,\rho) = \int j(\rho)\varphi_n(\zeta,\rho)d\zeta, \quad \rho = \text{const}, \tag{1.8}$$

$$F_n(\zeta,\rho) = \int f_n(\zeta,\rho)d\rho, \quad \zeta = \text{const}. \tag{1.9}$$

тогда

$$F_n\Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2}\Big|_{\rho_1}^{\rho_2} = F_n(\zeta_2,\rho_2) - F_n(\zeta_2,\rho_1) - F_n(\zeta_1,\rho_2) + F_n(\zeta_1,\rho_1) \tag{1.10}$$

и искомый коэффициент разложения поля определяется формулой (1.7).

Для системы катушек результирующий коэффициент C_n вычисляется сложением соответствующих коэффициентов для отдельных катушек.

Вычисление F_n для $j = \text{const}$

Этот случай соответствует намотке N витков проводника с током i. Плотность тока равна

$$j = \frac{Ni}{(\zeta_2 - \zeta_1)(\rho_2 - \rho_1)}. \tag{2.1}$$

При $n = 0$ $P_1^1(\cos\alpha) = \sin\alpha$ и интегралы (1.8), (1.9) приводят к выражению

$$F_0(\zeta,\rho) = j\zeta\ln(\rho + \sqrt{\zeta^2 + \rho^2}). \tag{2.2}$$

При $n = 1$ $P_2^1(\cos\alpha) = 3\sin\alpha\cos\alpha$ и

$$F_1(\zeta,\rho) = j\left(\frac{\rho}{\sqrt{\zeta^2+\rho^2}} - \ln\left(\rho + \sqrt{\zeta^2+\rho^2}\right)\right). \tag{2.3}$$

В последней формуле опущено появляющееся при интегрировании слагаемое $\ln\zeta$, поскольку при выполнении процедуры (1.10) его вклад обращается в нуль.

При $n \geq 2$ интеграл (1.8) можно вычислить с помощью формулы

$$\int(1-x^2)^{\nu/2-1}P_\nu^\mu(x)dx = \frac{1}{\mu-\nu}(1-x^2)^{\nu/2}P_{\nu-1}^\mu(x). \tag{2.4}$$

Следует обратить внимание, что в формуле 1.12.1.10 справочника [3] дано неправильное выражение правой части.

В результате интегрирования получается выражение

$$f_n(\zeta,\rho) = -\frac{j}{n\rho^n}\sin^{n+1}\alpha P_n^1(\cos\alpha), \quad \operatorname{tg}\alpha = \rho/\zeta. \tag{2.5}$$

Последующее интегрирование (1.9) приводит к формуле

$$F_n(\zeta,\rho) = \frac{j}{n\zeta^{n-1}} Gn(\zeta,\rho), \tag{2.6}$$

где

$$G_n(\zeta,\rho) = \int u^{n-2} P_n^1(u)du, \quad u = \cos\alpha = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2+\rho^2}}. \tag{2.7}$$

Присоединенный полином Лежандра можно вычислить по формуле [4]

$$P_n^1(u) = (1-u^2)^{1/2}\sum_{r=0}^{m} a_{nr}(n-2r)u^{n-2r-1}, \tag{2.8}$$

где

$$m = \begin{cases} (n-2)/2 & \text{при } N \text{ четном,} \\ (n-1)/2 & \text{при } N \text{ нечетном,} \end{cases}$$

а коэффициенты в сумме равны

$$a_{nr} = (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}.$$

Подставляя выражение (2.8) в формулу (2.7), получаем

$$G_n(u) = \int (1-u^2)^{1/2}\sum_{r=0}^{m} a_{nr}(n-2r)u^{2n-2r-3}du. \tag{2.9}$$

Здесь можно выполнить почленное интегрирование, пользуясь формулой 1.2.46.4 справочника [5]

$$\int (1-u^2)^{1/2}u^{2p+1}du = \sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{2k+3}\left(\frac{p}{k}\right)(1-u^2)^{k+3/2}, \tag{2.10}$$

где

$$\left(\frac{p}{k}\right) = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

— биномиальный коэффициент.

Результат интегрирования будет иметь вид

$$G_n(u) = (1-u^2)^{3/2}\sum_{k=0}^{n-2} A_{nk}(1-u^2)^k \tag{2.11}$$

Во входящем сюда полиноме перегруппируем члены, в итоге получаем формулу

$$G_n(u) = (1-u^2)^{3/2} R_n(u), \tag{2.12}$$

где полином $R(u)$ имеет вид

$$R_n(u) = \sum_{k=0}^{n-2} B_{nk}(u^2)^k. \tag{2.13}$$

Для нахождения коэффициентов B_{nk} продифференцируем выражение (2.12) и приравняем подынтегральному выражению формулы (2.9), коэффициенты в котором известны. Тогда получим, что коэффициенты B_{nk} вычисляются рекурсивно сверху вниз по индексу $k = n-3, n-4, \ldots, 0$ по следующим формулам:

$$B_{nk} = \frac{2k+2}{2k+3} B_{n,k+1} - \frac{1}{2k+3} Q_{nk}, \tag{2.14}$$

$$Q_{nk} = -\frac{(2k+4-n)(2k+5-n)}{2(2k+5)(n-k-2)} Q_{n,k+1}, \tag{2.15}$$

причем в начале рекурсии следует положить

$$Q_{n,n-2} = \frac{(2n-1)!!}{(n-1)!} = U_n, \tag{2.16}$$

$$B_{n,n-2} = -\frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} = V_n. \tag{2.17}$$

Вычисления при $n \geq 3$ можно произвести по рекуррентным формулам

$$U_n = \frac{2n-1}{n-1} U_{n-1}, \quad U_2 = 3, \tag{2.18}$$

$$V_n = \frac{2n-3}{n-1} V_{n-1}, \quad U_2 = -1. \tag{2.19}$$

Итак, мы получили регулярную процедуру для вычисления коэффициентов C_n разложения в ряд поля катушки прямоугольного сечения с однородной плотностью тока. Коэффициенты C_n вычисляются по формулам (1.7) и (1.10), где функции F_n при $n = 0$ и 1 вычисляются по формулам (2.2) и (2.3), а при $n \geq 2$ по формуле

$$F_n(\zeta, \rho) = j \frac{(1-u^2)^{3/2}}{n\zeta^{n-1}} R_n(u), \quad u = \cos\alpha = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \rho^2}}, \tag{2.20}$$

которая получается при подстановке (2.12) в (2.6). Полином $R_n(u)$ находится по рекуррентной процедуре, описываемой формулами (2.13)–(2.19). Ниже приведены явные выражения полинома R_n для

$$n = 2, \ldots, 8,$$

$$R_2(u) = -1,$$

$$R_3(u) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}u^2,$$

$$R_4(u) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}u^2 - \frac{5}{2}u^4,$$

$$R_5(u) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8}u^2 - \frac{35}{8}u^6,$$

$$R_6(u) = -\frac{1}{5} - \frac{3}{10}u^2 - \frac{3}{8}u^4 + \frac{7}{4}u^6 - \frac{63}{8}u^8,$$

$$R_7(u) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4}u^2 - \frac{5}{16}u^4 - \frac{35}{48}u^6 + \frac{105}{16}u^8 - \frac{231}{16}u^{10},$$

$$R_8(u) = -\frac{1}{7} - \frac{3}{14}u^2 - \frac{15}{56}u^4 - \frac{5}{16}u^6 - \frac{45}{16}u^8 + \frac{297}{16}u^{10} - \frac{429}{16}u^{12}.$$

Из формулы (2.20) видно, что приведенная схема расчета при $n \geq 2$ не годится, когда ζ_1 или ζ_2 равны нулю. При $\zeta = 0$ формула (2.5) дает

$$f_n(0, \rho) = -\frac{j}{n\rho^n} P_n^1(0), \tag{2.21}$$

а интегрирование (1.9) приводит к выражению

$$F_n(0, \rho) = \frac{j}{n(n-1)\rho^{n-1}} P_n^1(0) = \frac{j}{(n-1)\rho^{n-1}} P_{n-1}(0). \tag{2.22}$$

Эту величину следует вставлять в процедуру (1.10), когда ζ_1 или ζ_2 обращается в нуль при $n \geq 2$. Формулы (2.2) и (2.3) для $F_0(\zeta, \rho)$ и $F_1(\zeta, \rho)$ справедливы и при $\zeta = 0$.

Вычисление F_n для $j = A/\rho$

Этот случай соответствует биттеровскому геликоидальному соленоиду, спаянному из разрезных дисков толщины h с током I. Плотность тока равна

$$j = \frac{A}{\rho}$$

где

$$A = \frac{I}{h \ln(\rho_2/\rho_1}. \tag{3.1}$$

При $n = 0$ интегралы (1.8), (1.9) приводят к выражению

$$F_0(\zeta, \rho) = A \ln\left(\sqrt{\zeta^2 + \rho^2} - \zeta\right). \tag{3.2}$$

В последней формуле опущено появляющееся при интегрировании слагаемое $\ln \rho$, поскольку при выполнении процедуры (1.10) его вклад обращается в нуль.

При $n \geq 1$ интегрирование (1.8), аналогичное (2.4), (2.5), приводит к формуле

$$f_n(\zeta, \rho) = -\frac{A}{n\rho^{n+1}} \sin^{n+1} \alpha P_n^1(\cos \alpha), \quad \operatorname{tg} \alpha = \rho/\zeta. \tag{3.3}$$

Последующее интегрирование (1.9) приводит к формуле

$$F_n(\zeta, \rho) = \frac{A}{n\zeta^n} G_n(\zeta, \rho), \tag{3.4}$$

где

$$G_n(\zeta, \rho) = \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{1-u^2}} P_n^1(u) du, \quad u = \cos \alpha = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \rho^2}}. \tag{3.5}$$

Поскольку $P_n^1(u) = \sqrt{1-u^2} \frac{dP_n(u)}{du}$, то формула (3.5) приобретает вид

$$G_n(u) = \int u^{n-1} \frac{dP_n(u)}{du} du = u^n P_{n-1}(u). \tag{3.6}$$

Итак, мы получили регулярную процедуру для вычисления коэффициентов C_n разложения в ряд поля катушки прямоугольного сечения с распределением плотности тока $j(\rho) = A/\rho$. Коэффициенты C_n вычисляются по формулам (1.7) и (1.10), где функция F_n при $n = 0$ вычисляется по формуле (3.2), а при $n \geq 1$ по формуле

$$F_n(\zeta, \rho) = \frac{A}{n(\zeta^2 + \rho^2)^{n/2}} P_{n-1}(u), \quad u = \cos \alpha = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \rho^2}}, \tag{3.7}$$

которая получается при подстановке (3.6) в (3.4).

Применение методики

С помощью описанной методики рассчитывались многие системы из катушек прямоугольного сечения, предназначенные для получения однородного поля. В качестве примера рассмотрим систему из двух пар зеркально-симметричных катушек с одинаковой, постоянной по сечению плотностью тока (последовательное включение), оптимальная геометрия которых рассчитана в работе [6]. Для решения задачи оптимизации надо при пробных значениях координат вершин сечения всех катушек ζ_1, ζ_2, ρ_1, ρ_2 находить значения B_z в нескольких десятках точек по выбранной рабочей области. В рассматриваемом случае оптимизация производится по поверхности сферы с радиусом около одной трети расстояния от центра системы до ближайшего токонесущего элемента. При этом оптимальная относительная средняя квадратичная неоднородность поля по объему рабочей сферы оказывается $1 \cdot 10^{-5}$. Для получения такой точности приходится вести вычисления с 11 знаками (6 б на действительное число) и суммировать ряд (1.1) до $n = 10$.

Значительно ускоряют вычисления три обстоятельства: во-первых, массив значений B_{nk} (2.13) не надо вычислять заново в процессе оптимизации, во-вторых, на данном шаге оптимизации, когда найдены коэффициенты разложения C_n, расчет поля в любой точке рабочей области производится очень быстро суммированием (1.1), в-третьих, благодаря симметрии системы играют роль только члены с четными n. Вклад зеркальной катушки удваивает величину C_n.

Время расчета карты поля этой системы на ЭВМ HP1000 составляет по 18 точкам 9 сс (1 сс = 10^{-2}с — квант времени на часах этой машины), а по 90 точкам 13 сс, тогда как при численном расчете методом однократного интегрирования [7] на это требуется по 18 точкам 10027 сс, а по 90 точкам — в 5 раз больше.

Во многих задачах синтеза заданного магнитного поля так называемым локальным методом требуется подбирать геометрию катушек магнитной системы таким образом, чтобы коэффициенты C_n принимали наперед заданные значения. Описанная методика позволяет легко вычислять нужные коэффициенты и осуществлять требуемый синтез.

Список литературы

[1] *Смайт Б.* Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.

[2] *Монтгомери Д.* Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов. М.: Мир, 1971. С. 265–268.

[3] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. С. 38.

[4] *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. М.: Физматгиз. 1963. С. 109–119.

[5] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1981. 789 с.

[6] *Lugansky L.B.* // Meas. Sci. Technol. 1990. Vol. 1. P. 53–58.

[7] *Алиевский Б.Л., Орлов В.Л.* Расчет параметров магнитных полей осесимметричных катушек. М.: Энергоатомиздат, 1983. 112 с.

Институт физических проблем
им.П.Л.Капицы
Москва

Поступило в Редакцию
10 октября 1991 г.