

01;07;08

©1992 г.

ОБ ОДНОМ ОГРАНИЧЕНИИ ЧАСТОТЫ ПРИ ДИФРАКЦИИ СВЕТА НА УЛЬТРАЗВУКЕ

Г.Е.Зильберман, Г.Ф.Голтвянская, И.Н.Голтвянский

Как показано в работе, существуют диаграммы Диксона более высоких порядков (второго, третьего и т. д.). Вследствие этого выводы, сделанные на основе диаграмм Диксона о минимальной f_{\min} частоте звука, при которой происходит так называемая анизотропная дифракция света на звуке, должны быть пересмотрены в сторону уменьшения f_{\min} .

Точное решение задачи о распространении света в поле звуковой волны — это решение волнового уравнения

$$\text{graddiv}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

В кристаллах и изотропных телах [1]

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k; \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + a_{iklm} u_{lm}, \quad (2)$$

где u_{lm} — тензор деформации, a_{iklm} — упругооптический тензор.

Рассмотрим случай, когда в кристалле распространяется гармоническая звуковая волна,

$$u_l = u_{l0} \sim (\omega_0 t - k_0 y),$$

если направление звуковой волны принять за ось OY (ω_0 и k_0 — частота и волновой вектор звука).

В уравнении (2) все коэффициенты будут периодическими функциями аргумента

$$\Phi = k_0 y - \omega_0 t.$$

В этом смысле уравнение (1) аналогично уравнению Шредингера для движения электрона в периодическом поле решетки. Как известно, на основании теоремы Флоке–Блоха решение будет иметь вид плоской волны $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, умноженной на периодическую функцию с периодом Φ ,

$$E_i = \sum_n A_n^{(i)} \exp \{i[k_1 x + (k_2 + nk_0) y + k_3 z] - i(\Omega + n\omega_0)\}, \quad (3)$$

где Ω — частота света.

Для высокочастотного звука разработан метод, названный авторами методом непрерывных дробей (см., например, [2-4]). Этот метод вносит в (3) некоторую конкретизацию, а именно вместо $A_n^{(i)} \exp(ik_1x)$ оказывается необходимым взять линейную комбинацию таких выражений $\sum_j A_{nj}^{(i)} \exp(ik_{1j}x)$. Тогда (3) запишется в виде

$$E_i = \sum_{n,j} A_{nj}^{(i)} \exp [i(k_{1j}x + (k_2 + nk_0)y + k_3z) - i(\Omega + n\omega_0)] t. \quad (4)$$

Метод непрерывных дробей изложен в ряде работ (см., например, [2-4]). Схематически он состоит в следующем. В соответствии с системой кристалла находится тензор a_{iklm} [1]. При подстановке (3) в (2) получается выражения вида

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + 2\alpha_{ik} \cos(\omega_0 t - k_0 y). \quad (5)$$

В уравнение (1) подставляются все ε_{ik} и E_i (3). Получающаяся система разностных уравнений для $A_n^{(i)}$ содержит малый для высокочастотного звука параметр q (или несколько q с разными α)

$$q = \frac{\alpha \kappa^2}{k_0^2} \ll 1, \quad (6)$$

где κ — волновой вектор света в пустоте.

Решение обрезанной на любом $n = N$ системы для величины $A_n^{(i)}$ производится не методом теории возмущений („методом малого параметра“). Система однородна, и решается ее дисперсионное уравнение. Оно имеет N корней $A_{nj}^{(i)}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) и столько же значений, входящих в систему величин k_{1j} . Отсюда и суммирование по j в (4). „Размножение“ каждой (n -й) дифракционной составляющей на N волн имеет принципиальное значение, в частности, без него нельзя удовлетворить граничным условиям. Применение этих условий окончательно решает задачу.

При наличии звука в кристалле из плоской волны $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ получается выражение (3) (или, точнее, (4), что в данном случае, однако, непринципально). Поскольку направление звука принято за ось OY , то в показателе в (4) стоит фактически выражение $\mathbf{k} + n\mathbf{k}_0$. Это обстоятельство устанавливает связь точного решения (4) с диаграммами Диксона [5].

Если из всех A_n в (4) большое значение имеет только A_1 (брэгговское отражение 1-го порядка), то (4) можно приближенно записать как

$$A_1 \exp[i(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)\mathbf{r}] = A_1 \exp[i\mathbf{k}'\mathbf{r}].$$

Таким образом, в этом случае волновой вектор света в звуковой волне равен

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{k}_0. \quad (7)$$

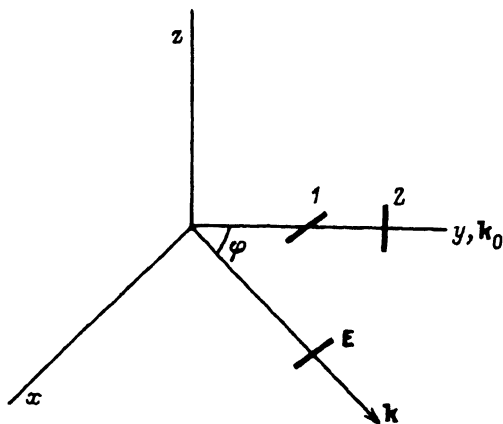


Рис. 1.

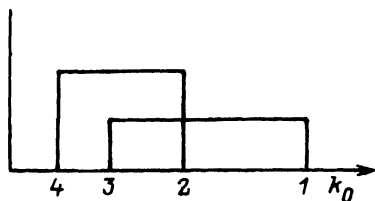


Рис. 2.

Это соотношение похоже на закон сохранения импульса фотона, но это не так: у фотона в поле звуковой волны нет импульса, есть только квазиимпульс, как у электрона в кристалле. В неподвижной звуковой решетке (она фактически может быть создана в так называемых фоторефрактивных кристаллах [7]), как видно из вывода соотношения (4), k_0 не является импульсом фотона, это — вектор обратной решетки.

Даже в случае брэгговского отражения первого порядка не равны нулю и другие амплитуды, в особенности соседние с A_1 , а именно A_2 и A_{-1} . При брэгговском резонансе второго порядка наибольшее значение имеет A_2 , так что там

$$k' = k + 2k_0. \quad (8)$$

Это можно рассматривать как диаграмму Диксона 2-го порядка. В общем случае

$$k' = k + mk_0 \quad (9)$$

— диаграмма m -го порядка.

Авторы современных статей и монографий по акустооптике пользуются для исследования различных случаев дифракции в основном диаграммами Диксона (7).

Вследствие этого многие выводы оказываются неточными. В монографии [8] рассмотрен случай дифракции, о котором говорится, что это „наиболее простой случай дифракции света на звуке в одноосных кристаллах“. В этих кристаллах поверхности волновых векторов представляют собой сферу для обыкновенной волны и эллипсоид вращения вокруг оптической оси для необыкновенной. Под наиболее простым случаем в [8] понимается такой, когда свет и звук распространяются в базисной плоскости, перпендикулярной оптической оси (рис. 1). В [8] рассматривается случай, когда падающая волна является обыкновенной, а дифрагированная — необыкновенной. Колебания света и звука показаны черточками (для звука это могут быть колебания типа 1 или 2; по видимому, в [8] предполагается, что звук поперечный).

Опираясь на диаграмму Диксона (7), авторы [8] приходят к выводу, что в рассматриваемом случае дифракция может происходить только в

$$k_{0 \min} = \varkappa(n_0 - n_e) \quad (10)$$

до

$$k_{0 \max} = \varkappa(n_0 + n_e). \quad (11)$$

Кристалл предполагается отрицательным ($n_0 > n_e$), n_0 и n_e — показатели преломления. Мы покажем, что ограничение (10) ошибочно. Это объясняется существованием диаграмм порядка более высокого, чем первый (см.(15)). Разумеется, „вес" каждой из диаграмм может быть определен только из уравнений Максвелла.

Рассмотрим теорию дифракции для геометрии рис. 1. Начнем с того, что поворот плоскости поляризации происходит не всегда: при тетрагональной системе для колебаний типа 1, но не типа 2. При тригональной системе поворот получается при колебаниях обоих типов. Проведем расчет для тригональной системы и колебаний типа 2 для высокочастотного звука. Способ расчета рассмотрен выше. Диаграмма первого порядка предполагает переход световой волны от закона дисперсии

$$\varkappa^2 n_0^2 - k_1^2 - k_2^2 = 0 \quad (12)$$

для падающей волны к закону дисперсии,

$$\varkappa^2 n_e^2 - k_1^2 - (k_2 + k_0)^2 = 0 \quad (13)$$

для дифрагированной.

Диаграмма m -го порядка означает переход от (12) к закону дисперсии

$$\varkappa^2 n_e^2 - k_1^2 - (k_2 + mk_0)^2 = 0. \quad (14)$$

Для перехода (12),(13) границы значений k_0 , как сказано в [8], определяются формулами (10) и (11). Однако для перехода (12)–(14) имеем другие границы ($n_0 > n_e$)

$$k_{0 \min} = \frac{1}{|m|} \varkappa(n_0 - n_e), \quad (15)$$

$$k_{0 \max} = \frac{1}{|m|} \varkappa(n_0 + n_e). \quad (16)$$

Верхняя и нижняя границы в m раз меньше, чем для перехода (12)–(13).

На рис. 2 показаны допустимые значения k_0 при $M = 1$ и 2. Интервал допустимых значений k_0 расширяется в сторону меньших k_0 . Точка 1 соответствует $k_0 = \varkappa(n_0 + n_e)$, в точке 2 — $k_0 = (1/2)\varkappa(n_0 + n_e)$, в точке 3 — $k_0 = \varkappa(n_0 - n_e)$, в точке 4 — $k_0 = (1/2)\varkappa(n_0 - n_e)$.

Возможна также дифракция без поворота плоскости поляризации. Такой случай будет иметь место, например, в тетрагональном кристалле (кл. $4mm$, $42m$, 422 , $4/mmm$) и продольном звуке при сохранении геометрии рис. 1. Падающая волна пусть имеет тот же закон дисперсии (12), а дифрагированная m -го порядка закон дисперсии

$$\varkappa^2 n_0^2 - k_1^2 - (k_2^2 + mk_0)^2 = 0. \quad (17)$$

В этом случае k_0 оказывается ограниченным только сверху

$$k_0 < \frac{2\kappa n_0}{|m|}. \quad (18)$$

Каждый переход (12)–(13), (12)–(14) или (12)–(17) совершается при определенном k_2 , т.е. при определенном угле распространения света в кристалле. Эти углы находятся из перечисленных пар уравнений. Они являются брэгговскими углами. При отклонении от этих углов могут приобрести одинаковую по порядку величину несколько дифракционных компонент.

Диаграммы различных порядков имеют различный вес, т.е. различную амплитуду дифрагированной волны. Если бы оказалось, что амплитуда волны в случае (12)–(13), т.е. при $m = 1$ подавляюще велика по сравнению с амплитудой при $m = 2$, то можно было бы считать ограничение (10)–(11) оправданным. Вследствие этого необходимо решить аналитически задачу дифракции для $E_1^{(3)}$ и $E_2^{(3)}$ и найти выражение для амплитуд дифрагированных волн в этих двух случаях. Как будет видно ниже, при выполнении брэгговских соотношений амплитуды оказываются одного порядка величины.

Способ вычисления описан выше. Вычисления громоздки, и мы их опускаем. Приведем лишь результаты. Падают волна, имеющая компоненты E_1 и E_2 (рис. 1). Соотношение между ними определяется углом φ ($k_2 = \kappa n_0 \cos \varphi$). Брэгговскому углу соответствует k_{2B} , имеющий величину

$$k_{2B} = \kappa n_0 \cos \varphi = -\frac{1}{2}k_0 - \frac{\kappa^2(n_0^2 - n_e^2)}{2k_0}. \quad (19)$$

Окрестности этого угла соответствует

$$k_2 = k_{2B} + \frac{1}{2}k_0\varepsilon, \quad (20)$$

где ε — расстройка по отношению к брэгговскому резонансу.

Брэгговский угол (19) отличается от обычных брэгговских углов в кристалле ввиду необычности геометрии (рис. 1).

Основная компонента имеет проекции $E^{(1)}$ и $E_0^{(2)}$. Пусть

$$E_0^1 = A_0 \exp[i(k_1x + k_2y)] \quad (21)$$

(временные множители всюду опускаются).

Тогда дифрагированная волна $E_1^{(3)}$ (при малом ε) определяется выражением

$$E_1^3 = A_0 \frac{2iq_3}{R_1} \exp\{i[k_1x + (k_2 + k_0)y]\} \sin \frac{k_0^2 R_1 x}{4k_1}, \quad (22)$$

где

$$R_1 = \sqrt{\varepsilon^2 + 4q_3^2}. \quad (23)$$

При $\varepsilon = 0$ достигается максимум дифракционной эффективности.

Рассмотрим теперь главную из продифрагированных компонент при переходе с поворотом плоскости поляризации от закона дисперсии (12) к

(14) при $m = 2$. Режим, близкий к брэгговскому, определяется выражением

$$k_2 = -k_0 - \frac{\kappa^2(n_0^2 - n_e^2)}{4k_0} + \frac{1}{4}k_0\varepsilon, \quad (24)$$

где ε — расстройка (при $\varepsilon = 0$ $k_2 = k_{2B}$).

Главная дифракционная компонента $E_2^{(3)}$ выражается формулой

$$E_2^{(3)} = -A_0 \frac{2iq_2q_3k_1k_0}{R_2\kappa^2n_0^2} \exp\left[i\left(k_1 + \frac{Q}{2k_1}\right)x + i(k_2 + 2k_0)y\right] \sin \frac{k_0^2 R_2 x}{2k_1}, \quad (25)$$

где

$$R_2 = \sqrt{(\varepsilon + q_2^2\varphi_2 + q_3^2\varphi_3)^2 - 4q_2^2q_3^2\varphi}. \quad (26)$$

В (25) $(k_1k_0)/(k_1^2n_0^2) \sim 1$; $\varphi_2, \varphi_3, \varphi$ — безразмерные функции величин k_0, k_1, k_2, κ , имеющие порядок единицы; Q — функция тех же параметров, содержащая два слагаемых, пропорциональных соответственно q_2^2 и q_3^2 .

В выражениях (22) и (25) q_2 и q_3 возникают из вызванных звуком недиагональных компонент тензора диэлектрической проницаемости ε_{12} и ε_{13} . Они одного порядка величины. Можно считать $q_2 \sim q_3 \equiv q$. При $\varepsilon = 0$ $R_2 \sim q^2$, так же как и числитель, где произведение $q_2q_3 \sim q^2$. Вследствие этого вблизи брэгговского отражения дифракционная эффективность (25) столь же велика, как и в случае (22).

Таким образом, показано, что значение минимальной частоты звука, при которой происходит дифракция с поворотом плоскости поляризации, определяется с помощью диаграмм Диксона неверно. В первом томе последнего издания физической энциклопедии [9], а также в [10] утверждается, что если плоскость рассеяния не проходит через оптическую ось кристалла (а рассмотренный пример относится именно к этому случаю), то минимальная частота определяется формулой (10). Мы показали, что в общем случае это утверждение неверно.

Выводы, сделанные на основании диаграмм Диксона, следует критически пересмотреть.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1957.
- [2] Зильберман Г.Е., Купченко Л.Ф. // РЭ. 1977. Т. 22. № 8. С. 1551–1556.
- [3] Зильберман Г.Е., Сидоров И.Н., Купченко Л.Ф. // РЭ. 1982. Т. 27. № 2. С. 241–247.
- [4] Зильберман Г.Е., Купченко Л.Ф., Голтянская Г.Ф. // РЭ. 1984. Т. 29. № 11. С. 2095–2100.
- [5] R. W. Dixon // IEEE Trans. El. Dev. 1970. Vol. ED-17. N 229. P. 85–93.
- [6] Купченко Л.Ф., Вдовенков В.Ю. и др. // УФЖ. 1988. Т. 33. № 10. С. 1469–1474.
- [7] Зильберман Г.Е., Купченко Л.Ф. и др. // УФЖ. 1991 Т. 36. № 5. С. 712–715.
- [8] Балакий В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е. Физические основы акустооптики. М.: Радио и связь, 1985.
- [9] Физическая энциклопедия. Т. 1. М.: Сов. энциклопедия, 1988.
- [10] Ультразвук. Малая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1979.

Поступило в Редакцию
11 сентября 1991 г.