

01;03

©1992 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

С.М.Перминов

Работа посвящена проблеме возможности использования для изучения взаимодействия жидкость — конструкция численного моделирования на основе полной системы уравнений динамики жидкости — уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса. Используются адаптивные сетки, описаны эффективные методы решения нестационарных уравнений гидродинамики в областях произвольной формы. Исследован переход к критическому режиму обтекания для обтекания одиночного цилиндра и цилиндра над экраном. Обнаружены перестройка течения, изменение распределения давления по поверхности цилиндра, кризис сопротивления, изменение спектрального состава пульсаций скорости и давления, что свидетельствует о адекватности математической модели на основе уравнений Навье–Стокса для изучения динамики жидкости реальным течениям жидкости при больших числах Рейнольдса (по крайней мере для рассматриваемых задач).

Работа большого количества современных машин и технологий сопровождается взаимодействием жидкость — конструкция, происходящим при больших скоростях движения жидкости. Это — течения в трубах, каналах, турбинах, обтекание автомобилей, транспорта, различных подводных аппаратов, задачи химической технологии и т.д.

Изучение такого взаимодействия происходит либо на основе физического эксперимента, либо на основе различных полуэмпирических гипотез и теорий (в основном стационарных). Однако все чаще возникают задачи, для которых постановка полномасштабного эксперимента или невозможна, или затруднена, в то время как полуэмпирические модели обычно малоэффективны при изучении нестационарных процессов. В таком случае остается возможность использования для изучения взаимодействия жидкость-конструкция численного моделирования на основе полной системы уравнений динамики жидкости — уравнений Навье–Стокса.

Применение полных нестационарных уравнений динамики жидкости для изучения высокоскоростных течений связано со многими препятствиями (часть их которых носит принципиальный характер). Во-первых, не ясно, в каком диапазоне чисел Рейнольдса вообще верен закон трения Стокса, положенный в основу уравнения Навье–Стокса. Во-вторых, для системы уравнений Навье–Стокса не доказана теорема существования и единственности решения при больших числах Рейнольдса. В-третьих,

возникает техническая трудность, связанная с наличием в уравнении при больших числах Рейнольдса малого параметра при старших производных. Кроме того, существует мнение [1], что уравнения Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса не отражают реальных физических процессов и не могут быть положены в основу численного моделирования, поскольку турбулентное течение в этом случае представляет собой хаотический процесс в пространстве и по времени, а следовательно, описание его требует статистического подхода (хотя сейчас уже общепризнано, что хаос может описываться даже конечномерными системами уравнений). Ситуация осложняется тем, что до сих пор отсутствовали эффективные численные алгоритмы для решения уравнений гидродинамики в областях произвольной формы и связности при больших градиентах скоростей и давления.

Проблема возможности применения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса в качестве математической модели динамики жидкости выходит за рамки вычислительной математики и является общей для технической гидродинамики, машиностроения, химической технологии и других областей науки и техники, сталкивающимися с необходимостью изучения движения жидкости при больших числах Рейнольдса.

На наш взгляд, подтвердить или опровергнуть возможность применения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса можно, лишь сравнивая результаты расчетов с данными эксперимента. Ряд работ, появившихся в последнее время, в том числе [2,3], посвящен этой задаче.

В данной работе излагаются результаты моделирования критического и закритического режимов обтекания цилиндра и цилиндра, расположенного над экраном. Подобные конфигурации присутствуют в ряде технических конструкций, к надежности и прочности которых предъявляются особые требования. Это — теплообменники, химическая аппаратура, подводные сооружения, в том числе коммуникации, проложенные по дну водоемов. Экспериментальные исследования проводились многими авторами [4,5].

В качестве математической модели нами использовалась система уравнений гидродинамики, включающая в себя полные нестационарные уравнения Навье–Стокса (записанные в естественных переменных скорость — давление) и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U} \bar{\nabla}) \bar{U} = -\bar{\nabla} P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \bar{U} + f(\bar{U}, P, t, T),$$

$$\text{div } \bar{U} = 0. \quad (1)$$

Здесь t — время; $\bar{U} = (U_1, U_2, U_3)$ — скорость; P — давление; T — температура среды; $\text{Re} = (U_0 L_0) / \nu$; U_0, L_0 — характерные скорость и масштаб задачи, ν — кинематическая вязкость. Уравнения (1) записаны в несколько упрощенном виде, что не ограничивает общности используемых алгоритмов благодаря выбору функции $f(\bar{U}, P, t, T)$, учитывающей массовые силы, зависимость свойств среды от температуры, скорости, давления и т.д.

Мы используем адаптированные к форме областей расчетные сетки, построенные при помощи метода Томсона [6]. Созданные прикладные

программы позволяют строить двух- и трехмерные расчетные сетки произвольной связности с различными коэффициентами поджима в разных частях расчетных областей.

При решении уравнений Навье–Стокса в адаптивной системе координат дифференциальные операторы, входящие в уравнения (1), имеют вид

$$\nabla P = \sum_{k=1,3} \sum_{j=1,3} \frac{\partial P}{\partial y_j} J_{jk} \bar{e}_k,$$

$$\operatorname{div} U = \frac{1}{J} \sum_{k=1,3} \sum_{j=1,3} \frac{\partial}{\partial y_j} (J_{jk} J U_k),$$

$$\Delta U_p = \frac{1}{J} \sum_{i=1,3} \sum_{j=1,3} \sum_{k=1,3} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(J_{jk} J_{ik} J \frac{\partial U_p}{\partial y_j} \right),$$

где e_p — орт оси x_p ; $U = \sum_p U_p e_p$; J — Якобиан преобразования; J_{jk} — элементы матрицы Якоби $D(y)/D(x)$, рассматриваемые как функции адаптивных переменных y_i .

В данной работе мы пользовались двумя различными методами решения системы уравнений гидродинамики: методом расщепления по физическим переменным и методом параболической ε -регуляризации уравнения неразрывности. Полученные результаты сравнивались между собой.

Идея схем расщепления (активно развиваемых школой О.М.Белоперковского) состоит в следующем: пусть заданы величины скорости и давления на n -м временном шаге. Тогда для нахождения U^{n+1} , P^{n+1} используется трехэтапная полуневьяная схема

$$\frac{\hat{U} - U^n}{\tau} + (U^n \nabla) \hat{U} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \hat{U} - \nabla P^n + f^n,$$

$$\Delta(\delta P) = \frac{\nabla \hat{U}}{\tau}, \quad \delta P = P^{n+1} - P^n,$$

$$\frac{U^{n+1} - \hat{U}}{\tau} = -\nabla(\delta P). \quad (2)$$

На первом этапе перенос осуществляется только за счет конвекции и сил вязкости. Полученное промежуточное поле скоростей — предиктор подправляется на третьем этапе за счет градиента давления.

Основная сложность решения уравнений (2) заключается во втором этапе: при решении уравнения Пуассона и первого уравнения системы (2) возникает матричная задача $Az = F$. Для ее решения в двумерном случае использовалось полное разложение Холецкого (LDU), обеспечивающее решение уравнения с машинной точностью, а в трехмерных задачах — сочетание неполного разложения Холецкого (ILU) и метода сопряженных градиентов ($ICCG$) для симметричной матрицы A или метода $ORTOMIN$ для несимметричной (невьяная схема).

При постановке граничных условий для давления использовался хорошо известный метод исключения [7]. При численной реализации давление и оператор div задавались в центрах расчетных ячеек, \bar{U} , Δ , ∇ — в узлах расчетной сетки.

Второй метод, который использовался для решения уравнений Навье–Стокса, — метод ε -регуляризации [8]. Семейство разностных схем, основанных на параболической ε -регуляризации уравнения неразрывности, имеет вид

$$BU_t + (U^n \nabla^h) U^n - \frac{1}{\text{Re}} \Delta^h U^{n+1} - \nabla^h P^{n+1} = 0,$$

$$\beta \tau A P_t + \text{div}^h U^{n+1} = 0, \quad \varepsilon = \beta \tau. \quad (3)$$

Конкретная схема рассматриваемого семейства определяется выбором операторов B и A .

Нами использовались следующие операторы:

$$B = E + \frac{\tau^2}{\text{Re}^2} R_1 R_2 + \frac{\tau}{\beta} \nabla^h A^{-1} \text{div}^h,$$

$$A = (E + \omega A_1)(\omega E + \omega A_2),$$

$$-\Delta = R_1 + R_2, \quad \text{div}^h \text{grad}^h = A_1 + A_2.$$

Операторы R_1 , R_2 , A_1 , A_2 обладают следующими свойствами: A_1 , R_1 и A_2 , R_2 — верхнетреугольные и нижнетреугольные, кососимметричные, положительно определенные операторы. При таком выборе операторов A и B требуемое на каждом временном шаге обращение треугольной матрицы осуществляется попеременно-треугольным методом.

Данный метод решения задачи (1) не требует постановки условий для давления на границе области и, кроме того, является чрезвычайно быстрым в смысле количества арифметических операций на каждом шаге по времени.

При постановке задачи задавались следующие граничные условия для скорости: на твердых границах условие прилипания $U = 0$; на всех жидких границах, кроме выходной, $U = \text{const}$; на выходной границе $U^{n+1} = C(U^n - N(U^n, U^n))$, где N — аппроксимация конвективного слагаемого уравнения Навье–Стокса с односторонними производными. Коэффициент C подбирается из условия $\sum_{Dh} \text{div}^h U^{n+1} = 0$, которое является

разностным аналогом условия разрешимости уравнения Навье–Стокса $\int_{\partial \Omega} U n dS = 0$.

Для аппроксимации конвективного члена $(U \nabla) U$ использовались различные схемы, в том числе вторая схема с ориентированными разностями против потока, схема с демпфированием [9], монотонные гибридные схемы [2].

Задача обтекания цилиндра и цилиндра над экраном решалась нами в двумерном приближении. При обтекании цилиндра использовалась расчетная сетка 120×80 узлов, при обтекании цилиндра над экраном 120×60 узлов.

Результаты моделирования обтекания цилиндра при малых и средних числах Рейнольдса мало отличаются от результатов других автором и

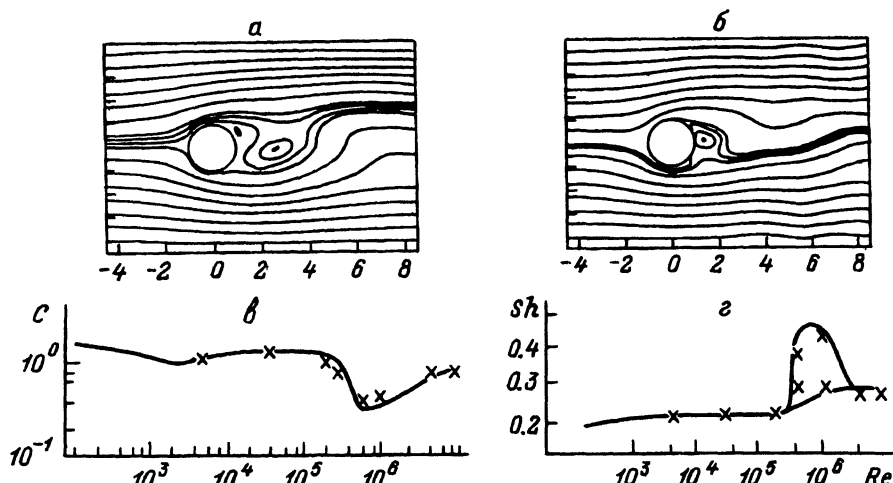


Рис. 1. Мгновенная картина обтекания цилиндра при $Re = 10^{-4}$ (а), $5 \cdot 10^5$ (б), зависимости сопротивления и числа Струхала от числа Рейнольдса (с, д). Крестики — данные расчетов настоящей работы.

содержатся в [10]. Основное внимание уделялось обтеканию при больших числах Рейнольдса. Рассматривалась перестройка структуры течения, изменение сопротивления и спектрального состава пульсаций при числах Рейнольдса $Re \approx 2 \cdot 10^5$, известные как “кризис” сопротивления. При числе Рейнольдса меньше критического за цилиндром образуется нестационарный вихревой след, основная гармоника спектра соответствует числу Струхала $Sh = (f \cdot d)/U_0 = 0.22$, где f — частота, d — диаметр цилиндра, U_0 — скорость набегающего потока, поток отрывается при угле 85° , сопротивление цилиндра и число Струхала постоянны в широком диапазоне докритических чисел Рейнольдса (рис. 1). При критических числах Рейнольдса характер обтекания резко меняется: точка отрыва потока смещается от угла 80 до 110° , как показано на рис. 1; сопротивление цилиндра падает; частота срыва вихрей возрастает. Полученные качественные результаты совпадают с данными экспериментов, количественные характеристики близки к экспериментальным. Отметим, что в области кризиса в спектре пульсаций давления и скоростей два наиболее выделенных пика $Sh = 0.3, 0.45$, а экспериментально полученные разными авторами данные лежат в пределах от 0.28 до 0.6 [2].

Обтекание цилиндра над экраном исследовалось при докритическом для одиночного цилиндра числе Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^5$ в зависимости от величины относительного зазора $0.03 < h < 1$ ($h = H/d$, H — расстояние между цилиндром и экраном, d — диаметр цилиндра). При $h > 0.1$ характер обтекания почти такой же, как в случае одиночного цилиндра. Поток отрывается при угле, меньшим 90° , в спектре доминирует частота Струхала 0.22 , распределение давления близко к докритическому для одиночного цилиндра (рис. 2). При сближении цилиндра с экраном при $h \sim 0.15$ происходит переход течения от докризисного к кризисному, сопровождающемуся смещением точки отрыва (от угла 80 до угла 110°), изменением спектрального состава пульсаций потока (доминирует частота

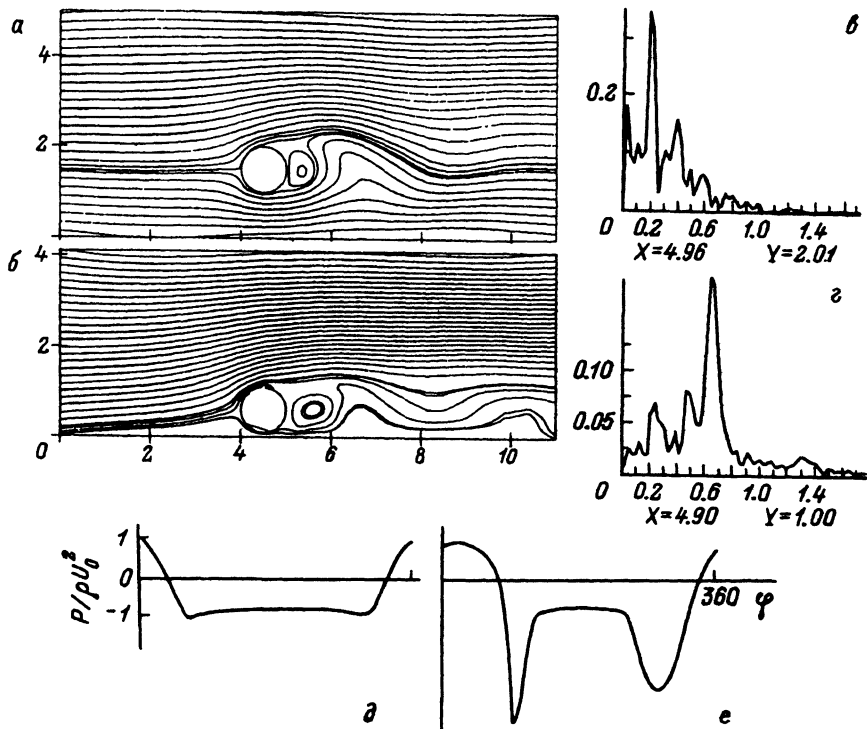


Рис. 2. Мгновенная картина обтекания цилиндра над экраном (а,б), спектры пульсаций скорости (в,г), распределение давления по поверхности цилиндра (д,е) при $Re = 2 \cdot 10^5$ и $h = 1$ (а,в,д), 0,03(б,г,е).

та Струхала 0.65) и изменением распределения давления по поверхности цилиндра (рис. 2). Изменение распределения давления по поверхности является причиной изменения сопротивления — причиной кризиса сопротивления. При численном моделировании зафиксировано образование отрывных пузырей: поток отрывается при угле 80° , вновь присоединяется и отрывается при угле 110° (рис. 2). Полученные данные совпадают с данными экспериментальных работ [5].

Сделаем следующее замечание: получение результатов, приведенных на рис. 1,2, возможно лишь с применением последних достижений математической физики (адаптивные сетки, LDU -разложения, комбинации $ILLU + ICCG$, схемы высокого порядка точности для аппроксимации конвективного слагаемого и т.д.). Точности “более простых методов” решения уравнений Навье–Стокса не хватает для разрешения кризиса сопротивления (по опыту автора), что может быть одной из основных причин формирования точки зрения о непригодности уравнений Навье–Стокса для моделирования течений жидкости при больших числах Рейнольдса.

Таким образом, с помощью численного моделирования на базе решения полных нестационарных уравнений Навье–Стокса был исследован переход к критическому режиму обтекания для обтекания одиночного цилиндра и цилиндра над экраном. Обнаружены перестройка течения,

изменение распределения давления по поверхности цилиндра, кризис сопротивления, изменение спектрального состава пульсаций скорости и давления. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными, что свидетельствует об адекватности математической модели на основе уравнений Навье–Стокса для изучения динамики жидкости реальным течениям жидкости при больших числах Рейнольдса (по крайней мере для рассматриваемых задач).

Автор выражает благодарность А.Г.Соколову и В.О.Писковскому, Кульпиной И.Э., Поповой И.И. за помощь в работе.

Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н. // Изв. АН СССР. 1942. Сер. физ. Т. 6. № 1–2. С. 55–58.
- [2] Гуцин В.А., Коншин В.Н. // Рациональное численное моделирование. М.: Наука, 1990. С. 62–69.
- [3] Kawamura T., Takami H., Kuwahara K.K. // Fluid Dynamics Res. 1988. N 1. P. 145–162.
- [4] Коваленко В.М., Бычков Н.М., Кисель Г.А., Диковская Н.Д. // Изв. СО АН СССР. Сер. техн.наук. 1983. № 13. С. 50–59.
- [5] Эрикссон Л.Д., Реддинг Д.П. // РТК. 1979. Т. 17. № 9. С. 105–106.
- [6] Thompson J.F., Warsi Z.U.A. // J. Comput. Phys. Vol. 47. N 1. P. 1–10.
- [7] Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 550 с.
- [8] Кобельков Г.М. // Вестн. Моск. университета. Вычисл. матем. и кибернетика. М., 1980. С. 15.
- [9] Толстых А.И. // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1981. Т. 21. № 2. С. 254–339.
- [10] Перминов С.М. Препринт ИОФАН. № 29–30. М., 1991. 31 с.

Институт машиноведения
им.А.А.Благонравова
Москва

Поступило в Редакцию
10 октября 1991 г.