

01;09

©1992 г.

ПЕРЕХОДНЫЙ ХАОС В АВТОГЕНЕРАТОРЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С ЖЕСТКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ И ЧЕТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В.В.Рождественский, И.Н.Стручков

Экспериментально исследован переходный хаос (ПХ) в автогенераторе стохастических колебаний с жестким возбуждением и четной нелинейностью. Зависимости среднего времени жизни ПХ $\tau(p)$ описываются либо скейлингом $\tau \simeq \tau_0 |p - p_c|^{-\kappa}$ при $p \rightarrow p_c$ характерными значениями $\kappa \simeq 25 - 35$, либо зависимостью "фрактального тора" $\tau \simeq k_1 \exp\{k_2(p_c - p)^a\}$, ($a = -1/2$) в случае асимметричной нелинейности. В случае симметричной нелинейности экспериментальные кривые $\tau(p)$ описываются зависимостью $\tau(p) = \tau_0 \exp[Ap]$. При этом в рамках модели бескризисного ПХ на основе стохастического анализа уравнения аperiodического осциллятора с запаздыванием получена оценка для среднего времени жизни ПХ, качественно хорошо описывающая экспериментальные зависимости $\tau(p)$.

Введение

Переходный хаос (ПХ) как необходимый атрибут жесткого возникновения (разрушения) динамического хаоса (ДХ) [1] является типичным явлением, которым могут сопровождаться перестройки фазового пространства динамической системы (ДС). При этом в большинстве изученных ДС среднее время жизни ПХ τ связано с параметром регенерации p системы степенной зависимостью (скейлингом) вида [2]

$$\tau(p) \underset{p \rightarrow p_c}{\simeq} \tau_0 |p - p_c|^{-\kappa}, \quad (1)$$

где p_c — критическое значение параметра p , при котором жестким образом рождается странный аттрактор (СА) ДС, κ — критический показатель скейлинга.

ПХ с зависимостью $\tau(p)$ вида (1) наблюдался и исследовался численно для ряда ДС, описывающихся отображениями малой (1,2) размерности [3,4]. Для этих же ДС проведены и теоретические обоснования зависимости (1), указано на связь показателя κ с размерностью СА ДС [2,5,6]. Установлено также, что в ДС с фрактальной границей области притяжения аттрактора возможен ПХ, не подчиняющийся скейлингу (1)

Рис. 1. Блок-схема АПХ.

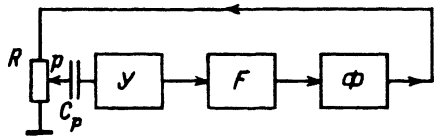
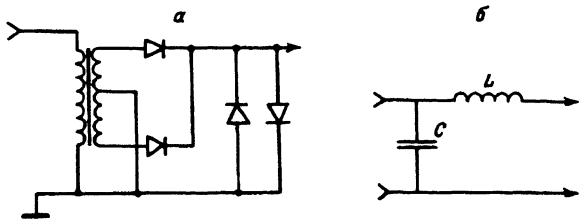


Рис. 2. Принципиальные схемы нелинейности (а) и элементарного звена фильтра (б).



и обладающий значительно более широкой областью существования по параметру p (сверхустойчивый ПХ) [7].

Настоящая работа посвящена экспериментальному исследованию ПХ в радиофизических автогенераторах с большим числом степеней свободы (от 4 до 14) безынерционной нелинейностью, описываемой гладкой функцией, близкой к четной, и обуславливающей жесткий тип возбуждения автогенератора. О генерировании хаотических колебаний в таких автогенераторах сообщалось в [8–11].

1. Экспериментальная установка

Исследованный автогенератор переходного хаоса (АПХ) состоял из трех основных блоков и был собран по блок-схеме, показанной на рис. 1, где $У$ — широкополосный линейный усилитель с параметрами $R_{вх} = 200$ кОм, $R_{вых} = 80$ Ом, $f_{гр} = 6$ МГц, F — безынерционный нелинейный преобразователь сигнала, собранный по схеме, представленной на рис. 2,а; Φ — N — звездный (N могло меняться от 4 до 14) LC — фильтр нижних частот с параметрами $R_0 = 800$ Ом, $f_{гр} = 650$ кГц (схема звена представлена на рис. 2,б); R — прецизионный калиброванный аттенюатор с сопротивлением 800 Ом; C_p — разделительный конденсатор, обрезающий нижние частоты; p — коэффициент деления аттенюатора (параметр регенерации АПХ), $0 < p < 1$. Характеристика нелинейного преобразователя представлена на рис. 3. Она могла быть сделана симметричной (рис. 3,а) или несимметричной (рис. 3,б,в) путем подбора диодов в схеме на рис. 2,а.

Поскольку характеристика нелинейного элемента близка к четной и имеет нулевую производную в нуле, то состояние покоя автогенератора будет устойчивым при любых значениях параметра регенерации p . Если установить малое значение p и возбудить внешним сигналом (например, от генератора импульсов) колебательную систему АПХ, то колебания затухнут за время порядка N/f_v . При увеличении p время пе-

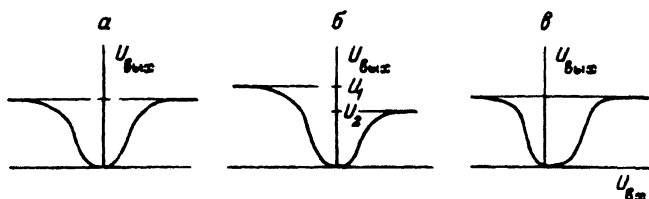


Рис. 3. Передаточные характеристики симметричного (а) и асимметричного (б, в) нелинейных элементов.

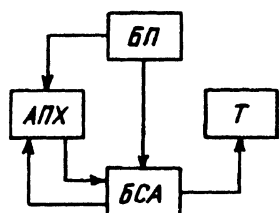


Рис. 4. Блок-схема экспериментального стенда.

переходного процесса растет, а сам он становится похожим на реализацию случайных широкополосных колебаний. Длительность переходного процесса при фиксированных параметрах АПХ не может быть предсказана заранее и ведет себя как случайная величина. Наконец, при определенных значениях p длительность переходных процессов становится равной десяткам минут, так что трудно решить, имеем ли мы дело с переходным процессом или же стохастические колебания не прекратятся никогда.

С целью проведения количественных измерений был собран стенд (рис. 4), в который кроме АПХ вошли блок сервисной автоматики (БСА), цифровой секундомер-счетчик T на базе цифрового частотомера ЧЗ-34А и блок стабилизированных источников питания БП. БСА позволял работать в двух режимах: ручном и автоматическом. В первом генератор запускался пугом прямоугольных импульсов микросекундной длительности. При этом длительность самого пуга составляла порядка 1 мс. Запускающий пуг подавался на одно из звеньев фильтра. В момент прихода последнего импульса запускающего пуга и начала свободного режима колебаний включался цифровой секундомер T , который выключался после самопроизвольного выключения генератора, регистрируя при этом длительность переходного процесса (время генерации).

Влияние каких-либо априори случайных внешних воздействий на систему было сведено практически к нулю двойной стабилизацией питания и экранировкой АПХ, а искусственное добавление внешнего аддитивного шума не меняло качественного поведения системы.

Для определения среднего времени "жизни" τ переходных процессов в БСА был предусмотрен автоматический режим работы, в котором запуск АПХ производился автоматически с небольшой (порядка 5 мс) задержкой после каждого очередного выключения автогенератора. Цифровой секундомер-счетчик T использовался в этом режиме для подсчета числа завершившихся переходных процессов (отдельных генераций). Среднее время жизни τ находилось делением общего времени измерений, регистрируемого по наручным часам, на показание цифрового счетчика.

2. Результаты экспериментального исследования

В результате проведенных исследований были получены массивы времен генерации при различных фиксированных значениях параметра p и $N = 9$ и 11 , а также зависимости среднего времени генерации τ от параметра регенерации p для различных значений N ($N = 4, 5, 8 - 14$), при этом $\tau(p)$ определялось усреднением по $\approx 10^3$ отдельных запусков. Статистическая обработка массивов времен генерации и зависимостей $\tau(p)$ показала следующее.

Оказалось, что при каждом фиксированном p времена генераций t имеют экспоненциальный закон распределения вида

$$\rho(t) = \frac{1}{\tau} \exp \left\{ -\frac{t}{\tau} \right\},$$

$$t > t_{\text{кор}} \quad (2)$$

где $t_{\text{кор}}$ (≈ 0.1 мс) — время корреляции автоколебаний, $\tau = \tau(p) = \langle t \rangle$ — среднее время генерации.

Гистограммы времен генераций с логарифмической шкалой частот событий для $N = 11$ и нескольких p приведены на рис. 5.

Со статистической достоверностью 95% на основе фазочастотного критерия Валлиса и Мура [12] была установлена некоррелированность длительностей последовательных генераций (другими словами, независимость последовательных запусков АПХ), что позволило рассматривать последовательные измерения времен генераций как повторные независимые испытания.

С помощью знакового критерия тренда Кокса и Стюарта [12] было установлено отсутствие временного тренда τ за время получения одной выборки.

Переходные стохастические процессы и собственно ЛХ (когда выключение АПХ не наблюдалось на временных интервалах порядка нескольких часов) имели непрерывный и ограниченный ($f_{\text{гр}} \approx 650 \div 700$ кГц в соответствии с верхней частотой среза ФНЧ) спектр. Неравномерность спектральной интенсивности во всем интервале частот составляла не более 6 дБ.

Зависимости среднего времени жизни ПХ τ от параметра регенерации p имели разные свойства при различной асимметрии нелинейного элемента. Если характеристика нелинейного элемента обладала заметной асимметрией, то время жизни τ зависело от p по формуле (1), причем критический показатель κ имел значения, допускаемые теорией граничного кризиса, изложенной в [5,6]. При симметричной нелинейности (рис. 3,а) экспериментальные кривые $\ln[\tau(p)]$ в отличие от классического скейлинга (1) среднего времени жизни ПХ (в пределах погрешностей измерений и в диапазоне измеренных τ до величины в 30 с и более) оказались линейными функциями параметра p (кривая а на рис. 6) без всяких признаков существования в системе критического значения p_c параметра p

$$\ln[\tau(p)] = C_0 + A \cdot p. \quad (3)$$

Нарушение симметрии нелинейности (как на рис. 3,б,в) вызывало более быстрый, чем в (3), рост $\ln[\tau(p)]$ с увеличением p (кривая б на рис. 6 соответствует $U_1 - U_2 = 0.1 \cdot U_1$ на рис. 3,б).

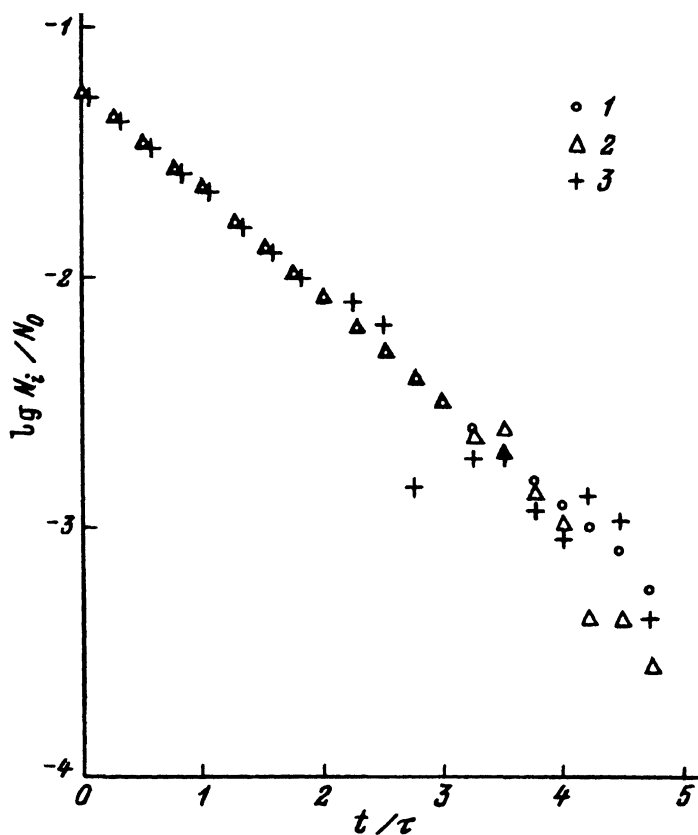


Рис. 5. Нормированные гистограммы относительных времен генераций $t_1(p)/\tau(p)$ в полулогарифмическом масштабе для АПХ ($N = 11$).

$p \cdot 10^3$: 1 — 532, 2 — 563, 3 — 584; τ , мс: 1 — 14.72, 2 — 126, 3 — 1115; объем выборки: 1 — 30 076, 2 — 3927, 3 — 897.

На основе метода наименьших квадратов был проведен регрессионный анализ экспериментальных зависимостей $\ln[\tau(p)]$ (для кривых типа кривой б на рис. 6) для трех регрессионных моделей: параболической

$$\ln[\tau(p)] = C_0 + A \cdot p + B \cdot p^2 + \xi, \quad (4)$$

скейлинговой

$$\ln[\tau(p)] = C_0 - \kappa \cdot \ln[p_c - p] + \xi, \quad (5)$$

“фрактального тора” [7]

$$\ln[\tau(p)] = C_0 + k \cdot (p_c - p)^{1/2} + \xi, \quad (6)$$

ξ — малая шумовая добавка с предполагаемым нормальным распределением.

В приближении параболической модели были получены отрицательные оценки A (при этом B было всегда больше нуля и порядка A), что заставило отказаться от нее как неадекватно описывающей ситуацию. Из

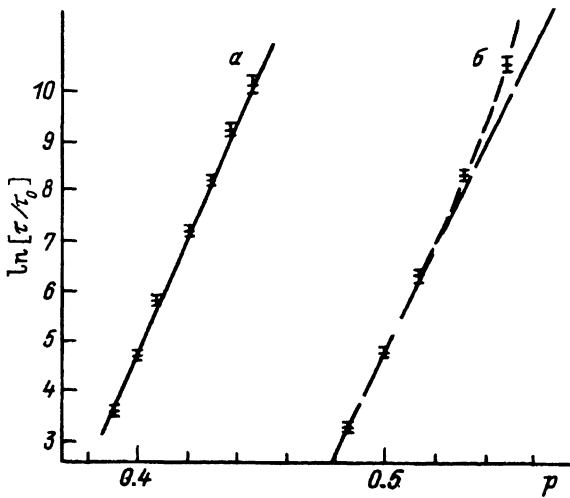


Рис. 6. Экспериментальные зависимости $\ln(\tau(p)/\tau_0)$ ($\tau_0 = 1\text{мс}$) от p для симметричной (а) и асимметричной (б) нелинейностей.

двух же оставшихся моделей (5), (6) ни одну не удалось предпочесть другой: суммы квадратов отклонений для обеих моделей совпадали в пределах погрешностей экспериментальных измерений. Таким образом, ответ на вопрос, имеет ли место для ДС АПХ со слабо асимметричной нелинейностью классический ПХ со скейлингом (1) и большим κ (для экспериментальных зависимостей были получены оценки $\kappa \cong 25 - 35$ для разных N от 4 до 14), либо “сверхустойчивый” ПХ с зависимостью $\ln[\tau(p)]$, как в (6), остается пока открытым.

Качественный вид зависимостей $\ln[\tau(p)]$ при изменении N (числа звеньев фильтра) не изменялся. Количественно увеличение N (от 4 до 14) вызывало увеличение оценок параметров κ , k , p_c , в (5), (6).

3. О возможности бескритического ПХ

Экспериментальные зависимости типа (3) для переходного хаоса в АПХ с симметричной нелинейностью позволяют сделать предположение о существовании бескритического ПХ, когда в ДС не происходит рождения СА, а при любом значении параметра p движение системы является ПХ с чрезвычайно большим временем жизни, т.е. ситуация, подобная описанной в [13, с. 221] для дифференциально-разностного уравнения (ДРУ) вида

$$\nu \cdot \dot{x}(t) + x(t) = f[x(t-1)], \quad \nu > 0. \quad (7)$$

Экспериментально исследованный нами АПХ также можно описать ДРУ типа (7). Действительно, аппроксимировав фильтрующую часть АПХ линией задержки с временем запаздывания $t_3 \simeq (N\pi)/\omega_{\text{гр}}$ и двумя RC -цепями, формирующими нижнюю ($f_{\text{н}} = \tau_{\text{н}}^{-1}$) и верхнюю ($f_{\text{в}} = \tau_{\text{в}}^{-1}$) границы полосы пропускания в частотной области, получим следующее ДРУ:

$$\ddot{x}(t) + \{\Delta + \alpha\}\dot{x}(t) + \alpha\Delta x(t) = K \frac{d}{dt} \{f[x(t-1)]\}, \quad (8)$$

где $K = pA$; $\Delta = t_3/\tau_b \simeq N/2$; $\alpha = t_3/\tau_H$; p — аналог коэффициента усиления АПХ; $f[x]$ — четная функция с “насыщением” (ограниченная при $x \rightarrow \pm\infty$), нулевой первой производной и ненулевыми старшими при $x = 0$, например,

$$f[x] = \frac{B \cdot x^2}{1 + D \cdot x^2}. \quad (9)$$

Заметим, что учет запаздывания в АПХ и переход к дифференциальному уравнению с задержкой типа (8) оправдан не только в случае $N \gg 1$, но также и при $N > 2$, когда время запаздывания t_3 становится равным и превосходит характерный временной масштаб τ_b системы.

Системы с запаздыванием были одними из первых, в которых наблюдались стохастические режимы [14]. В настоящее время стохастические автоколебания в них изучены достаточно подробно [13,15,16], однако исследования по ПХ в таких системах отсутствуют.

Для последующего анализа (8) удобно представить в следующем виде:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = f[x(t-1)] - \{kx(t) + s(t)\}, \quad (10.1)$$

$$\dot{s}(t) = \omega_0^2 \varepsilon x(t), \quad (10.2)$$

где $\varepsilon = K^{-1}$, $k = 2\gamma \cdot \varepsilon$, $2\gamma = \Delta + \alpha$, $\omega_0^2 = \Delta \cdot \alpha$.

Из (10) непосредственно следует, что $(x = 0, s = 0)$ — единственное положение равновесия, устойчивое при любых значениях параметров

$$\langle x \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt = 0,$$

$$s_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle S \rangle = \langle f \rangle > 0,$$

так как в силу (9) $0 \leq f[x] \leq B/D \stackrel{\text{def}}{=} f_{M_0}$. Теперь несложно перейти от (10) к стохастическому дифференциальному уравнению для s

$$\ddot{s}(t) + 2\gamma \cdot \dot{s}(t) + \omega_0^2 \cdot [s(t) - s_0] = \omega_0^2 \cdot \xi(t), \quad (11)$$

где $-s_0 \leq \xi(t) \stackrel{\text{def}}{=} f[x(t-1)] - s_0 \leq f_{M_0} - s_0$, $\langle \xi \rangle = 0$.

При малых ω_0^2 и $\gamma > \omega_0$ (11) описывает медленные малые флуктуации $s(t)$ вблизи уровня s_0 . Интересующее нас явление ПХ предполагает переход $(x; s)$ к устойчивому в малом нулевому положению равновесия, что в терминах (11) сводится к оценке вероятности P_1 попадания $s(t)$ в малую ρ -окрестность $s = 0$ (ρ порядка размеров области притяжения нулевого стационара, т.е. $\rho \simeq \varepsilon$). При этом среднее время жизни ПХ τ можно будет оценить как

$$\tau \simeq \frac{1}{P_1}, \quad P_1 \rightarrow 0. \quad (12)$$

Для уравнения (11) стационарное распределение по s имеет вид [17, с. 106]

$$w_{\text{ст}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{(s - s_0)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (13)$$

$$\sigma^2 = \frac{\omega_0^2 d}{4 \cdot \gamma} \quad \text{и} \quad d = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \xi_\tau \rangle d\tau. \quad (14)$$

В приближении экспоненциального затухания корреляций $\langle \xi \xi_\tau \rangle = K_0 \exp(-q|\tau|)$ с учетом (14) получаем, что $d = (2 \cdot K_0)/q$. Непосредственное численное моделирование (8) показало, что $q \simeq p$ при $p \gg 1$, т.е. с увеличением параметра p (аналога коэффициента усиления АПХ) скорость затухания корреляций возрастает. Из (13) непосредственно находим с учетом (12), что

$$\tau(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\simeq} \tau_0 [\varepsilon w_{\text{ст}}(0)] = C_0 \left\{ \frac{\omega_0^2 p}{\gamma} \right\}^{1/2} \exp \left\{ C_1 \cdot \frac{\gamma}{\omega^2} \cdot s_0^2(p) \cdot p \right\}, \quad (15)$$

где C_0, C_1 — некоторые константы, а $s_0(p)$ — медленно растущая при $p \rightarrow \infty$ и ограниченная ($s(p) \simeq f_{M_0}$ при $p \gg 1$) функция.

Таким образом, (8) в рамках стохастического анализа приводит к длительным переходным процессам, выражение (15) для средней длительности которых качественно хорошо описывает экспериментальные зависимости $\tau(p)$ для АПХ с симметричной нелинейностью. По крайней мере отсутствие видимых принципиальных запретов на реализацию события, когда (при сколь угодно большом p в (8)) $x(t)$ попадет в некоторый момент времени в малую окрестность нулевого положения равновесия и удержится в этой окрестности в течение времени запаздывания (тем самым приведя к окончанию ПХ), делает правдоподобным предположение о бескризисном ПХ в рассмотренном случае. Однако для заключения о существовании ПХ такого типа в рассматриваемой системе АПХ и его модели (8) приведенные результаты стохастического анализа представляются недостаточными, поскольку отражают только “кинематику” движения ДС и не учитывают особенностей ее “динамики”. Конструктивный ответ на вопрос о типе ПХ в системе АПХ и его модельном аналоге (8) (как вопрос о существовании конечного критического значения параметра p_c , при котором в ДС имеет место граничный кризис, либо отсутствии такового) может быть получен только в рамках и с использованием методов теории динамических систем. В частности, возможной причиной бескризисного ПХ может являться наличие в фазовом пространстве раздельной гомоклининой структуры [18,19] (подковы Смейла в соответствующем отображении Пуанкаре [20]).

Заключение

Перечислим основные результаты и выводы настоящей работы.

Разработан и практически реализован автогенератор переходного хаоса с частотным диапазоном до 700 кГц.

В отличие от системы с граничным кризисом, когда время жизни переходного хаоса описывается либо скейлингом $\tau \simeq \tau_0 |p - p_c|^{-\alpha}$ (при $p \rightarrow p_c$), либо зависимостью “фрактального тора” $\tau \simeq k_1 \exp\{k_2(p_c - p)^a\}$ ($a = 1/2$), экспериментальные кривые $\tau(p)$ в случае симметричной нелинейности описываются зависимостями $\tau(p) = \tau_0 \exp[Ap]$. При этом в рамках модели

некритического ПХ на основе стохастического анализа уравнения аперидического осциллятора с запаздыванием получена оценка для среднего времени жизни ПХ, качественно хорошо описывающая экспериментальные зависимости $\tau(p)$.

В случае достаточно сильной асимметрии нелинейности экспериментальные зависимости $\tau(p)$ обнаруживают черты сходства со скейлингом (со значениями критического показателя $\kappa \cong 25 - 35$) и зависимостью $\tau(p)$ в системе "фрактального тора". Регрессионный анализ методом наименьших квадратов не позволил в пределах точности экспериментальных измерений предпочесть какую-либо одну из этих двух типов зависимостей $\tau(p)$ в качестве адекватно описывающей соответствующие экспериментальные.

Авторы благодарны С.М.Рытову и В.С.Анищенко за поддержку настоящей работы, ряд ценных замечаний и конструктивную критику, Н.Г.Заецу за оказанную помощь.

Список литературы

- [1] *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // *Physica D.* 1983. Vol. 7. N 1. P. 181-200.
- [2] *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 57. N 11. P. 1284-1287.
- [3] *Piangiani G., Yorke J.A.* // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1979. Vol. 252. P. 351-366.
- [4] *Coste J.* // *J. Stat. Phys.* 1980. Vol. 23. N 3. P. 521-536.
- [5] *Ликовский А.С., Рождественский В.В.* // *ЖТФ.* 1987. Т. 57. Вып. 1. С. 1401-1403.
- [6] *Стручков И.Н.* // *ЖТФ.* 1990. Т. 60. Вып. 7. С. 8-14.
- [7] *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // *Ergod. Th. & Dynam. Syst.* 1985. Vol. 5. N 3. P. 341-372.
- [8] *Рождественский В.В.* // Заявка на изобретение № 2958993 от 10.07.80. Способ генерирования стохастических колебаний со сплошным спектром.
- [9] *Меренков В.Н., Геллер В.М.* // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1982. Т. 25. № 2. С. 241.
- [10] *Kitano M., Yabuzaki T., Ogawa T.* // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. N 10. P. 713.
- [11] *Рождественский В.В., Стручков И.Н.* // Заявка на изобретение № 4836422/21 (063282). Имитатор пуассоновского потока импульсов (положительное решение экспертизы от 10.04.91)
- [12] *Закс Л.* // *Статистическое оценивание.* (Пер. с нем. М.: Статистика, 1976. 600 с.
- [13] *Шаркоевский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
- [14] *Кислов В.Я., Мясин Е.А., Богданов Е.В.* // Заявка № 964513/19=09 от 31.07.68.
- [15] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я., Спиро А.Г.* // *РиЭ.* 1983. Т. 28. № 12. С. 2430-2439.
- [16] *Кислов В.Я., Залогин Н.Н., Мясин Е.А.* // *РиЭ.* 1979. Т. 24. № 6. С. 1118-1130.
- [17] *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 560 с.
- [18] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 600 с.
- [19] *Шильников Л.П.* // *ДАН СССР.* 1968. Т. 180. № 2.С. 286-289.
- [20] *Палис Ж., ди Мелу В.* // *Геометрическая теория динамических систем.* М.: Мир, 1986. Гл. 4. Пример 4.

Московский физико-технический институт

Поступило в Редакцию
8 июля 1991 г.

В окончательной редакции
10 января 1992 г.