09;10

СТАЦИОНАРНОЕ ДВУХПОТОЧНОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОГО СЛОЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ-ОСЦИЛЛЯТОРОВ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.Л.Братман, А.В.Савилов

Исследована зависимость конфигураций собственных полей и траекторий частиц от значений их скоростей в плоскости симметрии слоя и полной поверхностной плотности слоя. Найдена предельная плотность частиц и установлено наличие критической скорости $\beta_c = 1/\sqrt{2}$, при превышении которой эффекты диамагнетизма доминируют над кулоновским расталкиванием частиц.

Электронные слои с двухпоточным движением частиц встречаются в мазерах на циклотронном резонансе и в ряде приборов магнетронного типа. При формировании и использовании таких слоев важно знать предельную концентрацию электронов, при которой внешнее магнитное поле удерживает частицы от взаимного расталкивания. Этот вопрос неоднократно обсуждался в литературе как для слаборелятивистских, так и для релятивистских энергий частиц (см., например, [1,2]).

В релятивистской ситуации расталкивание электронов частично компенсируется притяжением продольных токов, но в то же время удерживающее действие внешнего магнитного поля может существенно ослабляться диамагнетизмом слоя. В данной работе проведено детальное исследование этих эффектов применительно к плоским симметричным слоям релятивистских электронов, вращающихся в однородном магнитном поле.

Рассмотрим стационарный тонкий слой электронов-осцилляторов, совершающих колебательное движение во внешнем постоянном однородном магнитном поле $H_0\mathbf{z}_0$ (рис. 1,*a*) и собственных стационарных электрическом и магнитном полях. Для простоты считаем, что слой однороден вдоль y- и z-направлений и все электроны движутся по одинаковым траекториям. В каждой точке слоя, кроме его границ, пересекаются траектории двух потоков, совершающих восходящее и нисходящее движения по оси x. На границе слоя, в точке поворота траекторий, электроны переходят из одного потока в другой. В стационарном состоянии концентрации электронов обоих потоков одинаковы в каждой точке и удовлетворяют уравнению непрерывности, так что суммарная концентрация может быть выражена через x-компоненту скорости одного (например, восходящего)

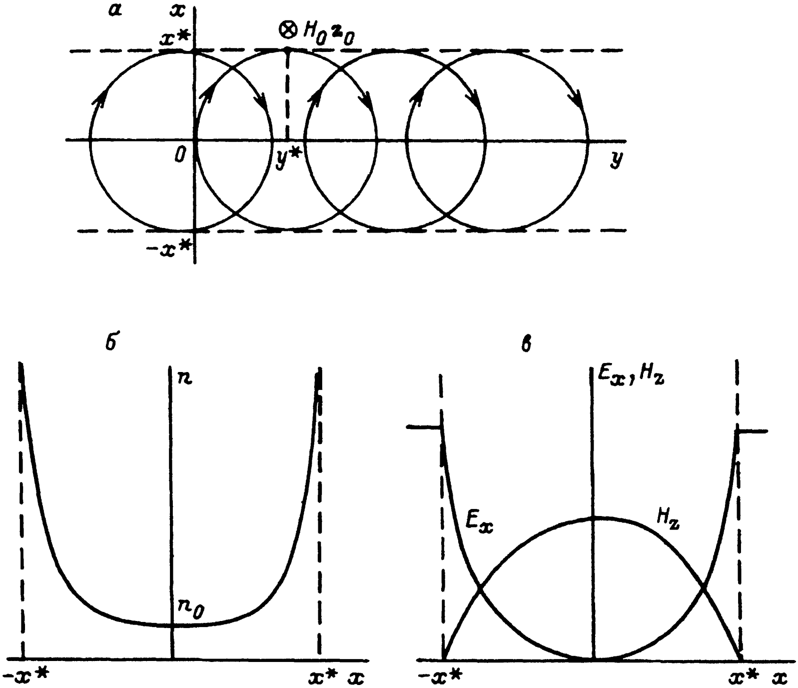

Рис. 1. Стационарное двухпоточное состояние тонкого слоя электронов-осцилляторов во внешнем магнитном поле.

а — траектории частиц при малой концентрации, *б* — распределение электронной концентрации, *в* — распределение собственных электрического и магнитного полей.

потока (рис. 1,*б*)

$$n(x) = n_0 v_0 / v_x(x), \tag{1}$$

где n_0 и v_0 — концентрация и скорость электронов в плоскости симметрии слоя $x = 0$.

Как и в нерелятивистском случае, из уравнения Пуассона электростатическое поле внутри слоя выражается через время $t(x)$ пролета электрона от плоскости симметрии до сечения x (считаем $x > 0$):

$$E_x(x) = -4\pi e n_0 v_0 t(x), \tag{2}$$

где $(-e)$ — заряд электрона.

Вследствие равенства в каждой точке y-компонент скоростей электронов оба потока дают также одинаковый вклад в собственное магнитостатическое поле слоя $H_z(x)$, которое существует лишь внутри слоя и, согласно теореме о циркуляции и уравнению непрерывности, определяется смещением $y(x)$-частицы от ее положения в начальный момент $t = 0$

$$H_z(x) = H_z(0) + 4\pi e n_0 v_0 y(x)/c, \tag{3}$$

где

$$H_z(0) = -4\pi e n_0 v_0 y^* / c \tag{4}$$

— собственное поле в плоскости симметрии, $y^* = y(x^*)$ — смещение частицы в точке поворота $x = x^*$ (рис. 1,*в*).

Зная собственные поля слоя, представим уравнения для импульса **P** и энергии $\mathcal{E}$ электрона в виде:

$$\frac{dp_x}{dt} = 4\pi e^2 n_0 v_0 t - v_y \left(\frac{e}{c} H_s + \frac{4\pi e^2 n_0 v_0}{c^2} y\right),$$

$$\frac{dp_x}{dt} = v_x \left(\frac{e}{c} H_s + \frac{4\pi e^2 n_0 v_0}{c^2} y\right),$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 4\pi e^2 n_0 v_0 v_x t, \tag{5}$$

где $H_s = H_z(0) + H_0$.

Наряду с очевидным условием конечности толщины слоя x^* в стационарном состоянии не обращается в нуль полное магнитное поле в плоскости симметрии H_s (см. Приложение). Считая $H_s > 0$, напишем систему (5) в следующем безразмерном виде:

$$\gamma\xi' = \alpha_s\tau^2/2 - \eta - \alpha_s\beta^2\eta^2/2 + 1,$$

$$(\gamma\eta') = \xi'(1 + \alpha_s\beta^2\eta), \quad \gamma' = \alpha_s\beta^2\xi'\tau, \tag{6}$$

где $\xi = x/r_{Hs}$, $\eta = y/r_{Hs}$, $\tau = t\omega_{Hs}$, $\gamma = [(1 - v_0^2/c^2)/(1 - v^2/c^2)]^{1/2}$, $\omega_{Hs} = eH_s/mc$, $r_{Hs} = v_0/\omega_{Hs}$, $\beta = v_0/c$, $\alpha_s = 4\pi mc^2 n_0/H_s^2$ — отношение плотности энергии электронов к плотности энергии магнитного поля в плоскости симметрии, m — релятивистская масса электрона в этой плоскости, штрихом обозначено дифференцирование по τ.

Начальные условия к системе (6) имеют вид

$$\xi(0) = \eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \gamma(0) = \xi'(0) = 1. \tag{7}$$

В уравнения (6), (7) не входит в явном виде поле H_s, определяемое неизвестной y-координатой точки поворота, что облегчает их исследование.

Из второго и третьего уравнений системы (6) следует интеграл

$$1 + \alpha_s\beta^2\eta = 1/\gamma + \alpha_s\beta^2\tau\eta', \tag{8}$$

рассматривая который совместно с первым уравнением системы (6) в точке поворота, получаем уравнение для времени движения до точки поворота τ^*, имеющее решение при условии

$$\alpha_s \leqslant \frac{1}{2(1 - \beta^2)}. \tag{9}$$

При $\beta \to 0$ отсюда следует известное слаборелятивистское условие существования стационарного состояния. В случае строгого равенства в (9) имеем

$$H_s/H_0 = (1 - \beta^2)/\gamma^*. \tag{10}$$

При этом x-компонента силы, действующей на электрон, на границе слоя обращается в нуль. Однако из решений системы (6), нормированной

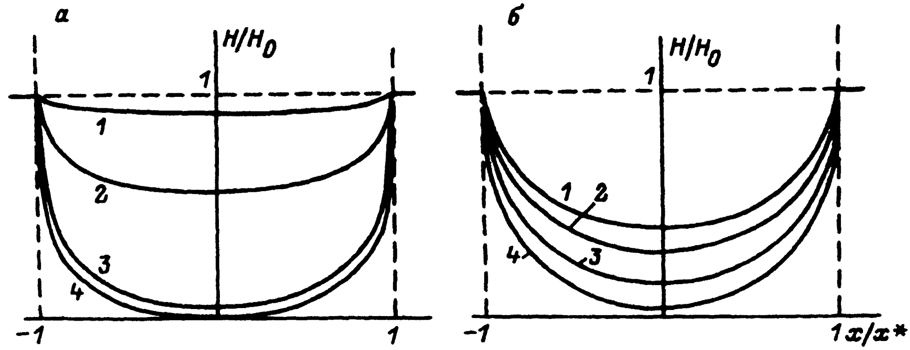

Рис. 2. Эволюция полного магнитного поля внутри слоя.

а — при изменении скоростей частиц в предельных состояниях (докритическая зона); β: *1* — 0.2, *2* — 0.5, *3* — 0.7, *4* — β_c; *б* — при изменении концентрации частиц при приближении к предельному состоянию (закритическая зона); α: *1* — 0.75, *2* — 0.85, *3* — 0.95, *4* — 0.99.

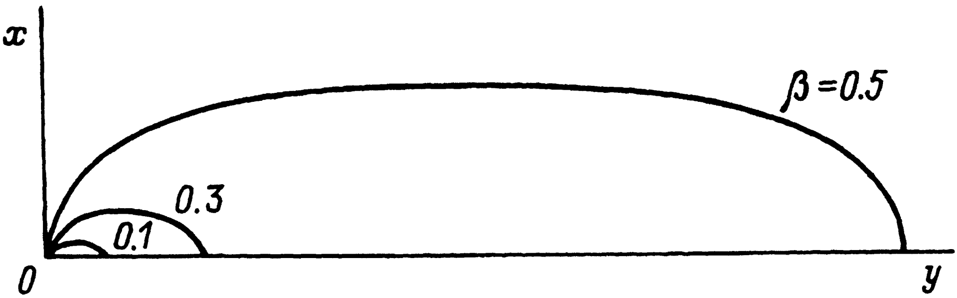

Рис. 3. Траектории частиц в предельных состояниях.

на H_s, следует исключить часть области параметров, где H_s обращается в нуль. Введем параметр

$$\alpha = \frac{4\pi n_0 \Pi_0 c^2}{H_0^2} = \frac{\alpha_s m_0 H_s^2}{m H_0^2}, \tag{11}$$

пропорциональный концентрации и не зависящий от поля H_s и скорости β. Здесь m_0 — масса покоя электрона.

Из вида α ясно, что в предельном случае, определяемом равенством в (9), при стремлении H_s к нулю концентрация n_0 также стремится к нулю. С другой стороны, сила кулоновского расталкивания, действующая на частицу вблизи плоскости симметрии, пропорциональна n_0, а x-компонента силы со стороны магнитного поля пропорциональна H_s^2. Следовательно, при стремлении H_s к нулю исчезает линейный по времени член x-компоненты силы вблизи плоскости $x = 0$. Из первого уравнения системы (6) в линейном приближении по малому τ имеем $(\gamma\xi')' = (1-\alpha_s)\tau$, откуда видно, что H_s стремится к нулю при $\alpha_s \to 1$. Окончательно получаем, что в стационарном состоянии

$$\alpha_s \leqslant \frac{1}{2(1-\beta^2)}; \quad \beta < \beta_c, \quad \alpha_s < 1; \quad \beta > \beta_c, \tag{12}$$

где $\beta_c = 1/\sqrt{2}$.

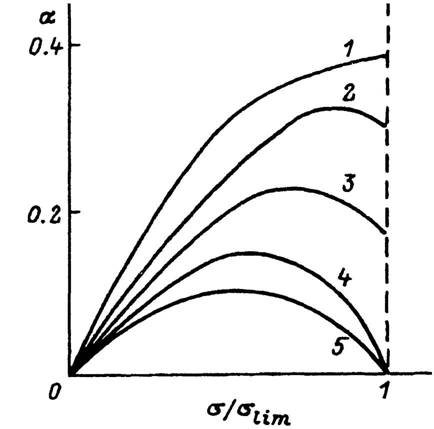

Рис. 4. Зависимость концентрации электронов в плоскости симметрии от полной поверхностной плотности слоя.
β: *1* — 0.2, *2* — 0.3, *3* — 0.5, *4* — β_c, *5* — 0.8.

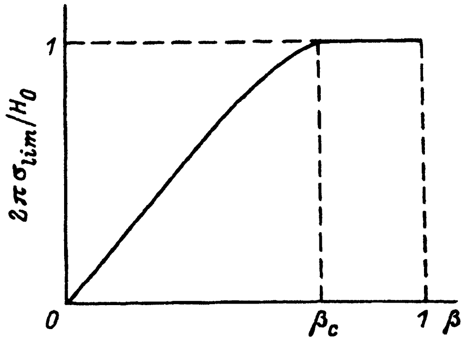

Рис. 5. Предельная поверхностная плотность слоя в зависимости от скорости частиц.

Если в докритической зоне ($\beta < \beta_c$) основную роль в ограничении электронной плотности слоя играет кулоновское расталкивание, то в закритической ($\beta > \beta_c$) предельное стационарное состояние определяется прежде всего диамагнетизмом системы. В этой зоне токи в слое настолько велики, что создаваемое ими магнитное поле в плоскости симметрии в предельном случае почти полностью компенсирует внешнее поле H_0 (рис. 2). Сильный диамагнетизм существенным образом влияет на форму траекторий частиц. Действительно, при слабом результирующем магнитном поле вблизи плоскости симметрии электроны быстро преодолевают середину слоя и заворачиваются вблизи его границ. В результате траектории сильно вытягиваются вдоль оси y (рис. 3) и основную часть периода обращения частицы проводят вблизи границ слоя. Таким образом, из-за диамагнетизма происходит вытеснение электронов на края слоя, а в закритической зоне в предельном состоянии концентрация n_0 стремится к нулю (рис. 4). Следовательно, более информативной характеристикой заполненности слоя является не объемная концентрация в плоскости симметрии n_0, а полная поверхностная плотность заряда слоя α. Поскольку в предельном состоянии x-компонента силы на границе слоя равна нулю, то

$$\frac{2\pi\sigma_{\text{lim}}}{H_0} = \frac{v^*_{\text{lim}}}{c}, \tag{13}$$

где σ_{lim} и v^*_{lim} — поверхностная плотность заряда слоя и скорость частиц на его границе в предельном случае.

В докритической зоне, как показали численные расчеты (рис. 5), справедлива приближенная формула

$$\frac{v^*_{\text{lim}}}{c} \simeq \frac{\beta}{\beta_c}, \tag{14}$$

а в закритической зоне, как видно из (10), $v^*_{\text{lim}} = c$, что еще раз свидетельствует о недостижимости предельного состояния в этой зоне. Таким образом, для предельной поверхностной плотности слоя имеем

$$\sigma_{\lim} = \frac{H_0}{2\pi} \begin{cases} \beta/\beta_c, & \beta \leqslant \beta_c, \\ 1, & \beta > \beta_c. \end{cases} \tag{15}$$

Если электроны-осцилляторы имеют наряду с вращательной также и поступательную скорость $c\beta_z$, то эффекты кулоновского расталкивания и диамагнетизма отчасти компенсируются притяжением параллельных продольных токов. Это явление легко может быть описано соотношениями, аналогичными полученным выше, путем перехода в сопутствующую систему координат. Так, выражение для плотности слоя получается из (15) в результате следующей замены:

$$H_0 \to \frac{H_0}{\sqrt{1-\beta_z^2}}, \quad \beta_c \to \beta_c\sqrt{1-\beta_z^2}.$$

Сходным образом задача о стационарных двухпоточных состояниях в скрещенных электрическом E_0 и магнитном H_0 полях сводится к рассмотренной выше задаче путем перехода в сопутствующую центрам дрейфа электронов систему координат, движущуюся со скоростью $\beta_{\rm dr} = E_0/H_0$. В этом случае в (15) следует произвести замену

$$\beta_c \to \beta_c\sqrt{1-\beta_{\rm dr}^2}.$$

Авторы благодарны В.Е.Белову и В.Е.Нечаеву за полезные обсуждения результатов работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Если предположить, что поле в плоскости симметрии $H_s = 0$, то из второго и третьего уравнений этой системы (5) следует

$$c^2 t\frac{dp_y}{dt} = y\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

или

$$\frac{d(\mathcal{E}v_y t)}{dt} = \mathcal{E}v_y + y\frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Из этого соотношения получаем интеграл $v_y t = y$, которому при начальном условии $y(0) = 0$ удовлетворяет единственное решение $y(t) = 0$. Но тогда $y^* = 0$ и, как следует из (4), $H_s = H_0$, что противоречит первоначальному предположению. Итак, не существует решения системы (5), при котором полное магнитное поле в плоскости симметрии обращалось бы в нуль.

Список литературы

[1] *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973.

[2] *Горшкова М.А., Нечаев В.Е.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. № 7. С. 833–837.

Институт оприкладной физики
Нижний Новгород

Поступило в Редакцию
18 декабря 1991 г.