КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

01;10 *Журнал технической физики, т. 62, в. 10, 1992*

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СТРУКТУРОЙ

К.А.Решетникова

Известно, что при черенковском взаимодействии заряженного пучка с электродинамической системой коэффициент полезного действия η, определяющий эффективность преобразования энергии направленного движения пучка в энергию излучения, зависит от тока пучка J как $J^{1/3}$ при одночастичном эффекте Черенкова и $\eta \sim J^{1/2}$ при коллективном эффекте [1] . Эти зависимости получены из условия захвата частиц полем волны излучения при нерелятивистском характере движения частиц пучка в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны. Численные расчеты, приведенные в том же обзоре, между тем показывают, что максимальный КПД достигается, когда невозмущенная скорость пучка в системе покоя волны выбрана релятивистской. Заметим, что при этом зависимость поля от координаты и времени из-за нелинейных эффектов может существенно отличаться от гармонической [2]. Поэтому представляется актуальным определение максимального КПД η_m аналитическим способом при снятии вышеуказанного ограничения.

В настоящей работе на основе самосогласованной системы уравнений гидродинамики для замагниченного пучка находится η_m и определяется оптимальная скорость пучка в системе покоя волны для двух типов черенковского взаимодействия частиц с электродинамической структурой.

Исходными являются уравнения для потенциалов поля

$$\Box \mathbf{A}_z = -\frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_e - \mathbf{j}_0), \quad \Box\Phi = -4\pi(\rho_e - \rho_0), \tag{1}$$

где

$$\Box = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \Delta_\perp, \quad \Delta_\perp = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\mathbf{j}_e \equiv \mathbf{j}_z = \rho_e \mathbf{v}_e, \quad \mathbf{j}_0 = \rho_0 \mathbf{v}_0, \quad \rho_0 = en_0, \quad \rho_e = en_e,$$

n_0, v_0 — значения плотности и скорости пучка при $A_z = \Phi = 0$.

Переходим к переменной $\Psi = -\omega t + k_\parallel z$ и вводим функцию

$$\varphi = \frac{e\gamma}{m_0 c^2}(\Phi - \beta A_z), \tag{2}$$

где ω, $k_\parallel$ — частота и волновой вектор волны, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, v — фазовая скорость волны.

Тогда из (1) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Psi^2} + \frac{1}{k_{\perp_0}^2}\Delta_\perp\varphi = -q_0(n_e' - n_0'), \tag{3}$$

где

$$k_{\perp_0}^2 = \frac{\omega^2}{v^2\gamma^2}, \quad q_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{\beta^2\gamma^2}{n_0}, \quad \omega_e^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_0},$$

$n_e' = n_e\gamma(1 - \beta\beta_e)$ — плотность электронов в системе покоя волны, $n_0' = n_0\gamma(1 - \beta\beta_0)$ — то же при $\varphi = 0$, $\beta_0 = v_0/c$.

Величина φ связана с напряженностью поля E_z следующим соотношением:

$$E_z = -\frac{m_0c^2\omega}{ev\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial\Psi}. \tag{4}$$

Обозначив индексом s экстремальное значение $E_z = E_s$ или $\dot\varphi_s = (\partial\varphi/\partial\Psi)_s$, выражение для КПД запишем в виде

$$\eta = \frac{E_s^2}{8\pi m_0c^2n_0(\gamma_0 - 1)} = \frac{\dot\varphi_s^2}{2\gamma_0(\gamma_0 - 1)q}, \tag{5}$$

где

$$q = \frac{\omega_e^2}{\omega^2}\frac{p^2}{\gamma_0}, \quad p = \beta\gamma.$$

Связь величин n_e' с φ найдем из интегралов уравнений движения и непрерывности

$$\gamma_e' + \varphi = \gamma_0', \qquad n_e'\beta_e' = n_0'\beta_0', \tag{6}$$

где $\gamma_e' = \gamma_e\gamma(1 - \beta_e\beta)$, $\gamma_0' = \gamma_0\gamma(1 - \beta_0\beta)$,

$$\beta_e' = \frac{\beta_e - \beta}{1 - \beta_e\beta}, \quad \beta_0' = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0\beta}.$$

В области пучка $\varphi \sim I_0(k_\perp r)$, где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя, тогда из (3) имеем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Psi^2} + \frac{k_\perp^2}{k_{\perp 0}^2}\varphi = -q\gamma_0'\left(\frac{\beta_0'}{\beta_0'} - 1\right). \tag{7}$$

Здесь

$$\beta_e' = \frac{\sqrt{(\gamma_0' - \varphi)^2 - 1}}{(\gamma_0' - \varphi)}.$$

При $\varphi \ll (\gamma_0' - 1)$ уравнение (7) будет линейным; из него следует

$$\frac{k_\perp^2}{k_{\perp 0}^2} + S = 1, \tag{8}$$

где

$$S = \frac{\omega_e^2}{(\omega - k_\| v_0)^2 \gamma_0^3} = \frac{q}{p_0'^2}, \quad p_0' = \beta_0' \gamma_0'.$$

В этом случае φ — гармоническая функция Ψ и $\dot{\varphi}_s = \varphi_s$. В общем случае связь производной $\dot{\varphi}$ с потенциалом φ находится из интеграла уравнения (7)

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{k_\perp^2}{k_{\perp 0}^2}\varphi^2 = 2qp_0'(p_e' = p_0') + 2q\gamma_0'\varphi + \dot{\varphi}_s^2, \tag{9}$$

где $\dot{\varphi} = \partial\varphi/\partial\Psi, p_e' = \mp\sqrt{(\gamma_0' - \varphi)^2 - 1}$, знак + относится к медленной волне, знак − — к быстрой.

Используем тождество

$$p_e' = \mp\left(\frac{\gamma_e}{p} - \frac{\gamma_e'}{\beta}\right). \tag{10}$$

Тогда для полей, далеких от насыщения, когда $\bar{\varphi} = 0$, получим после усреднения

$$\dot{\varphi}_s^2 = \frac{4|p_0'| \cdot p_0'^2}{p}(\gamma_0 - \bar{\gamma}_e), \tag{11}$$

где $|p_0'|$ — абсолютная величина p_0'.

При $\varphi \ll (\gamma_0' - 1)$ из (10) найдем

$$\gamma_e = \gamma_0 - \frac{p_0}{p_0'}\varphi - \frac{p}{2p_0'^3}\varphi^2 = - \ldots. \tag{12}$$

Следовательно, $(\gamma_0 - \bar{\gamma}_e) > 0$ и $\eta > 0$ для медленной волны $(p_0' > 0)$ и $(\gamma_0 - \bar{\gamma}_e) < 0$, $\eta < 0$ для быстрой $(p_0' < 0)$.

Для полей, близких к полю насыщения, когда возрастает роль нелинейных эффектов в соотношении (9), положим $\varphi = \varphi_s$, тогда $\dot{\varphi} = 0$. При захвате $p_0' = 0$, $\varphi_s = \gamma_0' - 1$. В результате получим

$$\dot{\varphi}_s^2 = (1 - S) \cdot \varphi_s^2 + 2q(\gamma_0' - 1). \tag{13}$$

Из (5) и (13) найдем (для медленной волны)

$$\eta = \frac{(\gamma_0' - 1)^2}{2\gamma_0(\gamma_0 - 1)p_0'^2}\left[\frac{(1 - S}{|S|} + 2(\gamma_0' + 1)\right]. \tag{14}$$

Как видно из (14) КПД зависит от параметров γ_0' и S, связь между которыми определяется видом неустойчивости. Рассмотрим для медленной волны некоторые частные случаи. Для одночастичного эффекта Черенкова имеем

$$\omega - k_\| v_0 = -\frac{\delta\omega}{\alpha}, \qquad p_0' = \frac{p\gamma_0}{\alpha}\left|\frac{\delta\omega}{\omega}\right|, \tag{15}$$

где α — численный коэффициент,

$$p_0' = (\beta_0 - \beta)\gamma\gamma_0 = \sqrt{\gamma_0^2 - 1}, \quad p = \beta\gamma.$$

В замедляющей системе (волновод) можно выбирать такие условия, что

$$\frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp 0}^2} = 1 + \frac{\delta\omega}{\omega\alpha^2}, \quad |S| = \frac{p_0'}{\alpha p \gamma_0}, \tag{16}$$

при этом $\frac{(\delta\omega)}{\omega \ll 1}$.

В этом случае из (14) получим

$$\eta = \frac{\alpha p}{2p_0'} \frac{(\gamma_0' - 1)(1+\mu)}{(\gamma_0' + 1)(\gamma_0 - 1)}, \tag{17}$$

где $\mu = (2\gamma_0' + 3) \cdot |S|$.

При $\gamma_0' = 1 + (p_0'^2/2)$ и $\mu \ll 1$ имеем известный результат, когда $\eta \sim J^{1/3}$,

$$\eta = \frac{p^2\gamma_0}{8(\gamma_0 - 1)} \left|\frac{\delta\omega}{\omega}\right|. \tag{18}$$

Рассмотрим в (17) величину η как функцию p_0', учитывая, что $\gamma_0 = \gamma_0'\gamma + p_0' p$, где p, γ — постоянные. Тогда условие максимума η будет

$$p_0' p_0 = (2 - \gamma_0')(\gamma_0 - 1)(1 + \Delta), \tag{19}$$

где

$$\Delta = \frac{\mu\gamma_0'}{(1+\mu)(2-\gamma_0')} \left[1 - \beta_0\beta_0' + \frac{2\beta_0' \cdot p_0'}{(2\gamma_0' + 3)}\right].$$

При этом $\partial^2\eta/\partial p_0'^2 < 0$.

Используем тождество

$$\frac{p_0}{p} = \frac{\beta_0'}{\beta} + \gamma_0'. \tag{20}$$

Учитывая (19), из (17) найдем

$$\eta_m = \frac{\alpha}{2}\frac{p}{p_0}\frac{(2-\gamma_0')(1+\mu)(1+\Delta)}{(\gamma_0'+1)^2}. \tag{21}$$

Для релятивистского пучка, когда

$$\vartheta = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} \simeq 1$$

и $\mu \ll 1$, оптимальные параметры будут следующие: $p_0' = 0.75$, $\gamma_0' = 1.25$, $p_0 = 2p$, что согласуется с результатами численного счета для η как функции p_0' [1]. При этом для $\alpha = \sqrt{3}$, $\gamma_0 = 6$ из (21) получим $\eta_m = 0.1$ ($\mu = 0.2$, $\Delta = 0.16$). С уменьшением величины ϑ коэффициенты μ и Δ растут.

Таким образом, если неустойчивость носит одночастичный характер, то, определяя из соотношения (19) связь невозмущенной скорости пучка с фазовой скоростью волны (или наоборот), можно найти для конкретной структуры наиболее оптимальные условия для генерации.

Рассмотрим коллективный эффект Черенкова, когда для спектра пучковых медленных волн имеем

$$\omega - k_{\|}v_0 = -\Omega_e - \delta\omega, \tag{22}$$

где $\Omega_e = \omega_e/\gamma_0^{3/2}$.

В этом случае

$$p_0' = p\gamma_0\frac{\Omega_e}{\omega}\left(1 + \frac{\delta\omega}{\Omega_e}\right) \quad \text{и} \quad S \simeq 1. \tag{23}$$

Из (14) получим

$$\eta = \frac{\gamma_0' - 1}{\gamma_0(\gamma_0 - 1)}. \tag{24}$$

При $\gamma_0' \sim p_0'$ и $(\delta\omega)/\Omega_e \ll 1$ имеем результат, совпадающий с работой [3],

$$\eta = \frac{p}{(\gamma_0 - 1)}\frac{\Omega_e}{\omega}, \tag{25}$$

т.е. $\eta \sim J^{1/2}$.

Из (24) нетрудно получить и другие частные случаи [1]. Условия максимума η, найденные из соотношения (24), можно записать в виде

$$(\gamma_0' - 1) = \frac{p_0'\gamma_0(\gamma_0 - 1)}{p_0(2\gamma_0 - 1)},$$

$$p_0' > \frac{p(2\gamma_0 - 1)}{2p_0^2}. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (24), получим

$$\eta_m = \frac{p_0'}{p_0(2\gamma_0 - 1)} \tag{27}$$

При условии $\vartheta \simeq 1$ ($\gamma_0 \gg 1$) оптимальные значения параметров следующие: $\gamma_0' = 1.67$, $p_0' = 1.33$, $\gamma_0 = 3\gamma$, при этом $\eta_m \simeq 0.7/\gamma_0^2$. При уменьшении ϑ величина η_m растет. Например, при $\gamma_0 = 2$, $p_0 = 1.7$, $\vartheta = 0.33$ имеем $(\gamma_0')_{\text{опт}} = 1.35$, $(p_0')_{\text{опт}} = 0.91$ и $\eta_m = 0.18$.

Итак, полученные соотношения (13) и (14) позволяют рассмотреть в рамках гидродинамического приближения без ограничения на величину p_0' не только предельные случаи слаботочного и сильноточного пучков, но и переходную область. Кроме того, дают основания для выбора оптимальных параметров системы с целью получения максимального КПД.

Список литературы

[1] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* // УФН. 1987. Т. 52. № 2. С. 285–316.

[2] *Бонч-Осмоловский А.Г., Решетникова К.А.* // Краткие сообщения ОИЯИ. Дубна, 1991. № 1 (47). С. 35–47.

[3] *Sprangle P.Drobot A.* // J. Appl. Phys. 1979. Vol. 50. P. 2652–2660.

Поступило в Редакцию
27 февраля 1990 г.
В окончательной редакции
21 апреля 1992 г.