1992 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 62, в. 11
1992 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 62, N 11

01;03

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ КАПЛИ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

С.О.Ширяева, А.И.Григорьев

Найдены критические условия реализации электрогидродинамической параметрической неустойчивости проводящей вязкой капли в периодическом электрическом поле точечного источника. Показано, что возможность параметрического возбуждения высоких мод капиллярных волн на кратных частотах пренебрежимо мала и при рассмотрении закономерностей реализации электрогидродинамической неустойчивости капель в резко неоднородных полях ее можно не учитывать.

Введение

Задача расчета критических условий неустойчивости заряженной электропроводной капли во внешнем неоднородном периодическом электрическом поле представляет интерес в связи с приложениями к проблемам формирования ионно-кластерно-капельных пучков в масс-спектрометрах и жидкометаллических источниках ионов [1,2], микро- и макроразделения зарядов в грозовых облаках и формирование канала разряда линейной молнии [3,4], создания управляемых внешними электрическими полями потоков заряженных монодисперсных капель для подпитки жидким водородом установок для термоядерного синтеза и ускорителей макрочастиц [5,6]. Обсуждаемая задача может быть полезной и для анализа физической природы такого пока непонятного явления, как шаровая молния: согласно результатам статистического анализа, ≈ 5000 описаний данного явления примерно в $\approx 5\%$ наблюдений отмечается выброс шаровой молнией струй вещества в направлении электро-, радиорозеток [7], что может свидетельствовать о развитии электрогидродинамической неустойчивости в веществе шаровой молнии [8–10] в неоднородном поле источника, который по сравнению с размерами шаровой молнии и расстоянием до нее можно считать точечным.

1. Будем решать методом скаляризации, изложенным в [10], задачу об устойчивости капиллярных волн на поверхности сферической (радиуса

R) капли электропроводной вязкой жидкости, имеющей заряд Q, находящийся во внешнем электрическом поле точечного источника поля, потенциал которого периодически меняется во времени.

Пусть ρ, σ, ν — плотность, коэффициент поверхностного натяжения и кинематическая вязкость жидкости, которую будем считать несжимаемой. В сферической системе координат с началом в центре капли уравнение поверхности капли, возмущенной волновым капиллярным движением, запишем в виде

$$r = R + \xi(\theta, \varphi, t); \quad |\xi| \ll R. \tag{1.1}$$

Система уравнений, описывающих эволюцию капиллярных волн в капле, состоит из основных уравнений гидродинамики, линеаризированных в окрестности невозмущенной поверхности капли, уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U}, \tag{1.2}$$

уравнения непрерывности

$$\nabla\mathbf{U} = 0 \tag{1.3}$$

и граничных условий: кинематического

$$r = R: \qquad U_r = \frac{\partial\xi}{\partial t} \tag{1.4}$$

и динамических

$$r = R: \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}U_\theta = 0,$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}U_\varphi = 0,$$

$$P - 2\rho\nu\frac{\partial U_r}{r} = P_\sigma - P_E. \tag{1.5}$$

Здесь $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ и $P(\mathbf{r})$ — поля скоростей и гидродинамического давления в жидкости; P_E — давление электрических сил; P_σ — лапласовское давление, имеющее вид

$$P_\sigma = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2}(2 + \hat{L})\xi, \tag{1.6}$$

где $\hat{L}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Для удобства перейдем к безразмерным переменным, приняв $R = 1$, $\rho = 1$, $\sigma = 1$. Тогда в дальнейшем все величины будут выражены через следующие характерные масштабы:

$$r_* = R; \quad t_* = \left(\frac{R^3\rho}{\sigma}\right)^{1/2}; \quad U_* = \left(\frac{\sigma}{R\rho}\right)^{1/2}; \quad P_* = \frac{\sigma}{R};$$

$$\nu_* = \left(\frac{R\sigma}{\rho}\right)^{1/2}; \quad Q_* = \left(R^3\sigma\right)^{1/2}; \quad \Phi_* = (\sigma R)^{1/2}.$$

Проведем скаляризацию выписанной краевой задачи методом, описанным в [10], представляя векторное поле $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ в виде линейной комбинации трех взаимно перпендикулярных векторных полей

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \nabla\Psi_1(\mathbf{r}) + (\nabla\times\mathbf{r})\Psi_2(\mathbf{r}) + \nabla\times(\nabla\times\mathbf{r})\Psi_3(\mathbf{r}), \tag{1.7}$$

где $\Psi_j(\mathbf{r})$ — скалярные функции, подлежащие определению.

В результате исходная система уравнений (1.2)–(1.5) преобразуется в систему скалярных уравнений для функций $\Psi_j(\mathbf{r})$

$$\Delta\Psi_j = (1-\delta_{1j})\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi_j}{\partial t},$$

$$P = -\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} \tag{1.8}$$

с граничными условиями

$$r=1: \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r}\hat{L}\Psi_3 = \frac{\partial\xi}{\partial t}, \tag{1.9}$$

$$2r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_1}{r} + r\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r}(2+\hat{L})\Psi_3 = 0, \tag{1.10}$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_2}{r} = 0, \tag{1.11}$$

$$-P + 2\nu\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2} - 2\nu\hat{L}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_3}{r} + P_\sigma - P_E = 0. \tag{1.12}$$

В силу того что функция Ψ_2 не оказывает влияния на колебания поверхности (задача ее отыскания не зависит от $(\Psi_1,\ \Psi_3,\ \xi)$), ее можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

2. Применим к системе уравнений (1.8)–(1.10), (1.12) интегральное преобразование по времени, позволяющее освободиться от производных по времени, сводя их к операции умножения на переменную интегрального преобразования S. Конкретный вид интегрального преобразования зависит от начальных условий и для дальнейшего анализа несуществен. Сохраняя за изображениями прежние обозначения, получим в пространстве изображений систему уравнений

$$\Delta\Psi_1 = 0; \quad \Delta\Psi_3 - \frac{S}{\nu}\Psi_3 = 0, \tag{2.1}$$

$$r=1: \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r}\hat{L}\Psi_3 = S\xi(S,\theta,\varphi), \tag{2.2}$$

$$2r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_1}{r} + r\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r}(2+\hat{L})\Psi_3 = 0, \tag{2.3}$$

$$S\Psi_1 + 2\nu\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2} - 2\nu\hat{L}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_3}{r} + P_\sigma - P_E = 0. \tag{2.4}$$

Решения уравнений (2.1) внутри капли имеют вид

$$\Psi_1 = \sum_{n,m} C^4_{nm}(S) r^n Y_n^m(\theta,\varphi),$$

$$\Psi_3 = \sum_{n,m} C^3_{nm}(S) \frac{i_n(kr)}{i_n(k)} Y_n^m(\theta,\varphi), \tag{2.5}$$

где $k = S^{1/2} \cdot \nu^{-1/2}$; $Y_n^m(\theta,\varphi)$ — сферические функции; $i_m(k)$ — модифицированные сферические функции Бесселя.

Возмущение сферической формы поверхности капли, вызванное волновым движением в ней $\xi(S,\theta,\varphi)$, также представим в виде ряда по сферическим функциям

$$\xi = \sum_{n,m} Z_{nm}(S) \cdot Y_n^m(\theta,\varphi). \tag{2.6}$$

С учетом (2.6) выражение для лапласовского давления преобразуется

$$P_0 = \sum_{n,m} (n-1)(n+2) Z_{nm}(S) Y_n^m(\theta,\varphi), \tag{2.7}$$

Подставляя разложения (2.5)–(2.7) в граничные условия (2.2)–(2.4), получим уравнение для амплитуд $Z_{nm}(S)$

$$\sum_{n,m} \frac{1}{n} \left[S^2 + 2(n-1) \frac{(2n+1) - n(n+2) f_m(k)}{1 - f_n(k)} \nu S + \right.$$

$$\left. + n(n-1)(n+2) \right] Z_{nm}(S) Y_n^m(\theta,\varphi) = P_E, \tag{2.8}$$

где

$$f_m(k) = \frac{2}{k} \frac{i_{n+1}(k)}{i_n(k)}.$$

Заметим, что для капель большинства жидкостей с размерами, превышающими единицы микрон, параметр безразмерной вязкости $\nu \ll 1$. Поэтому в целях упрощения анализа в уравнении (2.8) будем использовать асимптотическое выражение для модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента (так как аргумент i_n при $\nu \to 0$ неограниченно увеличивается)

$$k \to \infty : \quad i_n(k) \to \frac{e^k}{2k} \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right].$$

С учетом этого операция выполнения обратного интегрального преобразования для уравнения (2.8) значительно облегчается. В результате уравнение, описывающее эволюцию со временем возмущения поверхности капли ξ, запишется в виде

$$\sum_{n,m}\frac{1}{n}\left(\frac{d^2Z_{nm}(t)}{dt^2}+2(n-1)(2n+1)\nu\frac{dZ_{nm}(t)}{dt}+\right.$$

$$\left.+n(n-1)(n+2)Z_{nm}(t)\right)Y_n^m(\theta,\varphi)=P_E. \tag{2.9}$$

Влияние электрического поля на возмущение ξ реализуется через давление P_E.

3. В работе [11] было показано, что в зависимости от частоты периодического внешнего воздействия могут реализовываться различные механизмы возбуждения колебательных движений поверхности капли, находящейся во внешнем переменном во времени электрическом поле, а именно вынужденные и параметрические колебания. С точки зрения исследования неустойчивости капли вынужденные колебания ее поверхности не представляют интереса, так как могут привести к неустойчивости лишь при нулевой вязкости (т.е. для идеальной жидкости) и при точном совпадении частоты внешнего воздействия с одной из собственных частот капиллярных колебаний капли (см., например, [11]). Поэтому в дальнейшем остановимся на рассмотрении только параметрических колебаний. Следует отметить, что эффект возбуждения высоких мод капиллярных колебаний капли в неоднородном периодическом внешнем электрическом поле, обнаруженный в [12], может быть объяснен именно ее вынужденными вязкими колебаниями. Разделить эти два вида колебаний несложно. Очевидно, что оба они вызваны действием внешнего переменного во времени электрического поля на поверхность капли, но возможность возбуждения вынужденных колебаний обусловлена наличием в выражении для давления электрического поля P_E слагаемого, не зависящего от возмущения сферической формы поверхности $\xi(\theta,t)$, в то время как за параметрические колебания ответственны линейные по возмущению ξ слагаемые в давлении P_E [11], именно эти слагаемые и будут учтены в дальнейшем.

Выражение для линейной по ξ компоненты давления электрического поля P_E на поверхность капли проводящей жидкости имеет вид [10,11]

$$r=1:\quad P_E=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\xi+\frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial r}\right). \tag{3.1}$$

Здесь Φ — потенциал электрического поля в окрестности невозмущенной поверхности. Для рассматриваемой нами задачи об устойчивости капиллярных волн на поверхности заряженной сферической капли, помещенной во внешнее электрическое поле точечного источника, гармонически изменяющегося во времени, потенциал Φ может быть записан в виде разложения по сферическим функциям

$$\Phi=\frac{Q}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n0}(t)(r^n-r^{-(n+1)})Y_n^0(\theta)+\frac{\Phi_0 C}{d}, \tag{3.2}$$

где

$$A_{n0}(t) = \left(\frac{4\pi}{(2n+1)}\right)^{1/2} \frac{C}{d^{n+1}} \Phi_0 \cos \omega t;$$

C — электроемкость точечного источника; Φ_0, ω — амплитуда и частота переменного потенциала точечного источника; d — расстояние от центра капли до источника.

Величина $\delta\Phi$ в выражении (3.1) — малая добавка к потенциалу Φ, вызванная возмущением поверхности капли ξ и удовлетворяющая краевой задаче

$$\Delta(\delta\Phi) = 0,$$

$$r = 1: \quad \delta\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\xi,$$

$$r = \infty: \quad \delta\Phi \to 0. \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.3) будем искать в виде разложения по сферическим функциям

$$\delta\Phi = \sum_{n,m} B_{nm}(t) r^{-(n+1)} Y_n^m(\theta, \varphi). \tag{3.4}$$

Коэффициенты разложения B_{nm} несложно определить, подставляя (3.2), (3.4) и оригинал выражения для возмущения ξ (2.6) в (3.3),

$$B_{nm,}(t) = Q Z_{nm}(t) - \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)^3}{4\pi(2n+1)}} Z_{n_1 m}(t) \times$$

$$\times A_{n_2 0}(t) \cdot K'^{000}_{n_1 n_2 n} \cdot K'^{m0m}_{n_1 n_2 n}, \tag{3.5}$$

$K'^{000}_{n_1 n_2 n}$ и $K'^{m0m}_{n_1 n_2 n}$ — коэффициенты Клебша–Гордана (коэффициенты разложения произведения сферических функций в ряд по сферическим же функциям).

В результате, используя разложения (2.6), (3.2), (3.4), (3.5), из равенства (3.1) получим выражение для давления электрических сил на поверхность капли

$$P_E = \frac{1}{4\pi} \sum_{n,m} \Bigg[Q^2 (n-1) Z_{nm} -$$

$$-Q \sum_{n_1} \sum_{n_2} (n + n_1 - 2) Z_{n_1 m} \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)^3}{4\pi(2n+1)}} A_{n_2 0} K'^{000}_{n_1 n_2 n} K'^{m0m}_{n_1 n_2 n} +$$

$$+ \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \sum_{n_4} Z_{n_1 m} \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)^3}{4\pi(2n_3+1)}} A_{n_1 0} \sqrt{\frac{(2n_3+1)(2n_4+1)^3}{4\pi(2n+1)}} A_{n_2 0} \times$$

$$\times (n_3 - 1) K'^{000}_{n_1 n_2 n_3} K'^{m0m}_{n_1 n_2 n_3} K'^{000}_{n_3 n_4 n} K'^{m0m}_{n_3 n_4} \Bigg] Y_n^m(\theta, \varphi). \tag{3.6}$$

4. Подставим выписанное выражение для давления P_E (3.6) в уравнение (2.9) и, приравнивая коэффициенты при сферических функциях равных степеней и порядков, получим систему связанных уравнений для амплитуд различных мод $Z_{nm}(t)$ возмущения поверхности ξ. Чтобы не загромождать исследование рассмотрением взаимодействия различных мод, ограничимся случаем слабых внешних полей, когда члены, описывающие это взаимодействие, имеют больший порядок малости, чем аналогичный член собственной моды. В этом приближении пренебрежем ими в выражении для давления P_E и опустим в (3.6) слагаемые, квадратичные по величине внешнего поля. Тогда уравнение, описывающее эволюцию со временем амплитуд $Z_{nm}(t)$, примет вид

$$\frac{d^2 Z_{nm}}{dt^2} + \delta_n \frac{dZ_{nm}}{dt} + \omega_n^2 (1 + h_{nm} \cos\omega t) Z_{nm} = 0, \qquad (4.1)$$

где введены обозначения

$$\delta_n \equiv 2(n-1)(2n+1)\nu,$$

$$\omega_n^2 \equiv n(n-1)\left(n + 2 - \frac{Q^2}{4\pi}\right),$$

$$h_{nm} \equiv \frac{Q\Phi_0 C}{2\pi\left(n + 2 - \frac{Q^2}{4\pi}\right)} \left[\sum_{n_1} \frac{(2n_1+1)}{d^{n_1+1}} K^{000}_{nn_1n} K^{m0m}_{nn_1n}\right],$$

$K^{m_1m_2m_3}_{n_1n_2n_3}$ — коэффициенты Клебша–Гордана.

Уравнение вида (4.1) носит название уравнения Матье с затуханием. Теория этого уравнения хорошо изучена (см., например, [13]). В частности известно, что решения уравнения (4.1) будут неустойчивы, если частота внешнего возбуждения ω попадает в одну из резонансных зон, положение которых определяется соотношением $2\omega_n/\omega \approx p$, где p — натуральное число ($p = 1, 2, 3 \ldots$). Чем выше порядок резонанса (больше число p), тем жестче условия его возбуждения: во-первых, необходима большая амплитуда внешнего воздействия h_{nm}, во-вторых, ширина зоны неустойчивости Δ становится меньше ($\Delta \sim h^p_{nm}$). Если возбуждать главный резонанс для одной из низких мод капиллярных колебаний, другими словами, если частота внешнего воздействия совпадает с какой-либо удвоенной собственной частотой $\omega \sim 2\omega_k (k \geqslant 2)$, то более высокие моды (с $n > k$) могут возбудиться лишь в том случае, если данная внешняя частота одновременно попадает в одну из резонансных зон для этих более высоких мод. Данные условия могут реализоваться при выполнении следующего неравенства:

$$\frac{\omega_n}{\omega_k} - p \equiv \varepsilon < \Delta \sim (h_{nm})^p, \qquad (4.2)$$

где $p = 2, 3 \ldots$; $k \geqslant 2$; $n > k$.

Численные расчеты показали, что возможность реализации такого явления для анализируемой системы весьма маловероятна и осуществляется лишь в порядке исключения, но не как правило.

Таким образом, в рамках модели идеально проводящей жидкости объяснить явление выброса струй заряженными каплями или шаровыми молниями в резко неоднородных электрических полях не удается. Видимо, необходим учет таких физических характеристик реальной жидкости капель и вещества шаровой молнии, как конечность значений диэлектрической проницаемости и электропроводности. Интересно отметить, что в экспериментальной работе [14], посвященной исследованию течений в капле, испытывающей ЭГД неустойчивость и выбрасывающей струйку жидкости, отмечено, что направления вихревых течений в капле меняются на противоположные при некоторых критических значениях диэлектрической проницаемости и электропроводности жидкости.

В заключении авторы считают своим долгом выразить признательность А.Э.Лазарянцу за внимание к работе, позволившее глубже вникнуть в затронутую проблему.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Сб. тр. НТО АН СССР. Научное приборостроение. Физика аналитических приборов. Л.: Наука, 1989. С. 28–35.
[2] *Золотой Н.Б., Карпов Г.В., Скурат В.Е.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 2. С. 315–323.
[3] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1990. Vol. 23. N 11. P. 1361–1370.
[4] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 5. С. 6–13.
[5] *Woosly J.P., Turnbull R.J., Kim K.* // J. Appl. Phys. 1988. Vol. 21. P. 4278–4284.
[6] *Манзон Б.И.* // УФН. 1981. Т. 134. № 4. С. 611–639.
[7] *Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryaeva S.O.* Statistical analysis of the ball lighthing properties // Science of ball lightning / Ed.Y.H.Ohtsuki. Singapore A.O.: World Scientific, 1989. P. 88–134.
[8] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O., Verbitsky S.S.* // J. Coll. Int. Sci. 1991. Vol. 146. N 1. P. 137–151.
[9] *Григорьев А.И., Шевченко С.И., Ширяева С.О.* // Научное приборостроение. 1991. Т. 1. № 3. С. 25–43.
[10] *Лазарянц А.Э., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 3. С. 40–48.
[11] *Григорьев А.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 50–55.
[12] *Распопов С.Ф., Суходольский А.Т.* // Кр. сообщ. по физике. 1985. № 6. С. 10–13.
[13] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
[14] *Hayati I., Bailey A.I., Tadros Th.F.* // Nuture. 1986. Vol. 319. P. 41–43.

Ярославский университет

Поступило в Редакцию
19 февраля 1992 г.