

10

©1992 г.

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УСКОРЯЕМОГО КОЛЬЦЕВОГО ПУЧКА С ГАРМОНИКАМИ ВОЛНЫ

*Г.А.Кирпичников, А.Н.Тарасовский*

Рассматривается динамика кольцевого пучка заряженных частиц, движущегося в однородном магнитном поле, ускоряемого одной из гармоник электрического поля и находящегося в условиях циклотронного резонанса с другой или обеими гармониками волны. Показано, что отрицательная сторона эффекта автофазировки от ускоряющей гармоники, заключающаяся в существенном увеличении эффективного фазового объема пучка, может быть значительно ослабленной. В этом случае энергетический разброс части инжектируемого в ускоритель квазимоноэнергетического пучка практически не увеличивается. При отказе от синхронизма с ускоряющей гармоникой возможно уменьшение энергии инжектируемого пучка, а коэффициент захвата частиц в режим ускорения может быть доведен до величины, близкой к единице. Получен ряд критериев, определяющих области существования эффектов.

1. Одной из основных проблем ускорительной техники является получение пучков с малым фазовым объемом. В настоящее время существуют инжекционные системы, обеспечивающие приемлемые выходные характеристики пучков по этому параметру. Дальнейшее ускорение частиц осуществляют обычно одной из гармоник высокочастотного электрического поля волны. Для пучка частиц такое ускорение возможно благодаря эффекту автофазировки. Однако при взаимодействии с волной эффективный фазовый объем пучка возрастает [1]. В частности, в резонансных линейных ускорителях (ЛУ) обычно реализуется высокий средний темп ускорения пучка и, как следствие, используется большая амплитуда поля волны. Поэтому возрастание фазового объема и энергетического спектра в процессе ускорения частиц будет значительным даже для пучков, близких на входе в собственно ускоритель к моноэнергетическим.

При сформированных сгустках частично компенсировать отрицательное действие автофазировки (ОДА) можно уменьшением одной из проекций фазового объема пучка за счет соответствующего увеличения другой проекции. Для этого используются различные преобразователи, осуществляющие перекачку энергии колебаний частиц из одной степени свободы пучка в другую или поворот его фазового портрета внутри одной степени свободы [2]. Другой подход к этой проблеме состоит в том, чтобы, не слишком увеличивая эффективный фазовый объем пучка в начальной части ускорителя, согласовать его с основной частью ЛУ. Для этого перед входом в собственно ускоритель обычно применяют резонаторные или

волноводные группирователи, осуществляющие предварительное формирование пучка в виде отдельных сгустков [3]. В каждом конкретном ускорителе для обеспечения приемлемых характеристик ускоренного пучка применяют тот или иной набор дополнительных устройств. Как показано ниже, можно существенно ослабить ОДА без применения дополнительных устройств, если заставить каждую частицу пучка активно взаимодействовать более чем с одной гармоникой поля волны. При этом используемое для фокусировки магнитное поле позволяет еще и создать условия для уменьшения энергетического спектра пучка. В работе исследованы особенности динамики кольцевого пучка при воздействии на него одной и двух гармоник электрического поля, двигающихся с различными фазовыми скоростями. Для полноты исследования рассмотрены случаи ускорения как при синхронном, так и несинхронном взаимодействии частиц, находящихся в условиях циклотронного резонанса с волной. С целью корректного сравнения рассматриваемых способов между собой начальные параметры пучка и характеристики волны приняты одинаковыми, если не оговорено обратное.

2. Пусть в пространстве  $(r, \vartheta, z)$ , обладающем осевой симметрией, имеется однородное магнитное поле  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . Соосно с ним расположена ускоряющая структура (УС), в которой распространяется волна  $\mathbf{E}$ , изменяющаяся во времени  $t$  с частотой  $\omega$ . Для простоты полагаем, что в разложении  $\mathbf{E}$  по гармоникам существенны только две из них: нулевая и первая с амплитудами  $e, e_1$  и постоянными распространения  $k_z, \kappa_z$  соответственно. Считаем, что в УС аксиально оси  $z$  инжектируется квазиодноэнергетический кольцевой непрерывный пучок с нулевым током, средней скоростью  $\bar{V}^0 = \omega/k_z$ , где черта над символами здесь и ниже означает усреднение по всем ускоряемым частицам пучка, а индекс 0 в верхней части у символов — начальную величину соответствующего параметра. Термин “квази” используется в смысле малости начального разброса пучка по сравнению с областью устойчивых колебаний ускоренных частиц в поле волны по оси энергий. Считаем, что пучок синхронизован с нулевой ускоряющей гармоникой. Пренебрегаем также релятивистскими эффектами и полагаем, что поперечные размеры пучка в процессе его ускорения сохраняются.

Продольную составляющую электрического поля волны в канале ускорителя представляем подобно [4] и с учетом принятых приближений следующим образом:

$$E_z = e \cdot I_0(k_r r) \cdot \cos \Phi + e_1 \cdot I_0(\kappa_r) \cdot \cos \Psi, \quad (1)$$

где  $\Phi = k_z \cdot z - \omega \cdot (t - t^0)$ ,  $\Psi = \kappa_z \cdot z - \omega \cdot (t - t^0)$ ,  $I_0(\dots)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка,  $t^0$  — время влета частицы в область взаимодействия с волной.

Для параметров  $k_r$  и  $\kappa_r$  в (1) считаем, что сохраняются, соотношения, справедливые для периодических УС  $k_r^2 = \nu_0^2 - k_z^2$ ,  $\kappa_r^2 = \nu_1^2 - k_z^2$ , где  $\nu_0 = \chi/p$ ,  $\nu_1 = (\chi + 2\pi)(1/p)$ ,  $\chi$  — сдвиг фазы волны ускоряющей гармоники на ячейку,  $p$  — период УС.

Уравнения в безразмерных переменных для продольной скорости  $V_z$  произвольной частицы пучка, взаимодействующей с полем волны, представим следующим образом:

$$\dot{\nu} + \nu \frac{\dot{V}_\phi}{V_\phi} = \frac{\mu}{\omega V_\phi} E_z, \quad (2)$$

где  $\nu = V_z/V_\phi$ ,  $V_\phi = \omega/k_z$ ,  $\mu$  — удельный заряд частицы, точка в (2) и ниже над символами означает дифференцирование по  $\omega t$ .

Вследствие того что у частиц пучка имеется поперечный компонент скорости в магнитном поле, они будут двигаться по винтовой линии, вращаясь в поперечной плоскости с угловой частотой  $\omega_c = \mu B$ . Тогда расстояние  $r$  произвольной частицы пучка до оси канала можно представить как функцию продольной координаты

$$r = (R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cdot \cos \theta)^{1/2}, \quad (3)$$

где  $R$  — среднее расстояние частицы до оси канала,  $\rho$  — величина циклотронного радиуса частицы,  $\theta = k_c z$ ,  $k_c = \omega_c/V_z$ .

В данном случае удобно воспользоваться так называемой “теоремой сложения” [5] и разложить (1) с учетом (3) в ряд по пространственным гармоникам статической траектории частицы [6]

$$I_0(k_r r) = \sum_l (-1)^l I_l(k_r \rho) \cdot I_l(k_r \cdot R) \cdot \cos l\theta,$$

$$I_0(\kappa_r r) = \sum_m (-1)^m I_m(\kappa_r \rho) \cdot I_m(\kappa_r \cdot R) \cdot \cos m\theta, \quad (4)$$

где  $l, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $I_l(\dots)$ ,  $I_m(\dots)$  — модифицированные функции Бесселя  $l$ -го и  $m$ -го порядка.

Подставляя (4) в (1), полагаем, что для частиц пучка могут выполняться условия резонансов: для первого члена правой части (1) — черенковского или циклотронного, когда  $l = 0$  или  $\pm 1$ , для второго — циклотронного при  $m = \pm 1$ . В этом случае можно пренебречь действием остальных членов ряда (4), оставив только резонансные члены. Тогда систему уравнений для скорости произвольной частицы и фаз, дополненную уравнением для фазовой скорости волны, после соответствующих преобразований запишем следующим образом:

$$\dot{\nu} + \nu \frac{\dot{V}_\phi}{V_\phi} = \alpha \cdot (\cos \varphi + \varepsilon \cdot \cos \psi), \quad \dot{V}_\phi = \alpha V_\phi \cos \varphi_s, \quad (5)$$

$$\dot{\varphi} = \nu - 1 - \Omega_l, \quad \dot{\psi} = g\nu - 1 - \Omega_m, \quad (6)$$

где

$$g = \frac{\kappa_z}{k_z}, \quad \Omega_l = \frac{l \cdot \omega_c}{\omega}, \quad \Omega_m = \frac{m \cdot \omega_c}{\omega}, \quad \alpha = \mu \frac{e}{\omega V_\phi} I_l(k_r R) \cdot I_l(k_r \rho),$$

$$\varepsilon = \frac{e_m \cdot I_m(\kappa_r \cdot R) \cdot I_m(\kappa_r \cdot \rho)}{e \cdot I_l(k_r \cdot R) \cdot I_l(k_r \cdot \rho)},$$

$$\varphi = (k_z - lk_c)z - \omega t + \varphi^0, \quad \psi = (\kappa_z - m k_c)z - \omega t + \psi^0,$$

$$\varphi^0 = \omega t^0 - k_r R, \quad \psi^0 = \omega t^0 - \kappa_r R,$$

$\varphi_s$  — параметр, характеризующий темп ускорения пучка в канале.

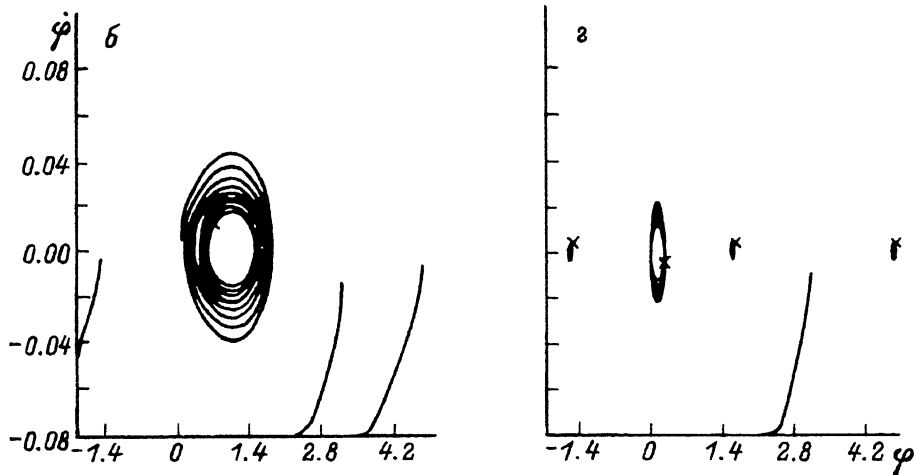
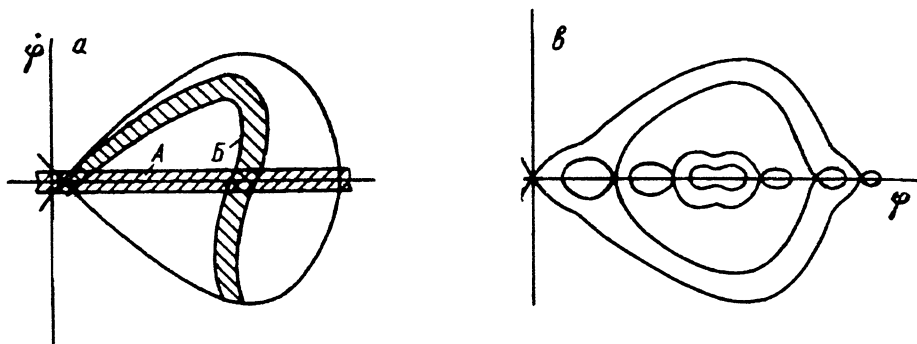


Рис. 1. Фазовые плоскости продольного движения частиц.

$a, b$  — сепаратрисы резонансов с одной и двумя гармониками поля соответственно;  $A, B$  — изображения пучков на плоскости: инжектируемого и примерно через четверть фазового колебания соответственно;  $b, z$  — фазовые траектории выделенных частиц при резонансе с одной и двумя гармониками и различных фазах влета  $\varphi_s = 1, \alpha^0 = 0.002, \beta^0 = 0.03, \beta_k = 0.08$ . Во втором случае  $\varepsilon = 1, g = 50, m = 1$ . Крестики — концы фазовых траекторий.

В частности, при взаимодействии частиц с моногармоническим полем и их синхронизме с ускоряющей гармоникой  $\varphi_s$  будет иметь смысл равновесной фазы, относительно которой происходит формирование сгустков в волне. Правая часть первого уравнения (5) содержит два слагаемых, характеризующих влияние нулевой и первой пространственных гармоник статической траектории пучка соответственно. Коэффициенты  $R, \rho, \varphi_s$  в реальных условиях обычно зависят от координаты  $z$  и положения частицы относительно оси пучка. Однако для того чтобы выделить интересующий нас эффект, принимаем модель, когда эти параметры сохраняются во время всего процесса ускорения пучка. Без ограничения общности полагаем также, что  $k_z < k_z$ .

Для обеспечения требуемых коэффициента захвата в режим ускорения и энергетического спектра пучка при заданных параметрах  $k_r$ ,  $\kappa_r$ ,  $e$ ,  $e_1$ , характеризующих УС, необходима вполне определенная величина  $\varepsilon$ . Из-за однозначной связи  $\varepsilon$  с  $R$  и  $\rho$  в (5) это требует формирования кольцевого пучка в ЛУ радиуса  $R$  с поперечной скоростью  $V_{\perp} = \rho\omega_c$ .

3. Пусть теперь влияние первой гармоники на частицу пренебрежимо мало по сравнению с нулевой, а средняя относительная скорость пучка  $\bar{v} = \bar{V}/V_{\phi}$  удовлетворяет условию черенковского резонанса. Тогда

$$\bar{\varphi} = 0, \quad l = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \bar{v} = 1. \quad (7)$$

Способ ускорения частиц, когда пучок в резонансе только с одной гармоникой электрического поля, можно назвать классическим. Он хорошо исследован в [1]. В этом случае область финитного движения частиц ограничена сепаратрисой, размах которой по оси импульсов  $\Delta\varphi \simeq \alpha^{1/2} \cdot (\varphi_s \cdot \cos \varphi_s - \sin \varphi_s)^{1/2}$ . Величина  $\Delta\varphi$  характеризует энергетический разброс и соответственно ширину спектра ускоренного пучка. Даже если первоначально пучок был близок к моноэнергетическому, то в процессе ускорения уже через четверть фазового колебания его энергетический разброс будет сравним с размахом сепаратрисы по оси импульсов (рис. 1,а). При этом фазовые траектории в зависимости от начальных условий будут иметь вид, представленный на рис. 1,б.

4. Для эффективного взаимодействия частиц с первой гармоникой электрического поля, согласно (6), потребуем выполнения условия циклотронного резонанса [7]. Тогда  $\dot{\psi} = 0$ ,  $\varepsilon \neq 0$  и

$$g\bar{v} = 1 + \Omega_m. \quad (8)$$

При  $m < 0$  резонансное взаимодействие частиц реализуется за счет нормального, а при  $m > 0$  — аномального эффектов Доплера. Приравнявая (7) и (8), имеем выражение для определения соотношения между постоянными распространения пространственных гармоник

$$g = 1 + \Omega_m. \quad (9)$$

Если пучок находится в резонансе с обеими пространственными гармониками и амплитуда первой гармоники будет не мала, то динамика частицы существенно изменится. В этом случае происходят качественные изменения в топологии изолиний на фазовой плоскости (рис. 1,в). Вдоль оси фаз появляется последовательность малых потенциальных ямок. Если инжектировать пучок с энергетическим разбросом, меньшим, чем ширина этих ямок, то частицы пучка преимущественно попадают в эти ямки и колебания частиц будут ограничены их размерами (рис. 1,г). Это означает, что ОДА, которое приводит к заполнению области, представляемой большой сепаратрисой, подавлено. Энергетический разброс пучка в этом случае зависит от размеров малых ямок. Величину малости можно характеризовать параметром

$$\delta = \left[ \frac{g}{\varepsilon} (\varphi_s \cdot \cos \varphi_s - \sin \varphi_s) \right]^{-1/2},$$

выражающим отношение размеров по оси импульсов малой ямки к большой. Расчеты показывают, что чем меньше  $\delta$ , тем большее количество

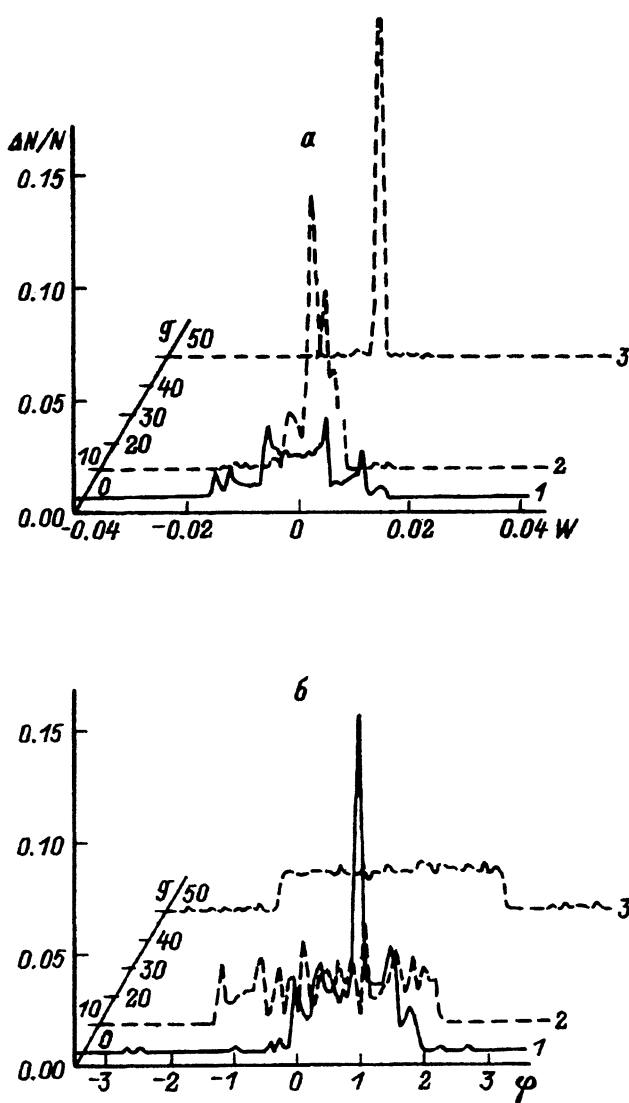


Рис. 2. Энергетические (а) и фазовые (б) спектры ускоренного пучка.  
 1 —  $\epsilon = 0$ ; 2 —  $\epsilon = 1$ ,  $g = 10$ ;  $m = 1$ ; 3 —  $\epsilon = 1$ ,  $g = 50$ ,  $m = 1$ .

ямок находится внутри большой сепаратрисы, а относительные размеры ямок соответственно меньше. Для того чтобы на склонах большой потенциальной ямы, определяемой потенциалом  $\int E_z d\varphi$ , могли сформироваться малые ямки, необходимо выполнение следующей оценки  $g \cdot \epsilon \geq 1$ . Чем существеннее разнятся фазовые скорости гармоник, тем легче получение исследуемого эффекта, т.е. требуется меньшая амплитуда первой гармоники. Вместе с тем, если  $g\epsilon \rightarrow 0$  при  $g \gg 1$ , доля частиц, имеющих anomalously малый энергетический разброс, будет стремиться к нулю.

На рис. 2 приведены фазовые и энергетические спектры пучка при различных условиях ускорения, полученные с помощью численного моделирования. На этом и следующих рисунках  $\Delta N$  — количество частиц

в малых интервалах относительных энергий  $W = (V - \bar{V})/(2V_\phi)$  или фаз  $\varphi$ , нормированное на полное количество ускоренных частиц  $N$ ;  $\beta^0, \beta_k$  — начальная и конечная продольные скорости пучка, нормированные на скорость света. Видно, что с увеличением параметра  $g$  ширина энергетического спектра уменьшается (рис. 2,а). В частности, при  $g = 10$  ширина спектра на уровне 0.5 уменьшается примерно в 3–5 раз. Что касается фазовых спектров, то при наличии резонанса с обеими пространственными гармониками весь сгусток разбивается на ряд микросгустков по числу малых потенциальных ямок в большой (рис. 2,б). Коэффициент захвата частиц в режим ускорения  $\eta$ , как указано на рис. 2,а, при ненулевом параметре  $g$  несколько увеличивается по сравнению с классическим способом ускорения пучка одной гармоникой. Он равен 0.51 для случая 1, 0.68 для случая 2 и 0.69 для случая 3.

5. Представляет интерес способ ускорения частиц, когда соотношения (7) и (8) не выполняются, а пучок вместе с тем находится в циклотронном резонансе с первой пространственной гармоникой. При этом  $\bar{\varphi} = 0, l \neq 0$  и

$$v = 1 + \Omega_l. \quad (10)$$

Как видно из (10), скорость инжектируемого пучка должна отличаться от фазовой скорости волны в начальной части ускоряющей структуры. В частности, при  $\Omega_l \leq -1$  величина  $v \ll 1$ , т.е. для эффективного взаимодействия с волной допустима существенно пониженная энергия инжекции пучка. Данный способ интересен и тем, что дефокусирующее действие волны будет ослаблено [8] вследствие скольжения пучка как целого относительно основной ускоряющей гармоники.

На рис. 3 проиллюстрирован данный вариант задачи (кривые под номером 1). Видно, что ширина спектра ускоренного пучка несколько увеличена по сравнению с предыдущими способами ускорения. Фазовый спектр имеет внутреннюю структуру, подобную структуре фазового спектра при классическом случае.

На рис. 4,а приведены фазовые траектории нескольких выделенных частиц. По сравнению с классическим способом ускорения пучка область, где фазовые траектории финитны, увеличена. Это указывает на повышенный коэффициент захвата частиц в режим ускорения. Продольная скорость инжекции частиц в данном случае меньше, чем для классического способа в 5.5 раз.

6. Рассмотрим последний вариант ускорения пучка, когда выполнены условия (8) и (10). Физически такая постановка задачи имеет смысл, когда величины  $l$  и  $m$  разных знаков. Приравнивая правые части (8) и (10), имеем

$$\omega = \omega_c \frac{m - gl}{g - 1}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что при одновременном резонансном взаимодействии частицы с обеими пространственными гармониками, заданных магнитном поле и отношении постоянных распространения частота колебаний волны должна быть вполне определенной. Этот вариант ускорения пучка интересен тем, что сочетает достоинства второго и третьего способов. Кроме того, по сравнению с ранее рассматриваемыми случаями, как следует из (8) и (10), для осуществления последнего варианта ускорения пучка при заданной фазовой скорости волны также требуется иная энергия

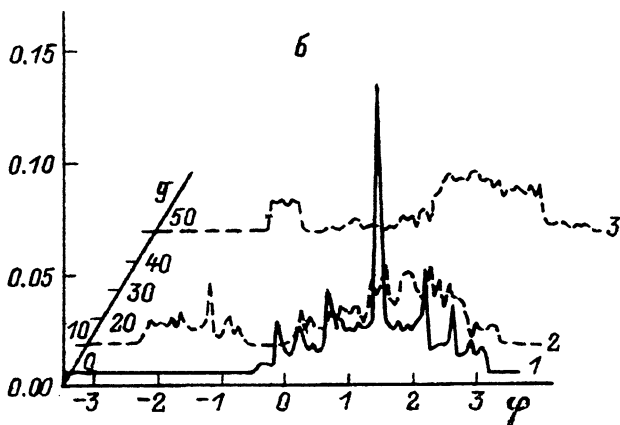
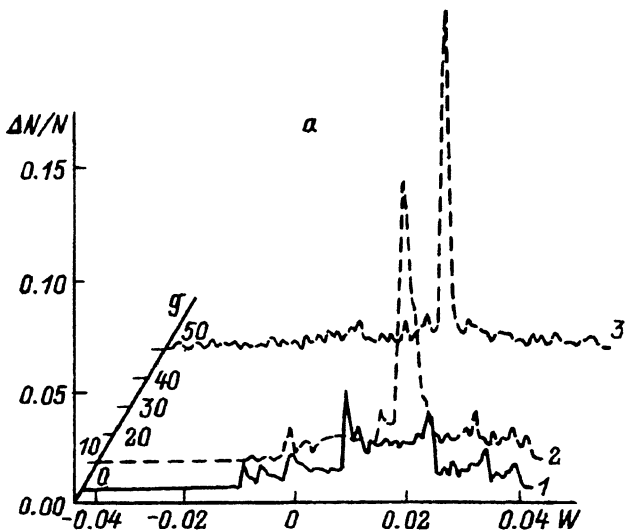


Рис. 3. Энергетические (а) и фазовые (б) спектры ускоренного пучка.

1 —  $\varepsilon = 0$ ,  $l = -1$ ,  $\Omega_1 = 9$ ; 2 —  $\varepsilon = 1$ ,  $g = 10$ ,  $m = 1$ ,  $l = -1$ ; 3 —  $\varepsilon = 1$ ,  $g = 50$ ,  $m = 1$ ,  $l = -1$ . Коэффициент захвата  $\eta_1 = 0.83$ ,  $\eta_2 = 1$ ,  $\eta_3 = 0.84$ .

инъекции частиц. Явный вид соотношения для относительной скорости инжектируемого пучка следующий:

$$\bar{v} = \frac{l - m}{gl - m}.$$

В частности, при  $m = 1$ ,  $l = -1$ ,

$$\bar{v} = \frac{2}{g + 1}.$$



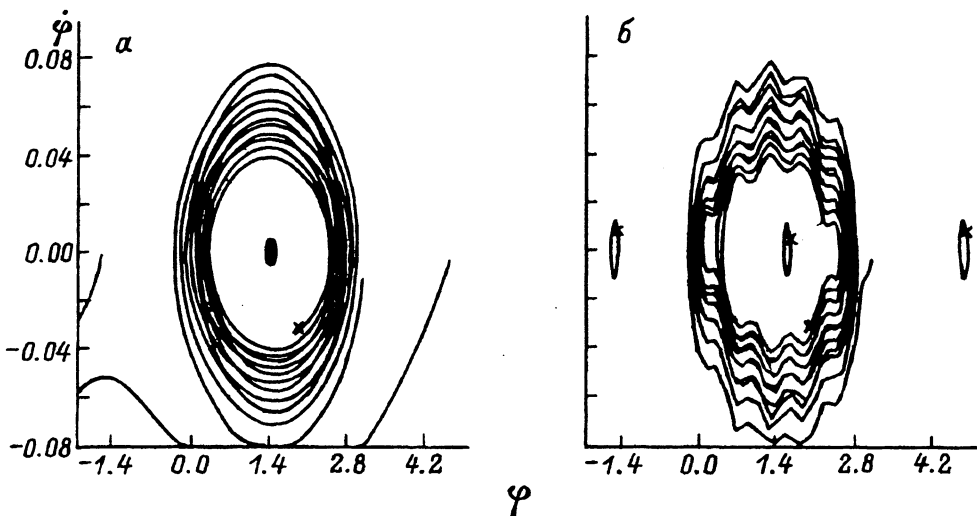


Рис. 4. Динамика выделенных частиц на фазовой плоскости для третьего (а) и четвертого (б) способов ускорения пучка.

а —  $\varepsilon = 0$ ,  $l = -1$ ,  $\Omega_l = 9$ ; б —  $\varepsilon = 1$ ,  $m = 1$ ,  $l = -1$ ,  $g = 10$ .

Так как  $g > 1$ , то энергия инжекции пучка в этом случае также будет меньше, чем для первых двух способов ускорения пучка волной.

На рис. 3 приведены энергетические и фазовые спектры пучка для последнего варианта ускорения частиц волной (кривые под номерами 2 и 3). Видно, что ширина пьедесталов энергетических спектров и их высота значительно больше, чем для способа классического ускорения пучка. Однако она уменьшается с увеличением параметра  $g$ . Интересующий нас эффект аномально узкого энергетического спектра, когда энергетический разброс некоторой части ускоренного пучка ограничен размерами малых потенциальных ямок, имеет место. На это же обстоятельство указывает и форма энергетического спектра, представляющего собой суперпозицию относительно широкого и узкого пиков, причем узкий пик находится на вершине первого. При  $g = 50$  широкий пик вырождается в пьедестал узкого пика и захватывает область энергий в пределах всего поля графика. Фазовые спектры ускоренного компонента пучка практически совпадают с третьим случаем. Что касается коэффициента захвата пучка в режим ускорения, то численное моделирование этой задачи в рассматриваемых условиях при  $g = 10$  дает 100%-ный захват, хотя определенная доля частиц находится в пьедестале. В случае  $g = 50$  захват частиц в режим ускорения равен 0.84, т.е. он, хотя и увеличен по сравнению с классическим способом, не равен единице. При этом энергия оставшейся доли частиц после ускорения пучка остается меньше, чем энергия инжекции. На фазовой плоскости (рис. 4, б) приведены траектории выделенных частиц, различающихся начальной фазой. Из этого рисунка видно, что траектории частиц фикитны и выпадения частиц из режима ускорения при  $g = 10$  нет. Кроме того, имеется группа частиц, колебания которых ограничены размерами малых потенциальных ямок.

В заключение скажем про область применения исследуемых эффектов и ограничения. В работе рассмотрен кольцевой пучок, но результаты справедливы и для сплошного пучка, хотя и при уменьшенном ко-

Эффект захвата из-за изменения  $\varepsilon$  в зависимости от параметра  $R$ . Для обеспечения равенства (8) при  $g \geq 10$  необходимо, во-первых, обеспечить возбуждение волны в УС на виде колебаний  $\geq \pi/5$ , что, естественно, ограничивает выбор структуры; во-вторых, при этом  $\omega_c/\omega \geq 9$ . Для тяжелых частиц, например протонов, реально достижимая величина  $\omega_c = 10^9$ . В этом случае рабочая частота колебаний электрического поля волны должна быть не более  $2 \cdot 10^7$  Гц. При ускорении легких частиц величина  $\omega$  может быть значительно больше, чем для протонов, из-за различия в массах, поэтому можно в принципе получить аномально малые энергетические спектры пучка. Вместе с тем пучок легких частиц быстрее становится релятивистским, и данные результаты необходимо уточнить с учетом этого обстоятельства.

Таким образом, при резонансном взаимодействии частиц кольцевого пучка с двумя гармониками электрического поля волны имеется возможность подавления негативной стороны эффекта автофазировки от действия ускоряющей гармоники, связанной с возрастанием эффективного фазового объема, и получения пучков с относительно малым энергетическим разбросом. При ускорении пучка несинхронными гармониками замедленной волны, кроме уменьшения влияния на него дефокусирующих сил, требуется меньшая энергия инжекции частиц. В этом случае (при рассматриваемых параметрах системы), как показывает численное моделирование, все частицы захватываются волной в режим ускорения. В работе приведен ряд критериев, позволяющий оценить области существования эффектов.

#### Список литературы

- [1] *Капчинский И.М.* Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М.: Атомиздат, 1966. 310 с.
- [2] *Линейные ускорители / Под ред. Б.П.Мурина.* М.: Атомиздат, 1978. Т. 1. 320 с.
- [3] *Вальднер О.А., Власов А.Д., Шальнов А.В.* Линейные ускорители. М.: Атомиздат, 1969. 248 с.
- [4] *Лебедев А.Н., Шальнов А.В.* Основы физики и техники ускорителей. Линейные ускорители. М.: Энергоатомиздат, 1983. Т. 3. 199 с.
- [5] *Рыжик И.М., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов сумм, рядов и производений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. 463 с.
- [6] *Кураев А.А.* Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. М.: Радио и связь, 1968. 208 с.
- [7] *Люисэлл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963. 351 с.
- [8] *Бонч-Осмоловский А.Г., Доля С.Н., Решетников К.А.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 6. С. 1055-1061.

Поступило в Редакцию  
10 февраля 1992 г.