01; 04

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ МГД УРАВНЕНИЙ В КВАЗИОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ РЕЖИМОВ С МОНОТОННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ ПО ДЛИНЕ КАНАЛА. I

Е.Г.Шейкин

Предложен новый подход к решению системы МГД уравнений в квазиодномерном приближении, позволивший получить общее аналитическое решение, учитывающее зависимость σ и c_p от температуры и давления для режимов течения с монотонно изменяющимися параметрами течения по длине МГД канала. Частным случаем полученного решения являются распространенные режимы течения $p = \text{const}$, $T = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $v = \text{const}$, $M = \text{const}$. Проведен анализ полученного общего решения.

Для описания течений в каналах МГД генераторов часто и успешно применяется квазиодномерное приближение (см., например, [1,2]). Ценность такого приближения очевидна и заключается в относительной простоте алгоритма расчета изменения параметров течения по длине МГД канала. Но при всей простоте приближения, за исключением нескольких частных случаев, для расчета параметров потока в канале проводится численное интегрирование системы дифференциальных уравнений. Это не только снижает наглядность полученных результатов, но и существенно затрудняет расчет и комплексный анализ комбинированных газодинамических систем, включающих в себя как составную часть МГД систему. Получение аналитического решения системы МГД уравнений в квазиодномерном приближении для широкого диапазона изменения параметров течения значительно облегчит расчет и анализ ранее упомянутых комбинированных систем и позволит разработать несложные алгоритмы оценки параметров подсистем, оптимизирующих целевую функцию системы.

Рассмотрим течение невязкого нетеплопроводного газа. Квазиодномерная модель течения в безындукционном приближении описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\rho v F = \text{const}, \tag{1}$$

$$\rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_x, \tag{2}$$

$$\rho v \frac{d}{dx}\left(h + \frac{v^2}{2}\right) = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}, \tag{3}$$

$$p = R\rho T, \tag{4}$$

где ρ — плотность ионизованного газа, p — статическое давление, T — статическая температура, v — скорость течения, F — площадь поперечного сечения канала, h — энтальпия, j — плотность тока, B — магнитная индукция, E — напряженность электрического поля, R — газовая постоянная, x — текущая координата.

Для фарадеевского МГД канала с секционированными электродами справедливо [1]

$$(\mathbf{j}\times\mathbf{B})_x = -(1-k)\sigma B^2 v, \tag{5}$$

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = -k(1-k)\sigma B^2 v^2, \tag{6}$$

где σ — проводимость ионизованного газа; $k = E/vB$ — коэффициент нагрузки ($k < 1$ соответствует МГД генератору, $k > 1$ — МГД ускорителю); величины B, σ и k в общем случае зависят от значения текущей координаты.

При произвольном законе изменения площади поперечного сечения канала $F(x)$ решение системы уравнений (1)–(6) осуществляется численным способом. Для упрощения решения системы (1)–(6) введем в рассмотрение функцию $\xi(x)$ следующим образом:

$$\frac{dp}{dx} = \xi(x)(1-k)^2\sigma B^2 v. \tag{7}$$

Так как $p(x)$ и $v(x)$ являются решением системы (1)–(6) и тем самым зависят от закона изменения $F(x)$, то функция $\xi(x)$ в соотношении (7) зависит функционально от $F(x)$. Введение функции $\xi(x)$ соотношением (7) дает возможность получить аналитическое решение системы уравнений. Считая функцию $\xi(x)$ заданной, находим решение системы уравнений (2)–(7) и затем определяем $F(x)$ с помощью соотношения (1). Условие совместимости системы (1)–(6) и уравнения (7) накладывает на функцию $\xi(x)$ определенные ограничения, которые зависят от типа выбранной функции, в частности, для $\xi = \mathrm{const}$ ограничение на диапазон возможных значений будет определено ниже (см. (17)).

Преобразуем систему уравнений (2)–(7) к более удобному для решения виду. Для этого подставим (7) и (5) в уравнение (2) и после несложных преобразований получим

$$\frac{dp}{dx} + \rho\frac{\xi\cdot(1-k)}{1+\xi\cdot(1-k)}\frac{d(v^2/2)}{dx} = 0. \tag{8}$$

Подставив в уравнение (3) соотношения (6), (7) с использованием уравнения (8), получим

$$\frac{dh}{dx} + \frac{(1+\xi)(1-k)}{1+\xi\cdot(1-k)}\frac{d(v^2/2)}{dx} = 0. \tag{9}$$

И наконец, из уравнений (8) и (9) получаем

$$\frac{dp}{dx} + \rho\frac{\xi}{1+\xi}\frac{dh}{dx} = 0. \tag{10}$$

Система уравнений (4), (7), (9) и (10) с граничным условием $\rho(0) = \rho_0$, $T(0) = T_0$, $p(0) = p_0$, $v(0) = v_0$ разрешима для произвольной зависимости функций ξ, k, σ и B от текущей координаты с учетом того, что $h(T) = h_0 + S_{T_0}^{T} c_p dT'$ (c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении).

При $k = \text{const}$ и $\xi = \text{const}$ полученная система уравнений имеет аналитическое решение. Несмотря на то что такое приближение существенно ограничивает множество возможных решений, оно представляет несомненный интерес, так как широко распространенные режимы течения $p = \text{const}, T = \text{const}, v = \text{const}$ являются частными случаями рассматриваемого режима с $\xi = \text{const}$. Действительно, из уравнения (7) следует, что $\xi = 0$ отвечает режиму $p = \text{const}$. Из уравнения (9) следует, что $\xi = -1$ соответствует режиму $h = \text{const}$ или, что тоже самое, $T = \text{const}$ (так как $dh/dx = c_p dT/dx$), а $\xi = -1/(1-k)$ описывает режим $v = \text{const}$. Значению $\xi = \gamma - 1$ отвечает режим $\rho = \text{const}$ (γ — показатель адиабаты).

Приближение $\xi = \text{const}$ и $k = \text{const}$ предписывает, как это следует из рассматриваемой системы, монотонное изменение параметров течения по длине канала. Рассмотрением такого типа течений мы и ограничимся в данной работе.

При $\xi = \text{const}$ в уравнении (10) зависимость параметров от координаты x становится неявной. Принимая во внимание, что $dh/dx = c_p = dT/dx$, а также используя уравнение состояния (4), приводим уравнение (10) к виду

$$\frac{dp}{p} - \frac{c_p}{R}\frac{\xi}{1+\xi}\frac{dT}{T} = 0. \tag{11}$$

В случае когда c_p представима в виде произведения функции от температуры на функцию от давления, переменные в полученном уравнении разделяются. В частности, когда $c_p = \text{const}$, из (11) получаем простую связь между p и T

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\xi}{\xi+1}} \tag{12}$$

Уравнение (9) также приводит к неявной форме зависимости параметров течения от координаты. Действительно, из (9) следует

$$h(x) + \frac{(1+\xi)(1-k)}{1+\xi\cdot(1-k)}\frac{v^2(x)}{2} = \text{const}$$

или, используя граничные условия, запишем это соотношение в виде

$$h(x) + \frac{(1+\xi)(1-k)}{1+\xi\cdot(1-k)}\frac{v^2(x)}{2} = h_0 + \frac{(1+\xi)(1-k)}{1+\xi\cdot(1-k)}\frac{v_0^2}{2}. \tag{13}$$

Примечательно, что (13) имеет вид закона сохранения. Тем самым величина

$$h + \frac{(1+\xi)(1-k)}{1+\xi\cdot(1-k)}\frac{v^2}{2}$$

является интегралом движения для МГД течений, характеризующихся постоянными значениями ξ и k.

Совокупность формул (4), (12) и (13) описывает в принятых предположениях связь между параметрами МГД течения при произвольном значении координаты x. Для того чтобы получить зависимость параметров течения от величины электроэнергии, вырабатываемой МГД генератором или вкладываемой в течение в случае МГД ускорителя, воспользуемся законом сохранения энергии

$$h_0 + \frac{v_0^2}{2} = h(x) + \frac{v^2(x)}{2} - \varepsilon(x), \tag{14}$$

где $\varepsilon(x)$ — величина удельной электроэнергии (энергии на единицу массы), выработанной МГД генератором (в этом случае $\varepsilon < 0$) или вложенной в МГД ускоритель ($\varepsilon > 0$) на промежутке $[0; x]$. Из формул (14) и (13) нетрудно получить зависимости $v(\varepsilon(x))$ и $h(\varepsilon(x))$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{1+\xi\cdot(1-k)}{k}\varepsilon, \tag{15}$$

$$h - h_0 = -(1+\xi)\frac{1-k}{k}\varepsilon. \tag{16}$$

Из (15) и (16) виден физический смысл введенного параметра ξ. Так, из (16) следует, что $(1+\xi)$ определяет изменение энтальпии потока, обусловленное наработкой электроэнергии ε при заданном коэффициенте нагрузки k. Условие знакоположительности переменных v^2 и h накладывает ограничения на пределы возможного изменения параметров. Используя соотношения (15) и (16), получаем

$$-1 - \frac{k}{k-1}\frac{h_0}{\varepsilon} < \xi < -\frac{1}{1-k} + \frac{k}{k-1}\frac{v_0^2}{2\varepsilon}. \tag{17}$$

Отметим, что выражение $(k-1)\cdot\varepsilon$ в соотношении (17) неотрицательно (при $k > 1$ величина $\varepsilon > 0$ и, наоборот, при $k < 1$ величина $\varepsilon < 0$). В газодинамическом пределе $k \to 1$ (МГД взаимодействие отсутствует) из (15)–(17) следует, что изменение параметров течения происходит лишь при $\xi \to \pm\infty$. В этом случае решение (12) описывается адиабатой Пуассона, что соответствует приближению решаемой задачи.

Для расчета параметров течения p, ρ, T, v и ε система полученных уравнений (4), (12), (15) и (16) должна быть дополнена дифференциальным уравнением (7), решение которого устанавливает зависимость параметров течения от координаты. Уравнение (7) с использованием (11) и (12) может быть сведено к удобному для интегрирования виду. Согласно

(11), p зависит от x неявно, через зависимость от $T(x)$. Это позволяет свести уравнение (7) к виду

$$\frac{dp}{dT}\frac{dT}{dx} = \xi \cdot (1-k)^2 \cdot \sigma \cdot B^2 \cdot v(T). \tag{18}$$

Когда выражение σB^2 представимо в виде произведения функции от T на функцию от x переменные в уравнении (18) разделяются. В частности, когда σB^2 зависит только от T, решение уравнения (18), полученное с учетом определения dp/dT из решения уравнения (11), имеет вид

$$x(T) = \frac{1}{\xi \cdot (1-k)^2} \int\limits_{T_0}^{T} \frac{dp/dT'}{\sigma B^2 v(T')} dT', \tag{19}$$

где

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\xi}{1+\xi} p_0 \frac{c_p}{RT} \exp\left(\int\limits_{T_0}^{T} \frac{\xi}{1+\xi} \frac{c_p}{RT'} dT' \right),$$

$$v(T) = \sqrt{v_0^2 - 2\frac{1+\xi \cdot (1-k)}{(1+\xi)(1-k)}(h(T) - h_0)}.$$

При $\xi \to -1$ $T \to T_0$ и особенность подынтегрального выражения (19) интегрируема, в чем можно убедиться, осуществляя предельный переход $\xi \to -1$ с использованием соотношения (16) для замены в (19) зависимости от T на зависимость от ε.

Расчет параметров течения по длине МГД канала при отсутствии дополнительных внешних условий рекомендуется проводить в следующей очередности. Из формулы (19) при выбранных значениях параметров k и ξ определяется зависимость $T(x)$, используя которую с помощью соотношения (12) получаем $p(x)$, а затем из уравнения состояния (4) определяем $\rho(x)$. Скорость течения $v(x)$ определяем из соотношения (13). Профиль канала $F(x)$, соответствующий выбранному режиму течения, определяется из закона сохранения массы (1) с использованием найденных зависимостей $v(x)$ и $\rho(x)$. Величину удельной электроэнергии, вырабатываемой МГД генератором, ε определяем из соотношения (15) или, что равнозначно, из (16).

Для МГД ускорителя рассчитанная по указанному алгоритму функция $\varepsilon(x)$ будет определять величину удельной электроэнергии, которую необходимо вложить в МГД течение на промежутке $[0; x]$ для обеспечения выбранного режима течения.

На рис. 1 представлена зависимость параметров течения на выходе МГД генератора с заданным параметром взаимодействия $S_v = (\sigma_0 B^2 L)/(\rho_0 v_0)$ (где L — длина МГД генератора) от величины ξ при значении числа Маха на входе МГД канала $M_0 = 0.8$. Рассматриваются значения $\xi \leqslant 0$, так как $\xi > 0$ соответствует режиму течения с положительным градиентом давления, характеризующимся наличием условий для отрыва пограничного слоя. В расчетах c_p полагалась постоянной.

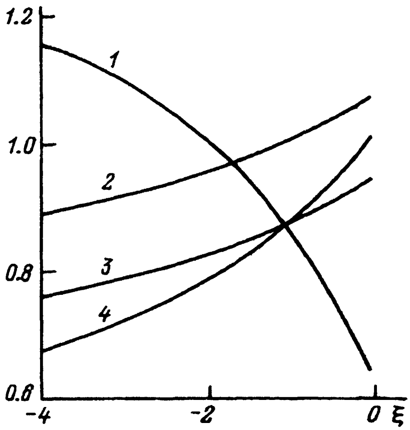

Рис. 1. Зависимость параметров течения на выходе МГД генератора от параметра ξ при значениях $\gamma = 1.67, k = 0.5$.
1 — v/v_0, *2* — T/T_0, *3* — ρ/ρ_0, *4* — p/p_0; $S_v = 0.5$, $M_0 = 0.8$.

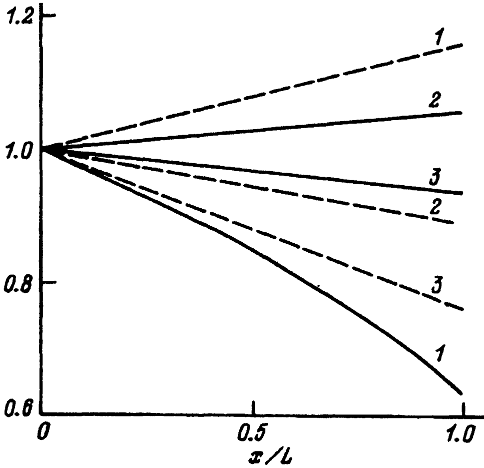

Рис. 2. Изменение параметров течения по длине МГД канала при значениях $M_0 = 0.8$, $\gamma = 1.67$, $k = 0.5$, $S_v = 0.5$.
1 — v/v_0, *2* — T/T_0, *3* — ρ/ρ_0; сплошные кривые — $\xi = 0$, штриховые — $\xi = -4$.

Учитывалась зависимость проводимости от температуры и давления в форме [1]

$$\sigma(T,p) = \sigma_0 \cdot \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/4} \cdot \exp\left(\alpha \cdot \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)\right),$$

где $\sigma_0 = \sigma(T_0, p_0)$ (в расчетах использовалось значение $\alpha = 10$).

При интегрировании в (19) зависимость σ от давления выражалась через полученную зависимость давления от температуры (12). Из рис. 1 видно, что параметры течения на выходе МГД генератора монотонно меняются при изменении параметра ξ от -4 до 0. При этом T, ρ и p возрастают с ростом ξ, а v падает. На рис. 1 представлены относительные величины параметров (приведенные к значению параметров на входе в МГД канал). Так как рассматриваемый режим течения характеризуется монотонным изменением параметров по длине канала, то зависимости, представленные на рис. 1, определяют и характер пространственного изменения параметров. Так, если относительная величина параметра при выбранном ξ принимает значение меньше единицы, то режим течения сопровождается уменьшением данного параметра по длине канала, при значении больше единицы — возрастанием, а равенство относительного параметра единице отвечает режиму сохранения данного параметра по длине канала. Например, из рис. 1 следует, что режим течения при $\xi > -1$ сопровождается увеличением статической температуры, а при $\xi < -1$ — уменьшением. Характер зависимости параметров течения от параметра ξ одинаков как для дозвукового, так и для сверхзвукового течения. Представленные на рис. 2 зависимости характеризуют изменение параметров течения по длине МГД генератора при двух значениях ξ.

На рис. 3 представлены рассчитанные зависимости профилей МГД генератора для набора значений параметра ξ. Из рис. 3 следует, что

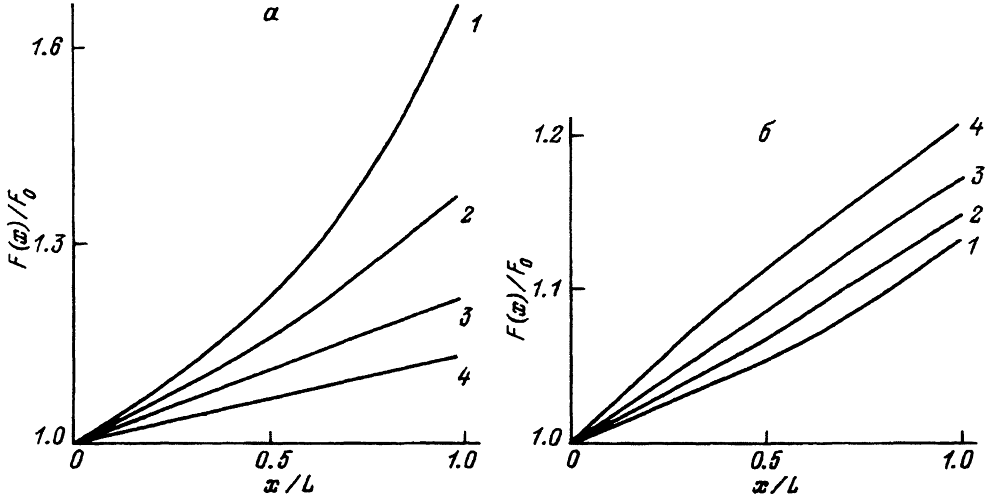

Рис. 3. Зависимость профиля МГД генератора от параметра при значениях $\gamma = 1.67$, $k = 0.5$.
ξ: *1* — 0, *2* — −0.8, *3* — −2, *4* — −4; M_0: *а* — 0.8, *б* — 1.6; S_v: *а* — 0.5, *б* — 0.1.

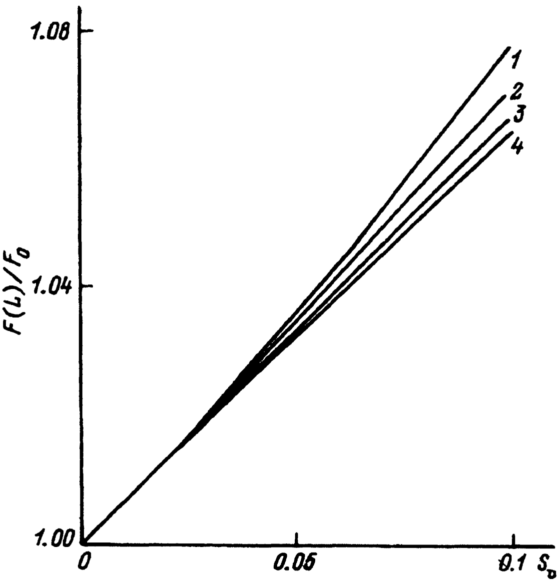

Рис. 4. Зависимость степени расширения МГД канала от параметра взаимодействия S_v при значениях $M_0 = 1$, $\gamma = 1.67$, $k = 0.5$.
ξ: *1* — 0, *2* — −0.8, *3* — −2, *4* — −4.

режимам течения с рассматриваемыми параметрами k и ξ отвечают монотонно расширяющиеся профили каналов МГД генератора. Причем для дозвукового течения (рис. 3,*а*) уменьшению ξ отвечает уменьшение степени раскрытия канала. Для сверхзвукового течения (рис. 3,*б*) характер зависимости степени раскрытия канала от ξ меняется на противоположный. В том случае, когда скорость течения совпадает со скоростью звука (рис. 4), при малых значениях параметра взаимодействия зависимость профиля МГД генератора от параметра ξ исчезает. Таким образом, при $M_0\ \lambda = 1$ одному профилю МГД генератора отвечает множество режимов течения. Следовательно, решение системы при $M = 1$ неустойчиво [3].

Переход через особую точку системы уравнений (1)–(6) $M = 1$, согласно [1], обычно сопровождается запиранием канала. Соотношение (13) позволяет определить критическое значение параметра $\xi = \xi^*$, при котором реализуется режим течения $M = \mathrm{const}$ (с учетом связи $v^2 = (\gamma-1)c_pTM^2$),

$$\xi^* = \left(-1 + \frac{k}{1 + \frac{\gamma-1}{2}(1-k)\cdot M^2}\right)^{-1}.$$

Число Маха уменьшается по длине канала при $\xi > \xi^*$, следовательно, только в этом диапазоне изменения параметра ξ сверхзвуковое течение может сопровождаться запиранием канала.

Проведенный анализ показывает наглядность и информативность полученного аналитического решения, которое не только позволяет элементарно рассчитывать основные параметры МГД течения, но и дает возможность корректно сформулировать оптимизационную задачу как для изолированной МГД системы, так и для случая, когда МГД система входит в состав сложной системы (что накладывает ряд дополнительных ограничений на параметры МГД течения). Примеры использования полученного решения в задачах такого типа будут рассмотрены в следующей работе.

Список литературы

[1] *Бреев В.В., Губарев А.В., Панченко В.П.* Сверхзвуковые МГД генераторы. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.

[2] *Васенин И.М., Глазунов А.А., Губарев А.В. и др.* Препринт ИАЭ. № 5014/12. М., 1990. 44 с.

[3] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832 с.

Поступило в Редакцию
10 января 1992 г.