01;04

СТАБИЛИЗАЦИЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В ПЛАЗМЕ ПРИ ПОМОЩИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В.В.Афанасьев, Ю.Е.Польский

Рассматривается периодическое инерциальное воздействие на плазму, находящуюся в магнитном поле, путем модуляции напряженности магнитного поля, плотности тока или давления. Показано, что периодическое инерциальное воздействие стабилизирует плазму при периоде воздействия, меньшем времени развития неустойчивости в плазме. Проведено сравнение энергетической эффективности рассматриваемых видов инерциальных воздействий на плазму.

Использование внешних динамических воздействий, например переменного магнитного поля, является одним из эффективных методов стабилизации плазмы [1]. Экспериментальное исследование и качественная теория стабилизирующего влияния переменного магнитного поля на ионизационно-перегревные неустойчивости плазмы тлеющего разряда приведены в [2]. Возможность увеличения времени жизни и повышения энерговклада в линейной ловушке при использовании "бегущих" магнитных пробок рассмотрена в [3]. Возможность получения равновесной конфигурации плазмы за счет периодического изменения магнитного поля при решении уравнений магнитной гидродинамики показана в [4]. Экспериментальное исследование влияния периодической модуляции накачки на динамику плазмы в лазерах рассмотрено в [5]. Тем не менее единый подход к исследованию стабилизации неустойчивостей плазмы при наличии внешних динамических воздействий отсутствует. Поэтому анализ обобщенной теоретической модели влияния таких воздействий на основе синергетического подхода [6] в рамках магнитогидродинамического (МГД) описания плазмы представляется интересным. Известно, что гидродинамические уравнения могут быть сведены к системе уравнений Лоренца, которые описывают динамические системы (ДС) со странным аттрактором [6]. Эффективным методом управления поведением ДС со странным аттрактором является периодическое воздействие на параметры системы в частотной области инерциальных воздействий (ИВ) [7,8]. В этой области частота воздействия

$$\omega > 2\pi/T, \tag{1}$$

где T — характерное время изменения энергоопределяющего параметра ДС в переходном режиме.

Для плазмы T ограничено сверху минимальной постоянной времени развития неустойчивости, которая определяется тепловой скоростью движения ионов и геометрическими размерами плазменной области.

Плазма в магнитном поле в МГД приближении описывается уравнением

$$nm\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{C}[\mathbf{j}\times\mathbf{H}] - \mathrm{grad}(p_i + p_e),$$

где n — число частиц (для квазинейтральной плазмы $n_e = n_i = n$); $m = m_i + m_e$; $\mathbf{u}$ — вектор средней макроскопической скорости; $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока; $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; $p = p_i + p_e$ — давление плазмы.

Энергетический принцип МГД теории устойчивости [1] позволяет получить уравнение для малых смещений $\boldsymbol{\xi}$ элемента объема плазмы из состояния равновесия

$$\rho\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}1\{\boldsymbol{\xi}\} + \mathbf{F}2\{\boldsymbol{\xi}\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{F}1\{\boldsymbol{\xi}\}$ описывает изменение внутренней тепловой энергии плазмы

$$\mathbf{F}1\{\boldsymbol{\xi}\} = \nabla\left\{\gamma P\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}\nabla p\right\},$$

а $\mathbf{F}2\{\boldsymbol{\xi}\}$ описывает изменение магнитной энергии плазмы

$$\mathbf{F}2\{\boldsymbol{\xi}\} = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathrm{rot}[\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{H}]] - \frac{1}{4\pi}[\mathbf{H}\times\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}[\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{H}]],$$

ρ — плотность, γ — показатель адиабаты (в трехмерном случае $\gamma = 543$).

Уравнение (2) эквивалентно уравнениям, описывающим малые колебания упругой среды с потенциальной энергией $\Delta W_n = -\frac{1}{\rho}\int(\mathbf{F}1\{\boldsymbol{\xi}\} + \mathbf{F}2\{\boldsymbol{\xi}\})dV$. При $\Delta W_n > 0$ для всех $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ плазма МГД устойчива, при $\Delta W_n < 0$ неустойчива. Границы устойчивости определяются уравнением

$$\mathbf{F}1\{\boldsymbol{\xi}\} + \mathbf{F}2\{\boldsymbol{\xi}\} = 0. \tag{3}$$

Известно, что действие на нелинейной осциллятор периодической силы с частотой ω

$$\rho\ddot{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{F}1\{\boldsymbol{\xi}\} - \mathbf{F}2\{\boldsymbol{\xi}\} = \boldsymbol{\Phi}\{\boldsymbol{\xi}\}\cos\omega t,$$

— приводит к возникновению в (2) стабилизирующего возвращающего члена, пропорционального квадрату амплитуды внешних воздействий [9,10],

$$\mathrm{M}\{\boldsymbol{\xi}\} = \frac{\boldsymbol{\Phi}\{\boldsymbol{\xi}\}}{2\rho\omega^2}\frac{j\boldsymbol{\Phi}\{\boldsymbol{\xi}\}}{j\boldsymbol{\xi}}. \tag{4}$$

Возникновение $\mathrm{M}\{\boldsymbol{\xi}\}$ вследствие ИВ вызывает изменение потенциальной энергии плазмы

$$\Delta W_n^* = \frac{1}{\rho}\int(\mathbf{M}\{\boldsymbol{\xi}\} - \mathbf{F}1\{\boldsymbol{\xi}\} - \mathbf{F}2\{\boldsymbol{\xi}\})\,d\mathbf{V}, \tag{5}$$

откуда в свою очередь следует, что ИВ изменяет и условие устойчивости (3), определяемое теперь уравнением

$$\mathbf{M}\{\boldsymbol{\xi}\} - \mathbf{F}1\{\boldsymbol{\xi}\} - \mathbf{F}2\{\boldsymbol{\xi}\} = 0.$$

Неустойчивость плазмы вызывается изменениями потенциальной тепловой энергии $\Delta W_{\text{т}}$ и/или изменениями потенциальной магнитной энергии $\Delta W_{\text{м}}$. Условием стабилизации плазмы при ИВ является обеспечение выполнения неравенства

$$|\Delta W_n^* - \Delta W_n| \geqslant |\Delta W_{\text{т}} + \Delta W_{\text{м}}|. \tag{6}$$

Равенство в (6) дает интегральное векторное уравнение для определения максимально допустимого смещения ξ_m плазмы от состояния равновесия, еще стабилизируемого рассматриваемым типом ИВ,

$$\int\limits_{-\xi_m}^{\xi_m} \mathbf{M}\{\boldsymbol{\xi}\} d\mathbf{V} = \int\limits_{-\xi_m}^{\xi_m} (\mathbf{F}1\{\boldsymbol{\xi}\} + \mathbf{F}2\{\boldsymbol{\xi}\}) d\mathbf{V}.$$

Проанализируем в МГД приближении влияние на плазму наиболее распространенного и изученного ИВ при модуляции напряженности магнитного поля по закону

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cos \omega t, \qquad \mathbf{h}(\mathbf{r}) \ll \mathbf{H}(\mathbf{r}).$$

Из (2) следует, что ИВ $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ приводит к возникновению в МГД уравнении плазмы внешнего периодического воздействия $\boldsymbol{\Psi}\{\boldsymbol{\xi}, t\}$

$$\boldsymbol{\Psi}\{\boldsymbol{\xi} t\} = [\mathbf{j} \times \boldsymbol{\varphi}]/C - [\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}]/4\pi, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{h} - (\boldsymbol{\xi} \operatorname{grad})\mathbf{h}$.

При этом ИВ $H(r, t)$ вызывает появление стабилизирующего члена

$$\mathbf{M}_1\{\boldsymbol{\xi}\} \simeq \frac{1}{2\rho\omega^2} ([\mathbf{j} \times \boldsymbol{\varphi}]/C - [\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}]/4\pi) \boldsymbol{\xi}^0 \times$$

$$\times \Big\{ [(\mathbf{j} \operatorname{grad})\boldsymbol{\varphi} + (\boldsymbol{\varphi} \operatorname{grad})\mathbf{j} - [\mathbf{j} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}] + [\boldsymbol{\varphi} \times \operatorname{rot} \mathbf{j}]] /C -$$

$$- [(\mathbf{H} \operatorname{grad}) \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} + (\operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} \operatorname{grad})\mathbf{H} + [\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}] + [\operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}]] /4\pi \Big\}, \tag{8}$$

который увеличивает потенциальную энергию ДС (2) на величину $\Delta W_{\text{ИВ}} = \frac{1}{\rho} \int \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\xi} d\mathbf{V}$, зависимость $\mathbf{M}_1 \sim 1/\omega^2$ указывает на снижение энергетической эффективности стабилизирующих ИВ с ростом ω. Уменьшение ω ниже $2\pi/T$ для плазмы на границе устойчивости может приводить к стохастизации ее поведения, что согласуется с экспериментальными результатами работ [2,5].

Анализ стабилизирующего члена при ИВ показывает, что для повышения энергетической эффективности ИВ необходимо максимизировать φ при вариациях отклонений $\boldsymbol{\xi}$, например, путем увеличения $\mathbf{Jh}/\mathbf{J}x$, $\mathbf{Jh}/\mathbf{J}y$ и $\mathbf{Jh}/\mathbf{J}z$ соответствующим выбором периодически воздействующей составляющей магнитного поля $\mathbf{h}(x,y,z)$. Подстановка (8) в (6) дает уравнение для определения максимально допустимого смещения от состояния равновесия, стабилизируемого ИВ за счет $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$.

Полученные выражения (7) и (8) при подстановке в (5) дают с учетом конкретного вида плазмы и ее динамических характеристик явные выражения членов $\Delta W_{\text{ИВ}}$, $\Delta W_{\text{м}}$ и $\Delta W_{\text{т}}$, входящих в неравенство (6), определяющее энергетическую эффективность рассматриваемого типа ИВ за счет $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$.

Отметим, что ИВ на плазму может быть осуществлено также модуляцией плотности тока $\mathbf{j}$ или давления плазмы. При стабилизирующем ИВ на плазму за счет модуляции $\mathbf{j}$, полагая $\mathbf{j}(t)=\mathbf{j}+\boldsymbol{\Delta}_j\cos\omega t$, стабилизирующий член $\mathbf{M}_2\{\boldsymbol{\xi}\}$, как следует из (4), равен

$$\mathbf{M}_2\{\boldsymbol{\xi}\}\simeq\frac{1}{2(c\omega)^2\rho}\,[\boldsymbol{\Delta}_j\times\operatorname{rot}[\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{H}]]\,\frac{j[\boldsymbol{\Delta}_j\times\operatorname{rot}[\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{H}]]}{j\boldsymbol{\xi}},\tag{9}$$

где по сравнению с $\mathbf{M}_1\{\boldsymbol{\xi}\}$ отсутствуют взаимокомпенсирующиеся слагаемые.

Стабилизирующее ИВ за счет модуляции $p(t)=p+\Delta_p\cos\omega t$ приводит к возникновению стабилизирующего члена $\mathbf{M}_3\{\boldsymbol{\xi}\}$

$$\mathbf{M}_3\{\boldsymbol{\xi}\}\simeq\frac{(\gamma\Delta_p)^2\nabla\{\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\}}{2\omega^2\rho}\,\frac{j(\nabla\{\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\})}{j\boldsymbol{\xi}}.\tag{10}$$

Энергетическая эффективность рассматриваемых видов ИВ зависит от величин вызываемых ими изменений потенциальной энергии плазмы ΔW_{ni}, $i=\overline{1,3}$, определяемых, согласно (5), стабилизирующими членами $\mathbf{M}_i\{\boldsymbol{\xi}\}$, $i=\overline{1,3}$; (8), (9), (10). Отсюда следует возможность оптимизации ИВ по энергетической эффективности как выбором закона изменения параметров плазмы, так и определением оптимальной их совокупности — $a\mathbf{H}(t)+b\mathbf{j}(t)+dp(t)$, когда результирующий стабилизирующий член есть

$$\mathbf{M}_\Sigma\{\boldsymbol{\xi}\}=\frac{1}{2\omega^2\rho}\sum_{i=1}^{3}k_i\boldsymbol{\Phi}_i\frac{j\boldsymbol{\Phi}_i}{j\boldsymbol{\xi}},$$

где $k_1=a$, $k_2=b/C^2$, $k_3=d\gamma^2$,

$$\boldsymbol{\Phi}_1=[\mathbf{j}\times\varphi]/C-[\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\varphi]/4\pi,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2=[\boldsymbol{\Delta}_j\times\operatorname{rot}[\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{H}]],$$

$$\boldsymbol{\Phi}_3=\nabla\{\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}\}.$$

Известно, что развитие таких распространенных неустойчивостей в плазме, как неустойчивость Бунемана, ионно-звуковая неустойчивость [1], прекращается при увеличении в плазме доли ионов со скоростями движения $v \geqslant C_s$, где C_s — скорость звука в плазме, определяющая время развития этих неустойчивостей. Очевидно, что ИВ на плазму за счет $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{j}(t)$, $p(t)$ с достаточно высокой частотой ω как раз и позволяет изменить распределение скоростей ионов плазмы с увеличением доли высокоскоростных ионов и, следовательно, предотвратить возникновение неустойчивости в плазме. Поэтому рассмотренный механизм стабилизации неустойчивостей в плазме при помощи инерциальных воздействий имеет не только математическое, но и четкое физическое обоснование.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что стабилизирующее воздействие на плазму оказывают только динамические воздействия, принадлежащие частотной области ИВ [7,8]. Поэтому полученные в [2–4] условия стабилизации плазмы при помощи внешних динамических воздействий необходимо дополнить ограничением снизу на частоту воздействия. Так, полученное в [4] (формулы (6),(8)) условие равновесной конфигурации идеально проводящей жидкости в МГД приближении при периодическом изменении напряженности магнитного поля необходимо дополнить указанным выше ограничением на частоту изменения (1). В противном случае это периодическое изменение может служить дополнительным источником возникновения неустойчивостей в плазме.

В заключение отметим, что в настоящее время используются три подхода к решению задачи о стабилизации плазмы.

1. Подход и использование метода "грубой силы", основанный на обеспечении требуемой величины внешних стационарных стабилизирующих полей. Пример такого подхода — обеспечение требуемой величины внешнего стабилизирующего магнитного поля. Для данного подхода характерны высокие энергетические затраты и невозможность решения задачи стабилизации в общем виде [1].

2. Подход, основанный на введении следящей отрицательной обратной связи [11]. При этом внешние поля отслеживают неустойчивость плазмы и стремятся вернуть ее к стационарному состоянию. Но этот подход реализуем только для низших мод в силу ограничений по быстродействию, связанных с проблемой обеспечения устойчивости замкнутой системы с обратной связью. Тем не менее данный подход более гибок, чем первый, хотя имеет высокую сложность из-за большого числа степеней свободы в реальной плазме, что ограничивает его применение.

3. Подход с использованием метода инерциальных воздействий. Основным ограничением его применимости является выбор периода воздействия, который должен быть меньше всегда отличного от нуля времени развития неустойчивости в реальной плазме. Недостатком метода ИВ является рост энергозатрат с увеличением частоты воздействия. Заметим, однако, что в этом случае энергия, затрачиваемая на создание ИВ, создает дополнительный подогрев плазмы. Метод ИВ дает возможность стабилизировать ДС с большим числом мод, к которым относится плазма, и не требует учета детальных параметров каждого конкретного типа колебаний в реальной плазме [12].

Основным достоинством метода ИВ, на наш взгляд, является его общность, что позволяет стабилизировать с использованием ИВ различные нелинейные ДС, включая и плазму, вблизи их состояний равновесия. Действительно, система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих плазму вблизи состояния равновесия, может быть линеаризована, а затем сведена с использованием методов синергетики к уравнению осциллятора [1,6]. Отсюда следует, что в случае малых отклонений плазмы от состояния равновесия ИВ могут обеспечить управляемость плазмы при соответствующем выборе частоты и характеристик внешних динамических воздействий. Связь допустимой величины отклонений от состояния равновесия с флуктуациями параметров [8,13] ДС указывает на наличие функциональной связи между энергетическими затратами на ИВ, уровнем флуктуаций, частотой воздействия и параметрами плазмы. Однако детальный анализ этих взаимосвязей для плазмы выходит за рамки данной работы.

Список литературы

[1] *Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З.* Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979. 320 с.
[2] *Липатов Н.И., Минеев А.П., Мышенков В.И. и др.* // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 10. Вып. 7. С. 408–412.
[3] *Морозов А.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 52. Вып. 1. С. 677–680.
[4] *Скворцов А.Т.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 2. С. 70–72.
[5] *Ниязов Б.А., Султанова Ф.Р.* // Квантовая электрон. 1991. Т. 18. № 1. С. 74.
[6] *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1985. 419 с.
[7] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е.* // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. № 11. С. 30–33.
[8] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е.* // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16 Вып. 11. С. 52–56.
[9] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 422 с.
[10] *Неймарк Ю.И., Коган Н.Я., Савельев В.П.* Динамические модели теории управления. М.: Наука, 1985. 400 с.
[11] Feedback and Dynamic Control of Plasma. American Institute of Physics Conference Proc. 1970. 363 p.
[12] *Afanaciev V.V., Polsky Yu.E.* // Proc. of Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases. Pisa, 1991. Vol. 3. P. 524–526.
[13] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 8. С. 57–60.

Казанский авиационный институт
им.А.Н.Туполева

Поступило в Редакцию
23 декабря 1991 г.
В окончательной редакции
16 июля 1992 г.