[2] Deruelle N., Tourrenc P. // Lect. Motes Phys. 1984. N 112. P. 232-237.
[3] Brillet A. // Ann. Phys. (Fr), 1985. V. 10. N 3. P. 219-226.
[4] Maischberger K. Proc. 2 Marcel Grossman Meet. Gen. Relativity, Trieste 5-11 July, 1979. Part A. Amsterdam. 1982. P. 1083-1100.
[5] Weber J. Proc. 2 Marcel Grossman Meet. Gen. Relativity, Trieste 5-11 July, 1979. Part A. Amsterdam, 1982. P. 1073-1081.
[6] Saulson Peter R. // Rev. Sci. Instrum. 1984. V. 55. N 8. P. 1315-1320.
[7] Del Fabbro R. // Phys. Lett. A. 1988. V. 132. N 5. P. 237-240.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Поступило в Редакцию 29 ноября 1989 г.

Письма в ЖТФ, том 16, вып. 5 12 марта 1990 г.

01; 09

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФОРМЫ ТЕЛА ПО ДИАГРАММЕ РАССЕЯНИЯ

Б.З. Каценеленбаум, М.Ю. Шалухин

1. Электромагнитное поле, рассеянное металлическим телом, создается токами, протекающими по его поверхности. Для некоторых поверхностей рассеянные поля обладают свойством, которое не зависит от этих токов и определяется только формой поверхности. Если рассеянное поле не обладает этим свойством, то рассеивающее тело не может иметь эту форму. Это соображение позволяет в некоторых случаях по рассеянному полю, даже не зная поля, облучающего тело, сделать некоторые вероятностные выводы о форме рассеивающего тела.

Для простоты записи мы будем ниже рассматривать только диаграммы, хотя в ближней зоне поле в большей степени, чем в дальней, определяется именно свойствами поверхности. Кроме того, мы ограничимся двумерной скалярной задачей и четными относительно $\varphi = C$ полями.

2. Используемое ниже свойство диаграммы, не зависящее от тока, основано на том, что если $\mathcal{L}$ есть контур, на котором обращается в ноль некоторая функция

$$\hat{u}(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(kr)\cos n\varphi, \tag{1}$$

то диаграмма $\tilde{F}(\varphi)$, созданная любым током $\tilde{j}$, распределенным на $\hat{\mathcal{L}}$, удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} \tilde{F}(\varphi)\hat{F}(\varphi)d\varphi=0, \tag{2}$$

где $\hat{F}(\varphi)$ выражается рядом с теми же коэффициентами, что и в (1):

$$\hat{F}(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(-i)^n\cos n\varphi. \tag{3}$$

Доказательство (2) содержится, по существу, в [1] (формулы (7а), (9б) и (10)). Оно может быть непосредственно получено применением формулы Грина к двум решениям уравнения Гельмгольца - к вспомогательной функции $\hat{u}(r,\varphi)$ и к полю $\tilde{u}(r,\varphi)$, созданному током $\tilde{j}$. Асимптотика этих функций при $r\to\infty$ есть

$$\hat{u}(r,\varphi)\to\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}\hat{F}(\varphi)+\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}\Phi(\varphi)+O(r^{-\frac{3}{2}}), \tag{4а}$$

$$\tilde{u}(r,\varphi)\to\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}\tilde{F}(\varphi)+O(r^{-\frac{3}{2}}), \tag{4б}$$

где при вещественных A_n $\Phi(\varphi)=\hat{F}^*(\varphi)$. При подстановке в интеграл по бесконечно удаленной окружности, возникающий в формуле Грина, сохранятся только первые слагаемые в (4), и получится формула (2). При доказательстве используется лишь одно свойство тока $\tilde{j}$ - он отличен от нуля только на $\hat{\mathcal{L}}$, т.е. там, где $\hat{u}(r.\varphi)=0$, и поэтому $\hat{u}(r.\varphi)\tilde{j}\equiv 0$.

3. Для того, чтобы $\hat{u}(r,\varphi)$ было вещественно, вещественными должны быть коэффициенты A_n. Тогда из вида ряда (3) следует, что $\hat{F}(\varphi)$ удовлетворяет условию

$$\hat{F}(\varphi+\pi)=\hat{F}^*(\varphi). \tag{5}$$

И обратно, если $\hat{F}(\varphi)$ удовлетворяет (5), то она имеет вид (3) с вещественными коэффициентами A_n, а поэтому функция $\hat{u}(r,\varphi)$ будет вещественной, а этого достаточно, чтобы существовали контуры $\hat{\mathcal{L}}$. Таким образом, всякой функции $\hat{F}(\varphi)$, удовлетворяющей условию (5), можно сопоставить контур $\hat{\mathcal{L}}$, такой, что любой ток на $\hat{\mathcal{L}}$ порождает диаграмму $\tilde{F}(\varphi)$, удовлетворяющую условию (2).

Фактическое нахождение контура $\hat{\mathcal{L}}$, соответствующего в этом смысле функции $\hat{F}(\varphi)$, производится по следующей схеме: надо произвольно задать $\hat{F}(\varphi)$ в интервале $0<\varphi<\pi$, вычислить коэффициенты A_n по формулам, следующим из (3) и (5):

$$\pi A_{2m} = \frac{(-1)^m}{1+\delta_{0m}} \int_0^{\pi} Re\hat{F}(\varphi)\cdot \cos m\varphi d\varphi,$$
$$m=0,1,2\ldots \qquad (6)$$
$$\pi A_{2m+1} = (-1)^{m+1}\int_0^{\pi} Jm\hat{F}(\varphi)\cos m\varphi d\varphi,$$

и найти нулевые линии вспомогательной функции $\hat{u}(r,\varphi)$. В общем случае нахождение нулевых линий вещественной функции легко производится на ЭВМ; для другой задачи это проделано, например, в [2, п.7.1]. Если линия $\hat{\mathcal{L}}$ – замкнутая, то она представляет собой резонансный контур.

4. Пусть измерена диаграмма $F(\varphi)$ и мы хотим выяснить, насколько может быть похож контур $\mathcal{L}$ рассеивающего тела на какой-либо из контуров $\hat{\mathcal{L}}$, для которых мы знаем соответствующие функции $\hat{F}(\varphi)$. Пронормируем обе функции $F(\varphi)$ и $\hat{F}(\varphi)$ на единицу

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi)|^2 d\varphi = 1, \qquad (7а)$$

$$\int_0^{2\pi} |\hat{F}(\varphi)|^2 d\varphi = 1. \qquad (7б)$$

Любая диаграмма $\tilde{F}$, создаваемая током на $\hat{\mathcal{L}}$, удовлетворяет условию (2). Найдем наименьшее значение, которое может принять интеграл

$$\int_0^{2\pi} |F(\varphi) - \tilde{F}(\varphi)|^2 d\varphi \qquad (8)$$

для различных $\tilde{F}(\varphi)$, удовлетворяющих (2). Это наименьшее значение определяет наибольшую близость (в норме L_2) диаграммы, которую может создать ток, индуцированный (любым образом) на $\hat{\mathcal{L}}$, к измеренной диаграмме $F(\varphi)$. Качественно эта величина определяет и близость контура $\hat{\mathcal{L}}$ к $\mathcal{L}$. Минимум величины (8) для функций, удовлетворяющих (2), достигается для $\tilde{F} = F - \hat{F}^* \int_0^{2\pi} F\hat{F} d\varphi$ и равен

$$I = \left| \int_0^{2\pi} F(\varphi)\hat{F}(\varphi) d\varphi \right|^2. \qquad (9)$$

Основным результатом всего приведенного выше рассмотрения является утверждение, что, измерив $F(\varphi)$, мы можем оценить близость контура $\mathcal{L}$ к любому контуру $\hat{\mathcal{L}}$, для которого известна функция $\hat{F}(\varphi)$, вычислив величину I (9) для измеренной диаграммы и для $\hat{F}(\varphi)$. Если окажется, что $I \simeq 1$, то справедливо утверждение – контур $\mathcal{L}$ не похож на $\hat{\mathcal{L}}$. Чем ближе I к единице, тем информативнее результат сравнения (в смысле (8)) функций $F(\varphi)$ и $\hat{F}(\varphi)$. Если $I \ll 1$, то можно лишь утверждать, что $\mathcal{L}$ может быть близок к $\hat{\mathcal{L}}$; этот результат, по существу, не информативен. Только если I будет мало для нескольких диаграмм, рассеянных одним и тем же контуром при различных индуцирующих полях, то существует высокая вероятность того, что $\mathcal{L}$ близок к $\hat{\mathcal{L}}$.

Вычисляя интеграл (9) для измеренной диаграммы $F(\varphi)$ и нескольких функций $\hat{F}(\varphi)$, можно таким методом найти систему линий $\hat{\mathcal{L}}$, к которым искомый контур $\mathcal{L}$ не близок, и линий $\hat{\mathcal{L}}$ к которым он может быть близок. Эта информация („похож"–„не похож") может быть использована либо для непосредственного определения $\mathcal{L}$ (например, для создания или хотя бы для проверки гипотез о $\mathcal{L}$), либо как вспомогательная для более сложных и точных методов.

5. Сделаем два заключительных замечания.

а) Если диаграмма $F(\varphi)$ не удовлетворяет условию (2), то не только она, но и любая близкая к ней не может быть создана токами на $\hat{\mathcal{L}}$ (т.е. ее нельзя не только реализовать такими токами, но и аппроксимировать [1]). Поэтому малые ошибки при измерении $F(\varphi)$ и, тем самым, в величине I мало изменят результаты.

б) В этом методе надо знать не диаграмму $F(\varphi)$, а только сглаживающие функционалы от нее. Поэтому методы восстановления диаграммы во всем интервале $0 < \varphi < 2\pi$ по измерению ее в части интервала могут оказаться применимыми.

Список литературы

[1] Каценеленбаум Б.З., Шалухин М.Ю. // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34. № 2. С. 225–233.

[2] Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями. Методы конструктивного синтеза /Под ред. Б.З. Каценеленбаума и А.Н. Сивова. М.: Наука, 1989. 176 с.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР,
Москва

Поступило в Редакцию
22 декабря 1989 г.

Письма в ЖТФ, том 16, вып.5 12 марта 1990 г.

01; 08

РАДИАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ

А.А. Дойников, С.Т. Завтрак

В работах [1–3] рассматривалось радиационное взаимодействие газовых пузырьков, пульсирующих в поле бегущей звуковой волны.