[11] Деминов И.Г., Гинзбург Э.И. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25. С. 563–572.
[12] Brasseur G., Hitchman M.H., Simon P.C., De R.A. // Geophys. Res. Lett. 1988. V. 15. N 12. P. 1361–1364.

Поступило в Редакцию
14 февраля 1990 г.

Письма в ЖТФ, том 16, вып. 8 26 апреля 1990 г.

01; 04



# К ТЕОРИИ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ БЫСТРЫХ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВЗРЫВА ПРОВОДНИКОВ

В.С. Воробьев, А.Д. Рахель

Построено автомодельное решение начальной стадии быстрых режимов электрического взрыва проводников. Дано объяснение ранее известным из эксперимента зависимостям времени до начала интенсивного расширения металла (взрыва) и так называемому интегралу действия от параметров внешней электрической цепи и размеров проводника.

Рассмотрим разряд батареи конденсаторов емкостью $C_0$ на тонкую металлическую проволочку радиусом $a_0$ и длиной $l (a_0 \ll l)$. Как показывают результаты численного моделирования и экспериментальные исследования, существуют режимы электрического взрыва, названные быстрыми, для которых скин-эффект несуществен, а процесс нагрева и расширения металла может быть описан в рамках одномерной МГД-динамики. Уравнения длвижения в этом случае имеют вид [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\rho r v = 0,$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{c} - j H_\varphi, \qquad (1\text{–}3)$$

$$\rho T \frac{dS}{dT} = \sigma E_z^2,$$

где $E_z$ и $H_\varphi$ – напряженности электрического и магнитного полей соответственно (геометрия $Z$-пинча); $v$ – радиальная компонента скорости; $r$ – радиус вектор (ось $O_z$ цилиндрической системы координат направлена вдоль оси проволочки); $\rho$ – плотность; р – давление; Т – температура; $s$ – удельная энтропия; $\sigma$ – проводимость; $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial r}$. Плотность тока $j$ подчиняется закону Ома $j=\sigma E_z$, а полный ток в цепи выражается через плотность тока следующим образом: $J=2\pi\int_0^a jr\,dr$ ($a$ – радиус проволочки в момент $t$). Будем рассматривать электрический контур, для которого $R/Z_0$ < 1, где $R=l/(2\pi\int_0^a\sigma r\,dr)$ – сопротивление проволочки, а $Z_0=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ – реактивное сопротивление цепи ($L_0$ –индуктивность, $c$ – скорость света в вакууме). В этих условиях ток хорошо стабилизирован и целиком определяется внешней цепью $J=J_0\sin\omega_0 t$, где $J_0=U_0/Z_0$, а $\omega_0=c/\sqrt{L_0C_0}$.

Решение уравнений (1–3) будем искать в виде однородной деформации, вводя автомодельную переменную $\xi=r/a$ [2]. В этом случае $\xi$ является также лагранжевой координатой фиксированной частицы сплошной среды, а ее скорость равна $v=\xi\frac{da}{dt}$. Из уравнения (1) легко найти следующее представление для плотности: $\rho(\xi,t)=\rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 f(\xi)$, где $f(\xi)$ – безразмерная функция, зависящая только от $\xi$. Введем новую переменную $g(\xi,t)=$ $=\exp(S(\xi,t)/C_V)$ ($C_V$ –теплоемкость). Представим ее в „автомодельном" виде $g(\xi,t)=G(t)\,\gamma(\xi)$. Из закона сохранения энергии (3), подставляя в него выражение для проводимости металла $\sigma=\sigma_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\alpha\frac{T_0}{T}$ ($\alpha$ – постоянная) и температуры, согласно уравнению состояния [4] $T = T_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\Gamma_0}\exp\left(\frac{S}{C_V}\right)$

($\Gamma_0$ – коэффициент Грюнайзена), получим

$$G(\tau)=\exp\left(\Pi_1\int_0^\tau i^2x^{2(\alpha-1)}\,d\tau\right), \tag{4}$$

где $\tau_1=\omega_0 t$; $\Pi_1=\frac{\sigma_0E_0^2}{\rho_0C_VT_0\omega_0}$; $E_0=\frac{j_0}{\sigma_0I_1}$; $j_0=\frac{J_0}{\pi a_0^2}$; $i=J/J_0$;

x $=a/a_0$; $I_1=2\int_0^1\frac{f^{\alpha-\Gamma_0}}{\gamma}\xi\,d\xi$. При этом пространственная часть функции $g$ равна $\gamma=f(\xi)^{(\alpha-1-2\Gamma_0)/2}$. Рассматривая давление как функцию от $\xi$ и $t$ $p=p(\rho(\xi,t),g(\xi,t))$, уравнение движения запишем в виде

$$\rho\xi\frac{d^2a}{dt^2}=-\frac{\Phi(\xi,t)}{a}\frac{\partial\rho}{\partial\xi}-\frac{2\pi j_0^2a_0}{c^2}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 i^2I_2(\xi), \tag{5}$$

где $I_2(\xi)=\frac{2f^{\alpha-\Gamma_0}}{\xi\gamma}\int^{\xi}\frac{f^{\alpha-\Gamma_0}}{\gamma}\xi' d\xi'$; $\Phi(\xi,t)=\frac{\partial p}{\partial \rho}+\frac{(\alpha-1-2\Gamma_0)}{2}\frac{g}{\rho}\frac{\partial p^0}{\partial g}$. Здесь использовалось уравнение состояния $p=\rho_0 c_0^2 \pi_x(\rho/\rho_0)+\Gamma_0\rho c_v T$, в котором $\pi_x(\rho/\rho_0)$ – упругая составляющая давления; $\rho_0$ и $c_0$ – плотность и скорость звука при T = 0 K, p = 0 атм. Переменные $\xi$ и $t$ в уравнении (5), вообще говоря, не разделяются, но если ограничиться стадией медленного расширения $v<c_s$ ($c_s$ – скорость звука) и учесть, что для быстрых режимов $u_A<c_s$ $\left(u_A=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}\right.$ – альфвеновская скорость, а $\left.H_0=\frac{2J_0}{ca_0}\right)$ решение можно искать для слабо неоднородного профиля плотности $\rho(\xi,t)=\rho'(t)+\delta\rho(\xi,t)$, где $|\delta\rho|\ll\rho$. В этом случае переменные в (5) удается разделить, и для приведенного радиуса имеет место уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=x\left[\Pi_2\pi_x(x)+\Pi_3x^{-2\cdot(\Gamma_0+1)}(G(\tau)-1)-\Pi_4 i^2x^{-2}\right], \tag{6}$$

где $\Pi_2=\left(\frac{c_0}{a_0\omega_0}\right)^2$; $\Pi_3=\frac{\Gamma_0 C_v T_0}{(a_0\omega_0)^2}$; $\Pi_4=2\left(\frac{u_A}{a_0\omega_0}\right)^2$; для быстрых режимов справедлива система неравенств $\Pi_2>\Pi_3>\Pi_4$. Из уравнения (6) следует, что стадия медленного расширения длится до тех пор, пока упругая составляющая давления в состоянии компенсировать быстро растущую тепловую. Но, с другой стороны, упругое давление имеет максимум, а затем монотонно убывает. Взяв, например, его в форме $\pi_x\sim\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{m+1}-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n+1}\right]$ ($m$ и $n$ – параметры потенциала Леннарда-Джонса), находим, что максимальное значение достигается при $\rho=\rho_0\left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{1/(m-n)}$. Учитывая эти соображения, из (6) получим уравнение для момента начала интенсивного расширения $\tau_1$: $\int_0^{\tau_1} i^2x^{2(\alpha-1)}d\tau=\ln\left[\frac{\Pi_2}{\Pi_3}\pi_x(x_1)x_1^{2\cdot(\Gamma_0+1)}\right]$ (нами было учтено также, что характерные температуры, при которых начнется интенсивное расширение, гораздо больше начальной $T_0$, т.е. $G(\tau_1)\gg1$). Пренебрегая тепловым расширением вплоть до момента $\tau_1(x_1\equiv x(\tau_1)\simeq1$, будем иметь

$$\tau_1=\frac{1}{2}\sin 2\tau_1+\frac{2}{\Pi_1}\ln\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_3}\varphi_0\right) \tag{7}$$

(постоянная $\varphi_0$ зависит только от материала проводника). Для $\tau_1\ll1$ находим $\tau_1\simeq\left[\frac{3}{\Pi_1}\ln\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_3}\varphi_0\right)\right]^{1/3}$, а для $\tau_1>1$ – $\tau_1\simeq$

$\simeq \frac{2}{\Pi_1} \ln \left(\frac{\Pi_2 \varphi_0}{\Pi_3}\right)$. Отсюда, в частности, следует, что в области малых значений $\tau_1 \sim A^{a/3}$, а в области больших $\tau_1 \sim A^2$, где $A = \pi a_0^2$ – сечение проводника. Следовательно, существует область, где $\tau_1 \sim A$. Действительно, такая зависимость наблюдалась на эксперименте, например в [3], где исследовался электровзрыв проволочек в воздухе.

Вычислим также величину „интеграла действия" $y(t_1) = \int_0^{t_1} J^2 dt$. После элементарных преобразований, с учетом (7), находим

$$y(t_1) = J_0^2 \omega_0^{-1} \int_0^{\tau_1} i^2 d\tau \simeq \rho_0 C_v T_0 \ln \left(\frac{\Pi_2}{\Pi_3} \varphi_0\right) A^2. \quad (8)$$

Ранее этот факт был известен как чисто эмпирический (см. [4]). В частности отмечалось, что „интеграл действия" с точностью не хуже 10 % зависит только от сечения проводника и не зависит от параметров внешней электрической цепи. Как следует из (8), эта зависимость логарифмическая.

## Список литературы


[1] Воробьев В.С., Рахель А.Д. // ТВТ. 1990. Т. 28. № 1. С. 18-23.

[2] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1963. 632 с.

[3] Нэш Ч., Олсен К. В сб.: Электрический взрыв проводников. М.: Мир, 1965. С. 12-22.

[4] Столович Н.Н. Электровзрывные преобразователи энергии. Минск: Наука и техника, 1983. 151 с.



Поступило в Редакцию
21 февраля 1990 г.