Письма в ЖТФ, том 16, вып. 11 12 июня 1990 г.

01; 07; 09

ИНЕРЦИАЛЬНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СО СТРАННЫМ АТТРАКТОРОМ

В.В. Афанасьев, Ю.Е. Польский

В последнее время уделяется большое внимание поведению динамических систем при наличии в фазовом пространстве странного аттрактора [1, 2]. Эти работы посвящены анализу условий, при которых динамическая система (ДС) ведет себя или детерминированным, или стохастическим образом [1–4], а также переходу ДС из одного состояния в другое. Однако не меньший, если не больший интерес представляет задача синтеза условий, при которых сложная ДС со странным аттрактором (СА) будет вести себя строго определенным образом – либо детерминированно, либо стохастически. Решение задачи синтеза позволит определить методы стабилизирующего воздействия на сложные ДС (связанные автоколебательные системы, лазеры, плазма и т.д.), обеспечивающие требуемое их состояние.

Внимание исследователей, изучающих воздействие на нелинейные ДС, в основном сконцентрировано на 3-х частотных областях вынуждающего воздействия ω :

– $\omega \gg 2\pi/T$ (область параметрического воздействия – ОПВ);

– $\omega \simeq 2\pi/T$ (область синхронизации или квазирезонансного воздействия – ОРВ);

– $\omega \ll 2\pi/T$ (область квазистационарного воздействия (ОСВ), где T – характерное время изменения энергоопределяющего параметра ДС в переходном режиме, например период изменения амплитуды колебаний поля в лазерах [5]. Наименее исследована область инерциального воздействия (ОИВ) с $\omega > 2\pi/T$, где существенно влияние инерционных свойств нелинейных ДС. В то же время, на наш взгляд, именно ОИВ открывает новые возможности управления поведением нелинейных ДС. В данной работе исследуется воздействие на ДС со СА гармонической модуляции параметров системы (1) с частотами в ОИВ и анализируется возможность использования таких воздействий для стабилизации состояния ДС.

Система уравнений Лоренца, как показано в [7], где определена квазирезонансная частота Ω системы, вблизи состояний равновесия преобразуется в уравнение Дуффинга, которое в ОИВ $(\sigma(t) = \sigma + \Delta\cos\omega t,\ \ \omega > \Omega,\ \ \Delta/\sigma \ll 1)$ принимает вид

$$\ddot{x} + \dot{x}\left(1+\sigma+\frac{x^2}{b}\right) - \sigma(r-1)x + \frac{\sigma x^3}{b} = -\Delta\cos\omega t\left[\dot{x}-(r-1)x+\frac{x^3}{b}\right], \qquad (1)$$

где σ, r, b – параметры ДС Лоренца [1, 2].

Следуя методике, предложенной в [6] и обобщенной в [3], решение (1) ищем в виде $x(t)=X(t)+\mu\xi(t)$, где $X(t)$ и $\xi(t)$ меняются соответственно с характерными временами $T\sim 2\pi/\Omega$ и $\tau\sim 2\pi/\omega$, а $\mu=\Omega/\omega<1$. Подставляя $X+\mu\xi$ в (1), после усреднения за интервал τ имеем:

$$\begin{cases} \ddot{X}+\dot{X}\left(1+\sigma+\frac{X^2}{b}\right)-\sigma(r-1)X+\sigma\frac{X^3}{b}=-\Delta\mu\left[\ddot{X}-(r-1)+\frac{3X^2}{b}\right]\int_0^{\tau}\xi(t)\cos\omega t\,dt \\ \ddot{\xi}+\dot{\xi}\left(1+\sigma\frac{X^2+2X\mu\xi}{b}\right)-\xi\left(\sigma(r-1)-\frac{3X^2\sigma}{b}\right)=-\frac{\Delta}{\mu}\cos\omega t\left[\dot{X}-(r-1)X+\frac{X^3}{b}\right]. \end{cases}$$

Рассматривая поведение системы вблизи состояния равновесия $X_0=\sqrt{b(r-1)}$, $X=X_0+u$, $u\ll X_0$, получаем:

$$\ddot{\xi}+\dot{\xi}(\sigma+r)+\xi 2\sigma(r-1)\simeq-\frac{\Delta}{\mu}\cos\omega t(\dot{u}+2(r-1)u). \qquad (2)$$

Проинтегрировав уравнение (2), полагая $r\gg 1$, получаем приближенное уравнение для u:

$$\ddot{u}+\dot{u}(r+\sigma_{экв})+2\sigma_{экв}(r-1)u=0, \qquad (3)$$

где $\sigma_{экв}\simeq\sigma+\dfrac{\Delta^2(r-1)}{\omega^2}$ при $\omega>\Omega$.

Сравнивая (3) с уравнением для малых отклонений u, полученным в [7] при отсутствии изменений σ, видим, что расматриваемое инерциальное воздействие на ДС Лоренца вблизи состояний равновесия системы эквивалентно увеличению параметра σ системы на величину $\sigma_1=\dfrac{\Delta^2(r-1)}{\omega^2}$.

Аналогично можно показать, что воздействие на ДС Лоренца вида $r(t)=r+\Delta_r\cos\omega t$, $\Delta_r\ll r$ в ОИВ эквивалентно увеличению параметра r на величину $r_1=\Delta_r^2\dfrac{\sigma}{\omega^2}$.

Результаты расчета относительных изменений r_1/r и σ_1/σ в ДС со СА при инерциальных воздействиях $r(t)$ и $\sigma(t)$ для характерных значений r, σ, b [1–5] при $\omega^2=10\Omega^2$, $\dfrac{\Delta_r}{r}=0.1$, $\dfrac{\Delta}{\sigma}=0.1$ представлены в таблице.

Из таблицы видно, что для эффективного воздействия на ДС со СА необходимо снижать значение квазирезонансной частоты Ω и увеличивать отношение r/σ.

Зависимость r_1/r и σ_1/σ от параметров ДС

r	σ	b	Ω	r_1/r [%]	σ_1/σ [%]	r/σ
22	10	8/3	12.8	0.134	0.128	2.2
28	10	8/3	13.4	0.16	0.15	2.8
20	4	1	2.8	1.02	0.97	5
55	10	2.67	4.9	2.29	2.25	5.5

Согласно [7], значение Ω в квазистационарном приближении ($\dot{z} \to 0$) определяется как

$$\Omega^2 = 2\sigma(r-1) - (\sigma+r)^2/4, \tag{4}$$

а в квазигармоническом приближении ($\dot{z} \simeq (y-y_0)\Omega$, $z \simeq z_0 + \varphi_z \cos(\Omega t + \theta_z), \varphi_z \ll z_0$) уравнение для Ω принимает вид

$$\Omega^2\left(1+\frac{(r-1)}{4b}\right) + \Omega\frac{x_0(\sigma-r)}{2b} - 2\sigma(r-1) - 2W^2 + \frac{(\sigma+r)^2}{4} = 0, \tag{4а}$$

где при $\sigma(t)$ $W = \frac{\Delta(r-1)}{\omega}$, а при $r(t)$ $W = \frac{\Delta_r \sigma}{\omega}$.

Следовательно, инерциальные воздействия $r(t)$ и $\sigma(t)$ изменяют квазирезонансную частоту Ω системы.

Увеличение амплитуды колебаний около состояний равновесия в системе Лоренца при нарушении устойчивости и возникновении СА сопровождается понижением Ω [7], в то же время воздействие $\sigma(t)$ повышает при $\left(r > \frac{4+\sigma}{3}\right)$, а $r(t)$ понижает (при $r > 3\sigma$) частоту Ω. Следовательно, воздействие в ОИВ $\sigma(t)$ повышает, а $r(t)$ – снижает устойчивость анализируемых ДС вблизи состояний равновесия.

Режим СА в ДС Лоренца возникает при $r > \left(3\sigma - 2\sqrt{2\sigma(\sigma-1)}\right)$ [7], граница устойчивости определяется неравенством [2, 5]

$$r < \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{(\sigma-b-1)},$$

поэтому увеличение $\sigma_{экв}$ по сравнению с σ при $\sigma(t)$ приводит к возрастанию верхней границы r, при которой наступает режим СА, а увеличение эквивалентного значения r при $r(t)$ – сужает область устойчивости ДС со СА.

Таким образом, инерциальное воздействие на ДС со СА, находящиеся около состояний равновесия системы, позволяет расширить область устойчивости ДС и позволяет управлять состоянием ДС со странным аттрактором.

Задача оптимизации и минимизации по энергии стабилизирующего инерциального воздействия на ДС со СА выходит за рамки этой статьи и будет рассмотрена в отдельной работе.

Список литературы

[1] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
[2] Странные аттракторы / Под ред. Синай Я.Г., Шильникова Л.П. М.: Мир, 1981. 253 с.
[3] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
[4] Ханин Я.И. Динамика квантовых генераторов. М.: Сов. радио, 1975. 496 с.
[5] Ораевский А.Н. // Квантовая электроника. 1981. Т. 8. № 1. С. 130-142.
[6] Капица П.Л. // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 588-607.
[7] Афанасьев В.В., Польский Ю.Е. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 18. С. 86-90.

Поступило в Редакцию
21 октября 1989 г.
В окончательной редакции
7 марта 1990 г.

Письма в ЖТФ, том 16, вып. 11 12 июня 1990 г.

07

ЛАЗЕР НА ОСНОВЕ МИКРОПОРИСТЫХ СТЕКОЛ С ПРОСТРАНСТВЕННО НЕКОГЕРЕНТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Г.Б. Альтшулер, В.Н. Баханов, В.Г. Дульнева, И.А. Мокиенко, С.Н. Тептюк

Широкое применение лазеров обусловлено их уникальными характеристиками: высокой спектральной яркостью излучения, направленностью, монохроматичностью и др. Однако в некоторых случаях, например в литографии, микроскопии и скоростной фотографии, использование лазеров ограничивается требованием однородности пространственного распределения поля на освещаемом объекте. При лазерной подсветке распределение поля на объекте обычно промодулировано интерференционными полосами и спекл-шумом. В скоростной фотографии, например, это существенно сказывается на качестве получаемого изображения. Обычно для устранения когерентного шума используют метод пространственной модуляции излучения по случайному закону [1-4]. В результате модуляции происходит усреднение пространственной фазы лазерного пучка. Однако данный метод неприемлем для коротких лазерных импульсов.