04; 10

РАСШИРЕНИЕ ПУЧКА НА НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ РАЗВИТИЯ РЕЗИСТИВНОЙ ШЛАНГОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Е.Р. Надеждин

Динамика РЭП на нелинейной стадии развития резистивной шланговой неустойчивости (РШН) изучается, в основном, численно [1]. В расчетах отмечено снижение пространственного инкремента и расширение РЭП, однако моделирование не позволяет понять физическую природу наблюдаемых эффектов. Поэтому особый интерес представляет работа [2], где для наиболее неустойчивой гармоники аналитически получен критерий нелинейной стабилизации РШН вида $Y/a \lesssim 1.7$, где Y – поперечное смещение центра масс РЭП, a – радиус РЭП. При его выводе, однако, не учтено возбуждение других азимутальных мод неустойчивости.

Рассмотрим параксиальный РЭП с током I_b, много меньше тока Альфвена $I_A = \beta\gamma mc^3/e$ (m , e – масса и заряд электрона, $\beta = v_z/c$, v_z – скорость пучка, c – скорость света, γ – релятивистский фактор) в плазме высокой проводимости σ : $4\pi\sigma a^2/c \gg 1$. Пучок компенсирован по заряду, токовая нейтрализация отсутствует. Динамику РЭП описываем моментными уравнениями в автомодельном приближении [3, 4], когда плотность тока РЭП $J_b(r) = (I_b/\pi a^2) F[(\vec{r} - \vec{Y})/a]$, где F –азимутально симметричная функция $\vec{R} = \vec{r} - \vec{Y}$. Тогда для смещения центра тяжести РЭП в направлении $Y = \langle x \rangle \equiv I_b^{-1} \int d^2r\, x\, J_b(r)$ имеем:

$$\ddot{Y} = \langle (e\beta/\gamma m I_b) dA/dx \rangle, \tag{1}$$

где точка – полная производная по времени $d/dt = \partial/\partial t + v_z \partial/\partial z$, A – z –компонента вектор-потенциала, подчиняющаяся уравнению диффузии; для среднеквадратичного радиуса (огибающей) пучка a имеем:

$$\ddot{a} + E^2/a^3 + Y\ddot{Y}/a + U/a = 0, \tag{2}$$

где $U = \langle -(e\beta r/\gamma m)\partial A/\partial r \rangle$. Эмиттанс E определен с учетом поперечного движения РЭП $E^2 = a^2(\dot{Y}^2 + \langle \delta v_\perp^2 \rangle)$, $\delta v_\perp$ определяет собственное давление теплого РЭП. Фазовое перемешивание учтено коэффициентом α [5]:

$$\dot{E}^2 = -2\alpha a^2 \ddot{a} \left[(E/aU + a/E)\beta c \right]^{-1}. \tag{3}$$

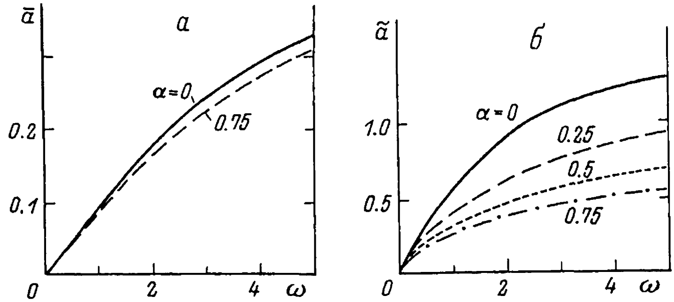

Рис. 1. Зависимости от частоты $\bar{a}(\omega)$ (а) и $\tilde{a}(\omega)$ (б) для различных значений параметра α.

Линеаризуем (1)–(3) относительно положения равновесия $Y = 0$, $a_0 = E/U^{-1/2}$: $a = a_0 + a_1$, $a_1, Y \ll a_0$ – учитывая члены до Y^2. Выделяя в явном виде нулевую и первую азимутальные гармоники, проинтегрируем уравнение для A, считая пучок гауссовским: $F = exp\left[-(r-Y)^2/a^2\right]$ –

$$\frac{d^2Y}{dz^2} = -Y + 2\int_0^\tau Y(\tau')d\tau'\left[1+2(\tau-\tau')\right]^{-2}, \tag{4}$$

$$\frac{d^2a}{dz^2} + 3a + a\frac{da}{dz} + 2Y\frac{d^2Y}{dz^2} + \frac{Y^2}{2} = 2\int_0^\tau \left[Y^2(\tau') + 2a(\tau')\right]d\tau' \times$$
$$\times\left[1+2(\tau-\tau')\right]^{-2} - Y(\tau)\int_0^\tau d\tau' Y(\tau')\left\{2\left[1+2(\tau-\tau')\right]^{-3} - \left[1+2(\tau-\tau')\right]^{-2}\right\}, \tag{5}$$

где проведена замена переменных $(t,z) \Rightarrow (\tau,z)$, $\tau = (t - z/v_z)/\tau_s$, $\tau_s = 4\pi\sigma/a_0^2 c^2$; z нормировано на $k_\beta = \sqrt{I_b/I_A}\,a^{-1}$ (гауссовский РЭП [5]), Y и a_1 нормированы на a_0.

Пренебрегая членами порядка по Y^2, полагая, что при $\tau > 0$ a_1, $Y \sim exp(-i\omega\tau - i\Omega z)$ при $\omega\tau \gg 1$, получим дисперсионные соотношения шланговой (h) и перетяжечной (s) мод неустойчивости:

$$\Omega_h^2 = -(i\omega/2)\varphi(\omega); \quad \Omega_s^2 + ia\Omega_s = 2 - i\omega/2 + \omega^2\varphi(\omega)/4, \tag{6}$$

где $\varphi(\omega) = \int exp(ix)(x+\omega/2)^{-1}dx$ Асимптотики (6) аналогичны полученным ранее для беннетовского РЭП: при $a > 0.25$ $Im\,\Omega_s < 0$ и перетяжечная неустойчивость не развивается. Однако, в случае, когда внешним возбуждением для раскачки колебаний радиуса является РШН ситуация меняется. Считая, что при $\omega\tau \gg 1$ $Y = exp(\Omega_i z) \times \left[Y_1 cos(\omega\tau - \Omega_r z) + Y_2 sin(\omega\tau - \Omega_r z)\right]$, где ω, Ω_r, $\Omega_i > 0$ удовлетворяют (6) для $\Omega_h = -\Omega_r + i\Omega_i$, ищем решение (5) в виде $a = exp(2\Omega_i z) \times \left[\bar{a} + \tilde{a}\cos\left\{2(\omega\tau - \Omega_r z) + \psi\right\}\right]$. Получим:

$$\bar{a} = \bar{Y}^2\left[\omega^2\varphi_i(\omega)/8\right]\left(1 + 2\Omega_i^2 + \alpha\Omega_i\right)^{-1}, \tag{7}$$

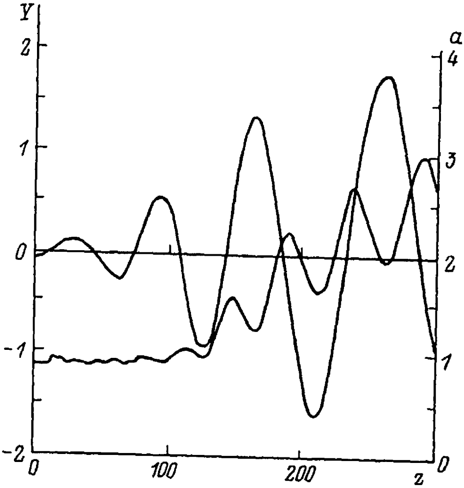

Рис. 2. Зависимости от дистанции среднеквадратичного радиуса и поперечных смещений пучка, возбуждаемого двумя модами возмущений, поляризованных в плоскостях xz и yz [1].

$$\tilde{a} = \bar{Y}^2 \sqrt{(P+Q)/(L^2+N^2)}, \tag{8}$$

$$\varphi(\omega,\varepsilon) = \arccos\left\{\left[(\varepsilon^2-1)P - 2\varepsilon Q\right]\left[(\varepsilon^2+1)\sqrt{P^2+Q^2}\right]^{-1}\right\}, \tag{9}$$

где $\bar{Y}^2 = (Y_1^2+Y_2^2)/2$, $P = KM + LN$, $Q = LM - KN$, $\varepsilon = Y_1/Y_2$, $K = \Omega_r^2 - \Omega_i^2 + \omega\Omega_r\Omega_i - \omega\varphi_i(2\omega)/2$, $L = \omega(\Omega_r^2 - \Omega_i^2)/2 - 2\Omega_r\Omega_i - \omega^2\varphi_i(2\omega)/2$, $M = 2 - 4(\Omega_r^2 - \Omega_i^2) + 2\alpha\Omega_i + \omega^2\varphi_i(2\omega)$, $N = 8\Omega_r\Omega_i + 2\alpha\Omega_i - \omega + \omega^2\varphi_i(2\omega)$.
$\varphi_i(\omega) \equiv \mathrm{Im}\,\varphi(\omega) > 0$. Значит, для любых ω радиус пучка растет с дистанцией. Зависимости $\bar{a}(\omega)$ и $\tilde{a}(\omega)$ иллюстрирует рис. 1, а, б. Аналогичным образом можно рассмотреть и временную задачу.

Таким образом, даже когда перетяжечная мода подавлена фазовым перемешиванием, из-за нелинейной связи между азимутальными гармониками колебания радиуса возбуждаются вынужденно, как отклик на развитие РШН. Добавка к радиусу нарастает с удвоенным инкрементом РШН, соответствующим частоте возмущения, и имеет две составляющих: монотонную и колебательную – характеризующиеся удвоенными частотой и волновым вектором. Эффект квадратичен по параметру Y/a, поэтому в эксперименте или при численном моделировании будет заметен лишь на нелинейной стадии РШН.

В области наиболее неустойчивых частот для беннетовского РЭП ($a \approx 3/4$) $\tilde{a} \approx 1/4$, что хорошо согласуется с оценкой в 30%, полученной в эксперименте [6]. Рост радиуса РЭП при развитии РШН наблюдался также в эксперименте [7]. На рис. 2 приведены результаты расчета огибающей и поперечного смещения пучка, возбуждаемого двумя модами возмущений, поляризованных в плоскостях xz, yz [1]. Четко прослеживаются колебания радиуса РЭП с удвоенным волновым вектором и монотонный рост радиуса с дистанцией. Для разных поляризаций возмущений величина $\bar{a}=\bar{a}_1+\bar{a}_2$, а величины $\tilde{a}$ складываются с учетом фазы колебаний: $\tilde{a}=(\tilde{a}_1^2+\tilde{a}_2^2)^{1/2}$, поэтому $\bar{a}$ и $\tilde{a}$ на рис. 2 превышают полученные выше для одной моды возмущения. Таким образом, учет взаимодействия первой и нулевой азимутальных гармоник дает качественно верную картину развала пучка на нелинейной стадии РШН.

Продолжая разложение (1)-(3) до членов порядка γ^3 можно по аналогии с [2] получить критерий нелинейной стабилизации РШН. Решения (1)-(3) из-за кубических нелинейностей будут стремиться к насыщению при $\gamma \to const(\omega, k, \varepsilon) \geqslant a$. Однако для вывода такого критерия, как нелинейного, следует рассмотреть все азимутальные моды колебаний (в частности, в (1)-(3) не учтена вторая азимутальная мода, которая возбуждается во втором порядке по γ). Поэтому такой критерий является лишь косвенным свидетельством того, что на нелинейной стадии развитие РШН может замедлиться.

Автор благодарит А.А. Рухадзе за интерес к работе, Г.А. Сорокина и Г.Ю.Куревлева за ценные замечания.

Список литературы

[1] Куревлев Г.Ю., Сорокин Г.А. Полномасштабное моделирование резистивной шланговой неустойчивости РЭП в плотной плазме. М., 1989. Деп. в ВИНИТИ 13.09.89. № 5125. 24 с.

[2] Григорьев В.П., Диденко А.Н., Захаров А.В. // Изв. вузов. Физика. 1987. С. 78.

[3] Lee E.P., Cooper R.K. // Part. Accel. 1976. V. 7. P. 83.

[4] Lee E.P. // Phys. Fluids. 1978. V. 21. P. 1327.

[5] Lampe M., Joice G. // Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 3371.

[6] Lauer E.J., Briggs R.J., Fessenden T.J. et al. // Phys. Fluids. 1978. V. 21. P. 1344.

[7] Голубев А.А., Кадымов А.Х., Надеждин Е.Р. и др. Резистивная неустойчивость длинноимпульсного РЭП в газе малой плотности. М., Деп. в ВИНИТИ 28.03.89. № 2023. 1989. 30 с.

Московский радиотехнический
институт АН СССР

Поступило в Редакцию
3 мая 1990 г.