[5] Бимурзаев С.Б., Якушев Е.М. // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35. № 1. С. 125-133.
[6] Дауменов Т., Сапаргалиев А.А., Секунова Л.М., Якушев Е.М. // ЖТФ. 1981. Т. 51. В. 6. С. 1137-1145.
[7] Ибраева З.Ж., Сапаргалиев А.А., Якушев Е.М. // ЖТФ. 1985. Т. 55. В. 11. С. 2170-2174.

Алма-Атинский государственный медицинский институт им. С.Д. Асфендиярова

Поступило в Редакцию 18 мая 1990 г.

Письма в ЖТФ, том 16, вып. 23 12 декабря 1990 г.

01

АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Ю.М. Терентьев

В настоящей работе рассматривается новый вид неустойчивости, возникающий в линейных колебательных системах при взаимодействии гармоник накачки через собственные колебания. При слабой модуляции частоты ν осциллятора резонанс возникает, если спектр накачки содержит частоты ν_2 и ν_1, связанные соотношением

$$2\nu = \nu_2 - \nu_1 . \tag{1}$$

В теории [1–3] воздействие гармоник накачки обычно считается независимым. Так, для систем, соответствующих уравнению Хилла,

$$\ddot{z} + [a + p(t)]\, z = 0, \tag{2}$$

где p – периодическая функция,

$$p(t) = 2q \sum_{k=1} A_k \cos 2kt, \tag{3}$$

а малый параметр q соответствует слабой модуляции, утверждается [3], что области неустойчивости, соответствующие отдельным гармоникам разложения (3), независимо от других гармоник, удовлетворяют при $q \longrightarrow 0$ условиям
$a = (km)^2. \qquad m = 1, 2 \ldots$

Тем самым, если исключить тривиальное совпадение частот

$$(k'm') = (km),$$

пересечение областей неустойчивости, т.е. взаимодействие гармоник, к настоящему времени считается возможным лишь с ростом q.

Оказывается, что указанная независимость гармоник накачки имеет место только в первом порядке по q, т.е. для главного параметрического резонанса. В следующем порядке по q оказывается необходимым, несмотря на линейность системы, учесть неустойчивости, каждая из которых обусловлена наличием в Фурье-представлении накачки двух гармоник и т.д. Для простого и достаточно строгого анализа такой неустойчивости ограничимся здесь частным случаем уравнения Хилла

$$\ddot{x} + [a - 2q(c\cos 3t + d\cos 5t)]\,x = 0, \qquad (4)$$

где предполагается $c = O(1)$, $d = O(1)$. По стандартной теории неустойчивости (4) при $q \to 0$ удовлетворяют условиям

$4a = 9m^2;\quad 4a = 25n^2 \qquad m, n = 1, 2 \ldots,$

что исключает неустойчивость при $a = 1$. Возникновение такой неустойчивости можно установить при анализе периодических решений (4) и соответствующих им собственных значений a. В силу теоремы Гаупта [4] области неустойчивости соответствуют интервалу

$$a_i < a < a_{i+1}, \qquad (5)$$

где a_i, a_{i+1} – последовательно расположенные собственные значения уравнения (4), соответствующие его решениям с совпадающим периодом. Такие решения одновременно являются либо периодически, либо антипериодическими (полупериодическими). В терминах теории Фоке у таких решений совпадает знак единичного по модулю мультипликатора. Напротив, интервал значений (5), расположенный между собственными значениями, соответствующими решениям с различными периодами, соответствует области устойчивости решений. При этом собственные значения предполагаются упорядоченными по величине.

При анализе применим метод Линдштедта-Пуанкаре [5], который для периодических решений и собственных значений приводит к сходящимся для достаточно малых q степенным рядам малому параметру. Исходя из линейно независимых решений невозмущенного уравнения, как нулевого приближения, и, получив в некотором порядке по различие между собственными значениями a_1, a_2, соответствующими периодическим решениям x_1, x_2 возмущенного уравнения, убеждаемся в неустойчивости решений (4) в интервале (5). Предполагая решения (4) в виде

$$x^s=\sum_{m=0} q^m x_m^s, \quad s=1,2, \tag{6}$$

как и собственные значения

$$a^s=\sum_{m=0} q^m a_m^s, \tag{7}$$

где верхний индекс нумерует решения, причем

$$a_0^1=a_0^2=1, \; x_0^1=\cos, \; x_0^2=\sin t; \tag{8}$$

в первом приближении получим

$$x_1^1=-\left[\frac{c}{3}\cos 2t+\frac{d}{35}\cos 6t+\frac{(c+d)}{15}\cos 4t\right] \tag{9}$$

и

$$x_1^2=\frac{c}{3}\sin 2t-\frac{d}{35}\sin 6t+\frac{(d-c)}{15}\sin 4t. \tag{10}$$

Во втором приближении

$$x_2^1=\frac{19}{420}c^2\cos 3t+\frac{c^2}{72}\cos 5t+\frac{d^2}{4200}\cos 11t+ \tag{11}$$
$$+\frac{c(c+6d)}{720}\cos 7t+\frac{d}{8400}(10c+7d)\cos 9t$$

и

$$x_2^2=\frac{19}{420}c^2\sin 3t-\frac{c^2}{72}\sin 5t+\frac{d^2}{4200}\sin 11t+$$
$$+\frac{c(c-6d)}{720}\sin 7t+\frac{d}{8400}(10c-7d)\sin 9t. \tag{12}$$

Исключив секулярные члены, для собственных значений имеем

$$a^1=1-2q^2\left[\frac{c^2}{5}+\frac{d^2}{21}+\frac{cd}{15}\right]+o(q^2), \tag{13}$$

и

$$a^2=1-2q^2\left[\frac{c^2}{5}+\frac{d^2}{21}-\frac{cd}{15}\right]+o(q^2). \tag{14}$$

Тем самым во втором порядке по q собственные значения различны:

$$a^2-a^1=\frac{4cd}{15}q^2+o(q^2). \tag{15}$$

Несовпадение собственных значений (4), соответствующих периодическим решениям с периодом 2π, доказывает существование неустойчивости при условии

$$\left| a - 1 + 2q^2\left(\frac{c^2}{5} + \frac{d^2}{21}\right)\right| < \frac{2q^2}{15}\left| cd \right| . \qquad (16)$$

Показатель экспоненциального роста в области неустойчивости также имеет второй порядок малости по q. Линейность дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами сопровождается здесь нелинейностью решений, а значит и основных физических параметров относительно соответствующих коэффициентов Фурье, что осталось, по-видимому, ранее незамеченным.

При некотором усложнении выкладок так же рассматривается общий случай накачки с частотами, соответствующими условию (1).

Ангармонический параметрический резонанс следует отличать от комбинационного, где соотношения типа (1) возникают в колебательных системах, порядок которых более двух, а переход от устойчивости к неустойчивости не связан с периодическими колебаниями.

Ангармоническую неустойчивость можно физически интерпретировать как следствие возникновения связи между модами накачки в результате специального выбора собственных частот. В эксперименте такая неустойчивость может быть замаскирована образованием гармоник на нелинейных элементах.

Полученные результаты имеют очевидные аналоги в задаче о волнах в пространственно-периодической среде и при классификации квантовых состояний в пространственно-периодическом поле.

Автор благодарен Ф.Г. Бассу и участникам его семинара за содержательную дискуссию.

Список литературы

[1] Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.

[2] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их применение. М.: Наука, 1972. 720 с.

[3] Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 431 с.

[4] Стретт М.Д.О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков–Киев: Научно-техническое изд-во Украины, 1935. 238 с.

[5] Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

Днепропетровский государственный университет

Поступило в Редакцию 24 августа 1990 г.